Парадигма развития науки

Методологическое обеспечение

А.Е. Кононюк

ОСНОВЫ НАУЧНЫХ ИССЛЕДОВАНИЙ

(Общая теория эксперимента)

Книга 3

Киев
Освіта України
2011

УДК 519. 237.5:515.126.2
ББК 22.172+22.152
К 15
Рецензент:
Н.К.Печурин - д-р техн. наук, проф. (Национальний авиационный университет).

Кононюк А.Е.
К15 Основы научных исследований (общая теория эксперимента)
К.3. Монография. К.: 2011.- 456 с.
ISBN 966-96574-0-9

Данная работа, состоящая из четырех книг, посвящена основам научного исследования, методы которых широко используются в экспериментальных исследованиях. Подробно рассмотрена техника факторного планирования эксперимента. Особое внимание уделено вопросам интерпретации результатов эксперимента и проверки правильности исходных предпосылок, приемам планирования в лабораторных и промышленных условиях, в том числе блочному планированию. Изложение сопровождается детальным анализом большого числа практических примеров.

Работа рассчитана на магистров, аспирантов, докторантов и других научных работников различного профиля.

УДК 519. 237.5:515.126.2

ББК 22.172+22.152

©А.Ю. Кононюк, 2011

ISBN 966-96574-0-9

Оглавление

10. Методы оптимизации в планировании эксперимента….. 5
10.1. Интерпретация результатов……..5
10.2. Принятие решений после построения модели процесса…9
10.3. Построение интерполяционной формулы. Линейная модель неадекватна…… 19
10.4. Движение по градиенту…….. 22
10.5. Расчет крутого восхождения…….. 25
10.6. Реализация мысленных опытов……. 30
10.7. Крутое восхождение эффективно…….. 35
10.8. Крутое восхождение неэффективно…….. 41
10.9. Многоцелевая (многокритериальная) оптимизация…… 47
11. Другие методы оптимизации в планировании эксперимента…… 52
11.1. Симплекс-планирование…….. 52
11.2. Метод канонического преобразования и анализа поверхности отклика…… 58
11.3. Оптимизация свойств многокомпонентных материалов.. 62
12. Оптимизация испытаний в производственных условиях..88
12.1. Эволюционное планирование…… 88
12.2. Производственные испытания как этап производства…. 97
12.3. Методы минимизации продолжительности производственных испытаний…… 101
12.4. Регрессионно – временные модели……120
13. Примеры решения задач оптимизации при планировании эксперимента и классификация экспериментальных планов…… 127
13.1. Пример оптимизации параметров экстракционного разделения циркония и графия трибутилфосфатом……. 127
13.2. Пример оптимизации свойств многокомпонентного материала……144
13.3. О классификации экспериментальных планов…….. 153
14. Оптимальные планы выполнения эксперимента……173
14.1. Логика понятия эффективного эксперимента……..173
14.2. Формализация эффективногоэксперимента……189
14.3. Критерий оптимальности планов…… 198
14.4. Выбор оптимальных планов для полиномиальных моделей…….211
14.5. Оптимальность в планировании эксперимента для дискретных переменных……. 246
14.6. Выбор оптимальной стратегии в динамических задачах….263

14.7. Критерии оптимальности в отсеивающих экспериментах.. 269
15. Методы поиска новых научных и технических решений…287
15.1. Эвристика как наука…… 287
15.2. Коллективное творчество……294
15.3. Морфологический анализ. Программное решение технических задач……299
15.4. Ассоциативные методы……..302
15.5. Метод контрольных вопросов……307
15.6. Синектика……309
15.7.Комплексный метод поиска новых технических решений..312
15.8. Операторы…….. 323
15.9 Массивы информации…… 333
16. Информационный поиск, оформление и представление результатов научно-исследовательских работ. 340
16.1. Источники научно-технической информации…… 340
16.2. Универсальная десятичная классификация источников информации…… 349
16.3. Информационный поиск…… 358
16.4. Источники научно-технической информации…… 363
16.5. Патентный поиск…… 365
16.6. Технические средства поиска информации…… 368
16.7. Оформление и представление результатов научно-исследовательских работ……370
Приложения……381
Список литературы……436

10. Методы оптимизации в планировании эксперимента

10.1. Интерпретация результатов

Адекватная линейная модель, которой мы теперь располагаем, имеет вид полинома первой степени. Коэффициенты полинома являются частными производными функции отклика по соответствующим переменным. Их геометрический смысл — тангенсы углов наклона гиперплоскости к соответствующей оси. Больший по абсолютной величине коэффициент соответствует большему углу наклона и, следовательно, более существенному изменению параметра оптимизации при изменении данного фактора.

До сих пор мы употребляли абстрактный математический язык. ***Перевод модели на язык экспериментатора называется интерпретацией модели.***

Задача интерпретации весьма сложна. Ее решают в несколько этапов. Первый этап состоит в следующем. ***Устанавливается, в какой мере каждый из факторов влияет на параметр оптимизации. Величина коэффициента регрессии—количественная мера этого влияния. Чем больше коэффициент, тем сильнее влияет фактор***. О характере влияния факторов говорят знаки коэффициентов. Знак плюс свидетельствует о том, что с увеличением значения фактора растет величина параметра оптимизации, а при знаке минус — убывает. Интерпретация знаков при оптимизации зависит от того, ищем ли мы максимум или минимум функции отклика. Если $y \rightarrow \max$, то увеличение значений всех факторов, коэффициенты которых имеют знак плюс, благоприятно, а имеющих знак минус — неблагоприятно. Если же $y \rightarrow \min$, то, наоборот, благоприятно увеличение значений тех факторов, знаки коэффициентов которых отрицательны.

Далее выясняется, как расположить совокупность факторов в ряд по силе их влияния на параметр оптимизации. Факторы, коэффициенты которых незначимы, конечно не интерпретируются. Можно сказать только, что при данных интервалах варьирования и ошибке воспроизводимости они не оказывают существенного влияния на параметр оптимизации.

Изменение интервалов варьирования приводит к изменению коэффициентов регрессии. Абсолютные величины коэффициентов регрессии увеличиваются с увеличением интервалов, инвариантными к изменению интервалов остаются знаки линейных коэффициентов регрессии. Однако и они изменятся на обратные, если при движении по градиенту мы «проскочим» экстремум.

В некоторых задачах представляет интерес построение уравнения регрессии для натуральных значений факторов. Уравнение для натуральных переменных можно получить, используя формулу перехода. Коэффициенты регрессии изменятся. При этом пропадает возможность интерпретации влияния факторов по величинам и знакам коэффициентов регрессии. Вектор-столбцы натуральных значений переменных в матрице планирования уже не будут ортогональными, коэффициенты определяются зависимо друг от друга. Если же поставлена задача получения интерполяционной формулы для натуральных переменных, такой прием допустим.

Пример 1. Определение оптимальных условий ионнообменного разделения неодима и празеодима $y \rightarrow > \max$.

Здесь $\tilde{x}_1$ — концентрация промывающего раствора (элюанта), $\tilde{x}_2$ — pH этого же раствора, y — процентное содержание неодима в выходящем растворе — элюате.

После обработки экспериментальных данных получено уравнение регрессии

$$\hat{y} = 88{,}0 - 2{,}0x_1 - 4{,}5x_2, \quad s_{\{b_j\}} = 0{,}30.$$

К увеличению параметра оптимизации приводит уменьшение значений факторов. Подставим в уравнение регрессии разные кодированные значения факторов и посмотрим, при каких значениях факторов увеличивается параметр оптимизации.

Если подставить в уравнение значения $x_1 = +1$ и $x_2 = +1$, то получится

$$y = 88{,}0 - 2{,}0\ (+1) - 4{,}5\ (+1) = 81{,}5.$$

Теперь подставим значения $x_1 = -1$. и $x_2 = -1$

$$y = 88{,}0 - 2{,}0\ (-1) - 4{,}5\ (-1) = 94{,}5.$$

Уменьшение значений факторов действует благоприятно. Для увеличения параметра оптимизации нужно уменьшать значения факторов.

Запомните правило: ***если коэффициент регрессии отрицателен, то для увеличения параметра оптимизации надо уменьшать значение фактора, а если положителен, то увеличивать.***

При минимизации параметра оптимизации можно изменить знаки коэффициентов (кроме b_0) на обратные и поступать, как в первом случае.

Теперь мы получили основу для перехода к следующему этапу.

Априорные сведения дают некоторые представления о характере действия факторов. Источниками таких сведений могут служить теория изучаемого процесса, опыт работы с аналогичными процессами или предварительные опыты и т. д.

Если, например, ожидается, что с ростом температуры должно происходить увеличение параметра оптимизации, а коэффициент регрессии имеет знак минус, то возникает противоречие. Возможны две причины возникновения такой ситуации: либо в эксперименте допущена ошибка и он должен быть подвергнут ревизии, либо неверны априорные представления. Нужно иметь в виду, что ***эксперимент проводится в локальной области факторного пространства и коэффициент отражает влияние фактора только в этой области***. Заранее не известно, в какой мере можно распространить результат на другие области. Теоретические же представления имеют обычно более общий характер. Кроме того, априорная информация часто основывается на однофакторных зависимостях. При переходе к многофакторному пространству ситуация может изменяться. Поэтому мы должны быть уверены, что эксперимент проведен корректно. Тогда для преодоления противоречия можно выдвигать различные гипотезы и проверять их экспериментально. Эксперименты по проверке гипотез тоже следует планировать.

В тех, довольно редких, случаях, когда имеется большая априорная информация, позволяющая выдвигать гипотезы о механизме явлений, можно перейти к следующему этапу интерпретации. Он сводится к ***проверке гипотез о механизме явлений и выдвижению новых гипотез***.

Получение информации о механизме явлений не является обязательным в задачах оптимизации, но возможность такого рода следует использовать. Здесь особое внимание приходится уделять эффектам взаимодействия факторов. Как их интерпретировать?

Пусть в некоторой задаче взаимодействие двух факторов значимо и имеет положительный знак. Это свидетельствует о том, что одновременное увеличение, как и одновременное уменьшение, значений двух факторов приводит к увеличению параметра оптимизации (без учета линейных эффектов). Если эффект взаимодействия факторов x_1 и x_2 имеет отрицательный знак, то любая комбинация разных знаков x_1 и x_2 приводит к росту параметра оптимизации.

Запомните правило: ***если эффект взаимодействия имеет положительный знак, то для увеличения параметра оптимизации требуется одновременное увеличение или уменьшение значений факторов***, например сочетания: x_1=+1 и x_2=+1 или x_1=—1 и x_2 =—1. Для уменьшения параметра оптимизации факторы должны одновременно изменяться в разных направлениях, например x_1=+1 и x_2=—1 или x_1=—1 и x_2 = +1.

Если эффект взаимодействия имеет отрицательный знак, то для увеличения параметра оптимизации факторы должны одновременно изменяться в разных направлениях, например

$$x_1 = +1 \text{ и } x_2 = -1 \quad \text{или } x_1 = -1 \text{ и } x_2 = +1.$$

Для уменьшения параметра оптимизации требуется одновременное увеличение или уменьшение факторов, т. е.

$$x_1 = +1 \text{ и } x_2 = +1 \quad \text{или } x_1 = -1 \text{ и } x_2 = -1.$$

Отсюда видно, что интерпретация эффектов взаимодействия не так однозначна, как линейных эффектов. В каждом случае имеется два варианта. Какому из вариантов отдавать предпочтение? Прежде всего нужно учесть знаки линейных эффектов соответствующих факторов. Если эффект взаимодействия имеет знак плюс и соответствующие линейные эффекты отрицательны, то выбор однозначен: сочетание —1 и —1. Однако возможен случай, когда знаки линейных эффектов различны. Тогда приходится учитывать численные значения коэффициентов и жертвовать самым малым эффектом.

Иногда приходится учитывать технологические соображения: например, эксперимент в одной области факторного пространства дороже (или труднее), чем в другой.

Пример 2. Рассмотрим один из простейших примеров интерпретации, связанной с гипотезами о механизме действия факторов. Изучалось влияние трех факторов на выход сульфадимизина. По поводу влияния концентрации уксусной кислоты x_3 априори выдвигалась следующая гипотеза. Предполагалось, что уксусная кислота является растворителем, не участвующим в процессе. Из уравнения регрессии

$$\hat{y} = 85{,}975 + 2{,}588x_1 + 0{,}568x_2 + 1{,}125x_3 - 0{,}588x_1x_3 - 0{,}918x_2x_3, \quad (s_{\{b\}} = 0{,}28)$$

видно, что существенным оказался не только b_3, но также b_{13} и b_{23}. Этот факт ставит под сомнение первоначальную гипотезу, и можно предположить, что уксусная кислота активно участвует в процессе.

Упомянем еще об интерпретации эффектов взаимодействия высоких порядков. Если значимым оказался эффект взаимодействия трех факторов, например $x_1x_2x_3$, то его можно интерпретировать следующим образом. Этот эффект может иметь знак плюс, если отрицательные знаки будут у четного числа факторов (ноль или любые два). Знак минус будет, если нечетное число факторов имеет знак минус (все три или любой один). Это правило распространяется на взаимодействия любых порядков. Пользуются еще таким приемом. Произведение двух факторов условно считают одним фактором и сводят трехфакторное взаимодействие к парному и т. д.

Мы сказали, что интерпретация результатов — это перевод с одного языка на другой. Такой перевод обеспечивает взаимопонимание между статистиком и экспериментатором, работающими совместно над задачами оптимизации. Интерпретация уравнения регрессии важна не только для понимания процесса, но и для принятия решений при оптимизации.

10.2. Принятие решений после построения модели процесса

Решения, как правило, приходится принимать в сложных ситуациях. Решения зависят от числа факторов, дробности плана, цели исследования (достижение оптимума, построение интерполяционной формулы) и т. д. Количество возможных решений по примерной оценке достигает нескольких десятков тысяч. Поэтому мы будем рассматривать только наиболее часто встречавшиеся нам случаи и выделим «типичные» решения. Положение здесь сложнее, чем в случае принятия решений о выборе основного уровня и интервалов варьирования факторов, где удалется рассмотреть все варианты. Ситуации будем различать по ***адекватности и неадекватности модели, значимости и незначимости коэффициентов регрессии в модели, информации о положении оптимума***.

Обсудим сначала принятие решения для адекватного линейного уравнения регрессии.

Линейная модель адекватна. Здесь возможны три варианта ситуации:

1) все коэффициенты регрессии значимы;
2) часть коэффициентов регрессии значима, часть незначима;
3) все коэффициенты регрессии незначимы.

В каждом варианте оптимум может быть близко, далеко или о его положении нет информации (неопределенная ситуация).

Рассмотрим первый вариант.

Если область оптимума близка, возможны три решения: окончание исследования, переход к планам второго порядка и движение по градиенту.

Переход к планированию второго порядка дает возможность получить математическое описание области оптимума и найти экстремум. Хотя мы и не рассматриваем вопросы построения планов второго порядка, эту возможность надо также учитывать.

Движение по градиенту используется при малой ошибке опыта, поскольку на фоне большой ошибки трудно установить приращение параметра оптимизации.

Решение при неопределенной ситуации или удаленной области оптимума одно и то же: движение по градиенту.

Второй вариант — часть коэффициентов регрессии значима, часть незначима. Пока придется поверить, что движение по градиенту наиболее эффективно, если коэффициенты значимы. Поэтому выбираются решения, реализация которых приводит к получению значимых коэффициентов. На этом этапе важно выдвинуть гипотезы, объясняющие незначимость эффектов. Это может быть и неудачный выбор интервалов варьирования, и включение (из осторожности) факторов, не влияющих на параметр оптимизации, и большая ошибка опыта, и т. д. Решение зависит от того, какую гипотезу мы предпочитаем.

Если, например, выдвинута первая гипотеза, то возможно такое решение: расширение интервалов варьирования по незначимым факторам и постановка новой серии опытов. Изменение интервалов варьирования иногда сочетают с переносом центра эксперимента в точку, соответствующую условиям наилучшего опыта. Факторы, которые не влияют, стабилизируются и исключаются из дальнейшего рассмотрения.

Другие возможные решения для получения значимых коэффициентов: увеличение числа параллельных опытов и достройка плана.

Увеличение числа параллельных опытов приводит к уменьшению дисперсии воспроизводимости и соответственно дисперсии коэффициентов регрессии. Опыты могут быть повторены либо во всех точках плана, либо в некоторых.

Достройка плана осуществляется несколькими способами: *методом «перевала» — у исходной реплики изменяют знаки на обратные (в этом случае основные эффекты оказываются не смешанными с парными эффектами взаимодействия); переходом к полному факторному эксперименту; переходом к реплике меньшей дробности; переходом к плану второго порядка (если область оптимума близка).*

Реализация любого из этих решений требует значительных экспериментальных усилий. Поэтому иногда можно и не следовать строго правилу «двигайтесь по всем факторам», а пойти на некоторый риск и двигаться только по значимым факторам.

Наконец, если область оптимума близка, то возможно принятие таких же решений, как и в случае значимости всех коэффициентов регрессии.

Рассмотрим последний вариант: линейная модель адекватна, все коэффициенты регрессии незначимы (кроме b_0). Чаще всего это происходит вследствие большой ошибки эксперимента или узких

интервалов варьирования. Поэтому возможные решения направлены прежде всего на увеличение точности эксперимента и расширение интервалов варьирования. Увеличение точности, как вы уже знаете, может достигаться двумя путями: благодаря улучшению методики проведения опытов или вследствие постановки параллельных опытов.

Если область оптимума близка, то возможно также окончание исследования.

В заключение приведем схему принятия решения в задаче определения оптимальных условий, линейная модель адекватна (рис. 10.1).

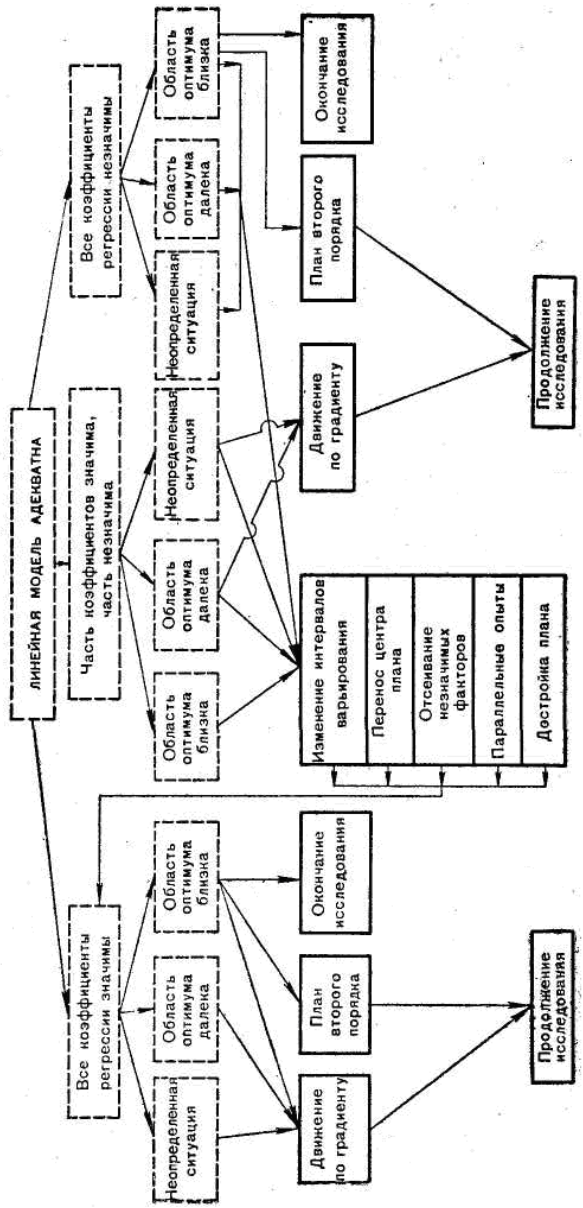


Рис. 10.1. Принятие решений в задаче определения оптимальных условий; линейная модель адекватна

В схеме пунктирными линиями обведены ситуации, сплошными линиями — принимаемые решения.

Пример 3. При определении оптимальных условий технологического процесса получения волокна из полипропилена в качестве независимых переменных были выбраны: $\tilde{x}_1$ — температура расплава, °С; $\tilde{x}_2$ — давление расплава, *кг/см²*; $\tilde{x}_3$ —скорость намотки на бобину, *м/мин;* $\tilde{x}_4$ —температура нагревателей, °С; $\tilde{x}_5$ — скорость вытягивания, *м/мин;* $\tilde{x}_6$ — кратность вытягивания.

Параметр оптимизации — прочность волокна. Условия, матрица планирования и результаты этих дорогостоящих и трудоемких опытов приведены в табл. 10.1

Таблица 10.1

Матрица планирования и результаты опытов

Уровень	Фактор						
	$\tilde{x}_1$	$\tilde{x}_2$	$\tilde{x}_3$	$\tilde{x}_4$	$\tilde{x}_5$	$\tilde{x}_6$	
Основной	300	50	2,40	150	0,35	7,2	
Интервал варьирования	10	7	0,47	5	0,12	0,3	
Верхний	310	57	2,87	155	0,47	7,5	
Нижний	290	43	1,93	145	0,23	6,9	
Опыты	**Кодированные значения факторов**						
	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	Отклик y
1	−1	−1	−1	−1	−1	−1	53,4
2	+1	−1	+1	−1	−1	+1	65,3
3	+1	−1	−1	+1	+1	−1	54,2
4	−1	+1	+1	−1	+1	−1	56,2
5	−1	+1	−1	+1	−1	+1	52,8
6	+1	+1	+1	+1	−1	−1	52,2
7	+1	+1	−1	−1	+1	+1	65,1
8	−1	−1	+1	+1	+1	+1	52,8

Здесь использована 1/8-реплика от полного факторного эксперимента 2^6 с генерирующими соотношениями $x_4=x_1x_2x_3$, $x_5=-x_1x_3$, $x_6=-x_2x_3$.

Получены следующие оценки коэффициентов регрессии и ошибки в их определении:

$$b_0 = 56{,}500, \quad b_3 = 0{,}125, \quad b_6 = 2{,}500,$$
$$b_1 = 2{,}700, \quad b_4 = -3{,}500, \quad s_{\{b\}} = 1{,}060.$$
$$b_2 = 0{,}0749, \quad b_5 = 0{,}575.$$

Линейное уравнение регрессии адекватно. Из шести коэффициентов регрессии три коэффициента (b_1, b_4, b_6) значимы. Информации о положении области оптимума нет.

Рассмотрим два варианта принятия решения:

1) движение по градиенту;

2) расширение интервалов варьирования.

Оценим первый вариант. Из шести коэффициентов регрессии только три оказались значимыми, так что движение может быть неэффективным. Далее применена 1/8-реплика от полного факторного эксперимента; смешанность эффектов высока, и не исключено, что оценки коэффициентов регрессии являются суммарными оценками нескольких значимых эффектов. С другой стороны, устранение незначимости линейных эффектов требует постановки новых опытов, а они длительны и дороги. В крутом восхождении мы рискуем напрасно поставить только 2—3 опыта. Поэтому решение о движении по градиенту кажется разумным.

В данном примере была принято решение о движении по градиенту.

Второй вариант — с помощью дополнительных опытов устранить незначимость эффектов. Действительно, только три коэффициента из шести оказались значимыми, эффекты смешаны довольно сильно: движение по градиенту может быть неэффективным. Поэтому решение об изменении интервалов варьирования кажется правильным. Единственное, что не учтено этим решением, — длительность и трудоемкость опытов. Изменение интервалов варьирования требует не менее восьми дополнительных опытов. Это трудно осуществить на практике.

Пример 4. В задаче ионообменного разделения неодима и празеодима получено адекватное уравнение регрессии:

$$\hat{y} = 88{,}0 - 2{,}0x_1 - 4{,}5x_2;\ s_{\{b\}} = 0{,}30.$$

Все коэффициенты регрессии значимы, область оптимума близка (наилучший опыт серии y_1=95%). Цель исследования — получение выхода 99—100%, число опытов лимитировано.

Варианты решения:

1) движение по градиенту;

2) окончание исследования;

3) переход к плану второго порядка.

Первый вариант — движение по градиенту. Это наиболее приемлемое решение. Несмотря на близость области оптимума, целесообразно увеличить выход на несколько процентов за счет реализации небольшого (2—3) числа опытов. Этой цели отвечает решение о

движении по градиенту, тем более что постановка плана второго порядка потребовала бы проведения еще не менее 5 опытов.

Второй вариант — исследование можно закончить. Закончить или продолжить исследование — решает экспериментатор, исходя из тех задач, которые перед ним стоят. Здесь представлялось важным увеличить выход на несколько процентов по сравнению с лучшим опытом серии (y_1=95%).

Третий вариант — следует переходить к планированию второго порядка. По условию задачи важно было увеличить выход за счет двух-трех опытов. Этому отвечает движение по градиенту.

В данной задаче было использовано движение по градиенту, расчет которого будет приведен дальше.

Остается только упомянуть о задаче построения интерполяционной формулы: ***цель исследования достигнута, если получена адекватная модель.***

Перейдем к следующему разделу — принятие решения в случае неадекватной линейной модели.

Линейная модель неадекватна. Если линейная модель неадекватна, значит не удается аппроксимировать поверхность отклика плоскостью. Формальные признаки (кроме величины F-критерия), по которым можно установить неадекватность линейной модели, следующие.

1. Значимость хотя бы одного из эффектов взаимодействия.
2. Значимость суммы коэффициентов регрессии при квадратичных членах $\sum\beta_{ii}$.

Оценкой этой суммы служит разность между b_0 и значением зависимой переменной в центре плана y_0. Если разность превосходит ошибку опыта, то гипотеза о незначимости коэффициентов при квадратичных членах не может быть принята. Однако надо учесть, что сумма может быть незначима и при значимых квадратичных эффектах, если они имеют разные знаки.

Для неадекватной модели мы не будем делать различия между случаями значимых и незначимых линейных коэффициентов регрессии, поскольку решения для них обычно совпадают.

Решения, принимаемые для получения адекватной модели: ***изменение интервалов варьирования факторов, перенос центра плана, достройка плана.***

Наиболее распространенный прием — изменение интервалов варьирования. Он, конечно, требует постановки новой серии опытов. Иногда отказываются от построения адекватной модели, чтобы ценой нескольких опытов проверить возможность движения по градиенту. Это решение нельзя считать достаточно корректным. Движению по

градиенту обычно предшествует оценка кривизны поверхности отклика (по сумме коэффициентов при квадратичных членах) и сопоставление величин линейных эффектов и эффектов взаимодействия. Если вклад квадратичных членов и эффектов взаимодействия невелик, то решение о движении по градиенту представляется возможным.

Еще одно решение: включение в модель эффектов взаимодействия и движение с помощью неполного полинома второго порядка. Этот прием связан с получением и анализом уравнений второго порядка. Направление градиента будет меняться от точки к точке.

Если область оптимума близка, то, как и в схеме рис. 10.1, возможны варианты окончания исследования и перехода к построению плана второго порядка. На рис. 10.2 приведена схема принятия решений в задаче оптимизации для случая, когда линейная модель неадекватна.

Пример 5. Оптимизировался процесс получения фармацевтического препарата (карбометоксисульфанилгуанидина). В качестве факторов были выбраны: $\tilde{x}_1$-отношение растворителя к основному веществу, *г/л;* $\tilde{x}_2$ - температура реакционной массы, °С; $\tilde{x}_3$ — время реакции, *мин.*

Параметр оптимизации — выход продукта в процентах. Условия, матрица планирования и результаты опытов приведены в табл. 10.2.

Получены следующие результаты:

$b_0 = 23{,}15$, $b_3 = 9{,}47$, $b_{23} = 3{,}64$, $s^2_{\{b\}} = 0{,}12$,

$b_1 = 1{,}92$, $b_{12} = 0{,}04$, $b_{123} = -0{,}87$, $s^2_{\{y\}} = 0{,}97$.

$b_2 = 10{,}35$, $b_{13} = -0{,}91$,

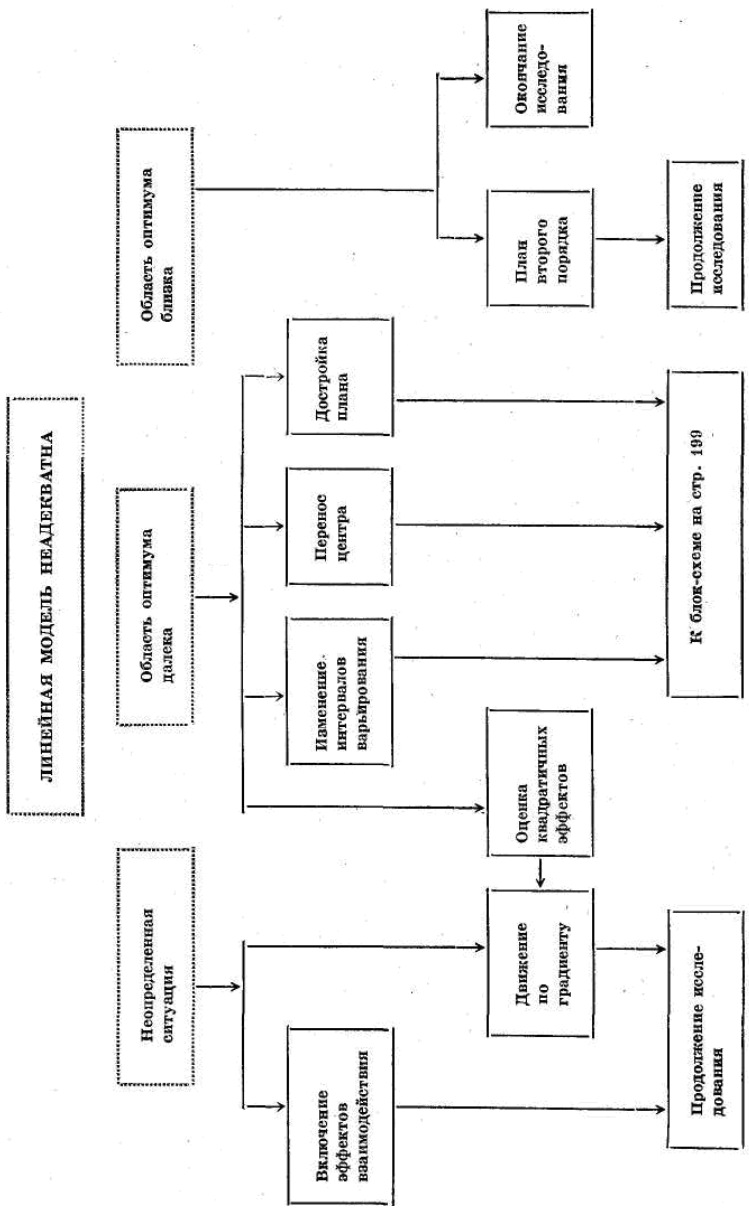


Рис. 10.2. Принятие решений в задаче определения оптимальных условий; линейная модель неадекватна

Линейное уравнение регрессии оказалось неадекватным: $F_{эксп}$=32,74 при табличном значении 4,12. Область оптимума далека.

Таблица 10.2

Матрица планирования и результаты опытов

Уровень	$\tilde{x}_1$	$\tilde{x}_2$	$\tilde{x}_3$	
Основной	0,7	135	30	
интервал варьирования	0,2	5	15	
Верхний уровень	0,9	140	45	
Нижний уровень	0,5	130	15	
Опыты	Кодированные значения факторов			
	x_1	x_2	x_3	y
1	+1	+1	+1	46,80
2	+1	−1	+1	20,47
3	−1	−1	+1	16,80
4	−1	−1	−1	5,08
5	+1	+1	−1	24,15
6	+1	−1	−1	8,89
7	−1	+1	−1	16,63
8	−1	+1	+1	46,45

Варианты решения:

1) постановка новой серии опытов, связанная с изменением интервалов варьирования и переносом центра;

2) движение по градиенту.

Изменение интервалов варьирования факторов и попытка получения адекватной модели — в данной ситуации вполне приемлемое решение. Интервалы варьирования нужно изменить по факторам x_2 и x_3. Изменение интервалов можно дополнить перенесением центра эксперимента в условия опытов 1 или 8, давших лучшие результаты.

Таким образом, это решение требует реализации еще восьми опытов.

Проанализируем второе вполне возможное решение. Три эффекта взаимодействия (b_{13}, b_{23}, b_{123}) оказались значимыми, так что постановка новой серии опытов с уменьшением интервалов варьирования представляется разумным решением. Но в то же время линейные эффекты не смешаны с эффектами взаимодействия, и их вклад в уравнение регрессии значительно превышает вклад взаимодействий. Напомним, что опыты дороги. Поэтому решение о проведении двух-трех опытов крутого восхождения более всего в данной ситуации соответствует цели достижения максимального выхода с минималь-

ными затратами, хотя и существует риск не получить улучшения результатов.

При выполнении этой работы исследователи выбрали движение по градиенту и улучшили результаты в два раза.

Особый случай возникает при использовании насыщенных планов. При значимости всех коэффициентов регрессии ничего нельзя сказать об адекватности или неадекватности модели. Движение по градиенту в такой ситуации показывает правильность предположения, что коэффициенты регрессии являются оценками для линейных эффектов. Остановимся теперь на задаче построения интерполяционной формулы.

10.3. Построение интерполяционной формулы. Линейная модель неадекватна

Первое, что следует сделать при решении этой задачи,— включить в уравнение эффекты взаимодействия. Такое решение возможно, если был применен ненасыщенный план. После введения эффектов взаимодействия может не хватать степеней свободы и потребуется реализация еще двух-трех опытов внутри области эксперимента для проверки гипотезы адекватности.

Все остальные способы построения интерполяционной формулы связаны с необходимостью проведения новых опытов. Один из них — достройка плана. Используются все те же приемы, что и при устранении незначимости коэффициентов регрессии: метод «перевала», достройка до полного факторного эксперимента, до дробной реплики, для которой ранее смешанные эффекты становятся «чистыми», достройка до плана второго порядка.

Есть еще один, хотя и не очень распространенный прием,— преобразование зависимых и независимых переменных, о котором упоминалось ранее. Наконец, если не удалось все-таки получить адекватную модель, то остается разбить область эксперимента на несколько подобластей и описать отдельно каждую из них. Это требует уменьшения интервалов варьирования факторов.

Приведем схему принятия решений в задаче построения интерполяционной формулы для случая, когда линейная модель неадекватна (рис.10.3). Если линейная модель адекватна, то задача решена.

Рис. 10.3. Принятие решений в задаче построения интерполяционной формулы; линейная модель неадекватна

Пример 6. В качестве факторов при построении математической модели ящичного экстрактора были выбраны: $\tilde{x}_1$ — диаметр турбинки, *мм;* $\tilde{x}_2$ — скорость вращения турбинки, *об/мин;* $\tilde{x}_3$ —температура, °С; $\tilde{x}_4$ — концентрация свободной кислоты в водном растворе, *гэкв/л;* $\tilde{x}_5$ — высота слоя жидкости в ячейке, *мм;* $\tilde{x}_6$ — соотношение фаз в эмульсии.

Параметр оптимизации — продолжительность полного расслаивания в мин. Условия, матрица планирования и результаты опытов приведены в табл. 10.3.

Использована ¼-реплика от полного факторного эксперимента 2^6. Линейное уравнение регрессии оказалось неадекватным. Затем были введены три несмешанных между собой эффекта взаимодействия факторов, имеющих наибольшую абсолютную величину

$$\hat{y} = 12{,}16 + 0{,}53x_1 + 0{,}53x_2 - 1{,}38x_3 - 3{,}22x_4 + 1{,}44x_5 - 0{,}62x_6 - \\ - 0{,}84x_1x_4 - 0{,}50x_1x_6 - 0{,}78x_2x_4.$$

Это уравнение адекватно описывает процесс $s_{\{y\}}=0{,}39$. Рассчитанное значение $F_{эксп}$=2,4 при табличном значении F=2,7. Уравнение было использовано при проектировании промышленного аппарата.

Это один из возможных приемов построения интерполяционной модели.

Таблица 10.3

Матрица планирования и результаты опытов

Уровень	$\tilde{x}_1$	$\tilde{x}_2$	$\tilde{x}_3$	$\tilde{x}_4$	$\tilde{x}_5$	$\tilde{x}_6$	
Основной	90	600	26	0,40	195	0,8115	
интервал варьирования	10	100	4	0,29	25	0,0975	
Верхний	100	700	30	0,69	220	0,909	
Нижний	80	500	22	0,11	170	0,714	

Опыты	Кодированное значение факторов						
	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	y
1	−1	+1	+1	+1	−1	−1	7,00
2	−1	−1	−1	−1	+1	−1	16,50
3	−1	−1	−1	+1	−1	−1	9,50
4	−1	−1	+1	+1	+1	+1	9,00
5	+1	+1	+1	+1	+1	+1	7,75
6	+1	−1	−1	+1	+1	+1	10,75
7	−1	+1	−1	+1	+1	+1	11,50
8	+1	−1	−1	−1	−1	+1	13,25
9	+1	+1	−1	+1	−1	−1	8,50
10	−1	+1	+1	−1	+1	−1	14,00
11	−1	−1	+1	−1	−1	+1	9,25
12	+1	−1	+1	−1	+1	−1	17,25
13	+1	+1	+1	−1	−1	+1	14,50
14	+1	+1	−1	−1	+1	−1	22,00
15	−1	+1	−1	−1	−1	+1	16,25
16	+1	−1	+1	+1	−1	−1	7,50

Подведем некоторые промежуточные итоги.

Перевод модели с абстрактного математического языка на язык экспериментатора мы назвали интерпретацией модели. Интерпретация — сложный процесс, который проводится в несколько этапов. Он включает оценку величины и направления влияния отдельных факторов и их взаимодействий, сопоставление влияния совокупности факторов, проверку правильности априорных представлений и в некоторых случаях проверку и выдвижение гипотез о механизме процесса.

Сочетание возможных действий с различными экспериментальными ситуациями приводит к десяткам тысяч возможных решений. Поэтому обсуждаются только «типичные » решения. Ситуации различаются по

адекватности и неадекватности модели, значимости и незначимости коэффициентов регрессии, положению оптимума.

Для линейной адекватной модели со значимыми коэффициентами регрессии возможны: движение по градиенту, план второго порядка, окончание исследования. Если часть коэффициентов регрессии незначима, то возможен выбор одного из решений, позволяющих получать коэффициенты регрессии значимыми: изменение интервалов варьирования, перенос центра плана, отсеивание незначимых факторов, параллельные опыты, достройка плана. Кроме того, остается движение по градиенту, а если область оптимума близка, то реализация плана второго порядка или окончание исследования.

Наконец, если все коэффициенты незначимы, то выбираются решения по реализации плана второго порядка или окончанию исследования (область оптимума близка) либо решения, позволяющие получать значимые коэффициенты регрессии (область оптимума далека и неопределенная ситуация).

Линейная модель неадекватна. Если область оптимума близка, то исследование либо заканчивается, либо реализуется план второго порядка. Такие решения, как изменение интервалов варьирования, перенос центра плана, достройка плана, движение по градиенту, применяются при любом положении оптимума. Возможно включение в модель эффектов взаимодействия факторов и движение с помощью неполного полинома второго порядка, а также оценка квадратичных эффектов для получения информации о кривизне поверхности отклика перед движением по градиенту.

Наконец, если поставлена задача построения интерполяционной формулы, то на получении адекватной модели исследование заканчивается, а в случае неадекватной модели принимается одно из следующих решений: включение в модель эффектов взаимодействия, достройка плана, преобразование переменных, изменение интервалов варьирования.

Решения, которые обсуждались выше, направлены на то, чтобы обеспечить эффективное движение по градиенту. Посмотрим, как на практике осуществить это движение.

10.4. Движение по градиенту

На рис. 10.4 изображены кривые равного выхода поверхности отклика для двух независимых переменных. Они подобны линиям равной высоты на географических картах. Поверхность отклика имеет вид холма с вершиной в точке «О». Если попытаться попасть в окрестность этой точки из точки *А* с помощью одного из вариантов

однофакторного эксперимента, то мы сначала должны стабилизировать первый фактор, например x_1, и изменять в направлении AC второй фактор до тех пор, пока увеличивается выход. За точкой C выход падает, и поэтому в ней стабилизируем x_2 и изменяем x_1 в направлении CD по такому же правилу и т. д.

Этот путь к вершине довольно извилист. Он становится еще более трудоемким при возрастании числа независимых переменных. Наиболее короткий путь к вершине — направление градиента функции отклика.

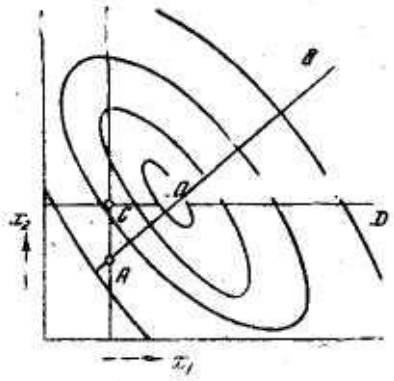


Рис. 10.4. Движение по поверхности отклика методами однофакторного эксперимента и градиента

На рис. 10.4 это направление AB, перпендикулярное линиям уровня. Градиент непрерывной однозначной функции φ есть вектор

$$\nabla\varphi = \frac{\partial\varphi}{\partial x_1} i + \frac{\partial\varphi}{\partial x_2} j + \ldots + \frac{\partial\varphi}{\partial x_k} k,$$

где $\nabla\varphi$ — обозначение градиента, $d\varphi/dx_i$ — частная производная функции по i-му фактору, ***i, j, k*** — единичные векторы в направлении координатных осей.

Следовательно, составляющие градиента суть частные производные функции отклика, оценками которых являются, как мы уже говорили, коэффициенты регрессии.

Изменяя независимые переменные пропорционально величинам коэффициентов регрессии, мы будем двигаться в направлении градиента функции отклика по самому крутому пути. Поэтому процедура движения к почти стационарной области называется *крутым восхождением.*

Величины составляющих градиента определяются формой поверхности отклика и теми решениями, которые были приняты при выборе параметра оптимизации, нулевой точки и интервалов варьирования. Знак составляющих градиента зависит только от формы поверхности отклика и положения нулевой точки (рис. 10.5).

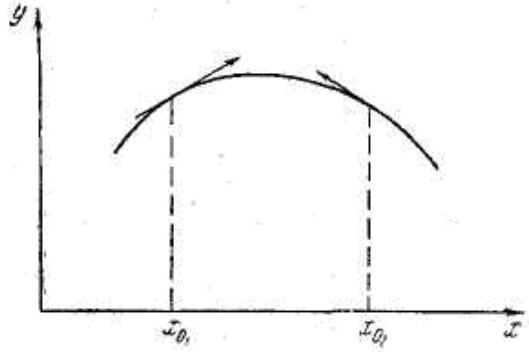


Рис. 10.5. Зависимость знака градиента от формы поверхности и положения нулевой точки

Пусть интервал варьирования некоторого значимого фактора равен 10 единицам. Посмотрим, изменится ли составляющая градиента, если в качестве единицы измерения воспользоваться вначале миллиметром, а затем дюймом. Переход от миллиметров к дюймам эквивалентен значительному увеличению интервала варьирования: 1 дюйм, как известно, равен 25,4 *мм.*

В первом случае интервал варьирования равнялся 10 *мм,* а во втором — 25,4 *мм.* Такое изменение интервала варьирования не может не иметь последствий для значимого фактора. Сильно увеличится коэффициент регрессии и вместе с ним — составляющая градиента.

В большинстве задач выбор размерности не является проблемой. Этот выбор определяется характером задач, традициями и существующей системой мер и измерительных приборов. Когда размерность фиксирована, то все ясно. Однако важно помнить, что размерность влияет на величины составляющих градиента, а их знаки инвариантны относительно изменения масштабов.

Итак, для данной поверхности отклика выбраны нулевая точка и интервалы варьирования, проведен эксперимент и найдены оценки коэффициентов регрессии. После этого направление градиента задается однозначно и является единственным. При этом предполагается, что имеется только один оптимум.

Рассмотрим расчет направления градиента.

10.5. Расчет крутого восхождения

Технику расчета крутого восхождения удобно рассмотреть на простейшем примере в случае одного фактора (рис. 10.6).

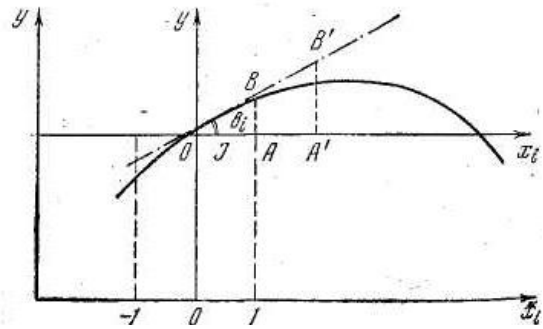


Рис**.** 10.6. Расчет координат точек в направлении градиента

Значение коэффициента регрессии равно тангенсу угла между линией регрессии и осью данного фактора. Если его умножить на интервал варьирования, который является прилежащим катетом прямоугольном треугольнике *OAB,* то получится противолежащий катет *AB,* который и дает координаты точки, лежащей на градиенте.

Обобщение на случай k факторов делается механически, так как все эффекты независимы друг от друга. Существенно только соотношение произведений коэффициентов на соответствующие интервалы. Их абсолютные величины могут все одновременно умножаться или делиться на любое положительное число. При этом получаются точки, лежащие на том же градиенте, но с другим шагом. Эта процедура заключается в том, чтобы к нулевому уровню последовательно алгебраически прибавлять величины, пропорциональные составляющим градиента.

Сразу возникает вопрос: как выбрать шаг движения по градиенту? Это еще один этап, для которого не существует формализованного решения. Небольшой шаг потребует значительного числа опытов при движении к оптимуму, большой шаг увеличивает вероятность проскока области оптимума. Во всяком случае, аналогично выбору интервалов варьирования, нижняя граница задается возможностью фиксирования двух соседних опытов, а верхняя— областью определения фактора. Для облегчения работы шаги обычно округляют.

На расчет градиента не оказывает влияние b_0. Для качественных факторов на двух уровнях либо фиксируется лучший уровень, либо градиент реализуется дважды для каждого уровня в отдельности.

Незначимые факторы стабилизируются на любом уровне в интервале +1. Если нет специальных соображений, то выбирают нулевой уровень. Если же по экономическим соображениям, например, выгодно поддерживать нижний уровень, то выбирают его. В движении по градиенту эти факторы не участвуют .

Рассмотрим пример расчета крутого восхождения для процесса ионообменного разделения смеси редкоземельных элементов.

Пример 1. В табл. 10.4 приведены условия, матрица планирования и результаты серии опытов, а также расчет крутого восхождения.

Таблица 10.4

Матрица планирования, результаты и расчет крутого восхожде

Уровень	$\tilde{x}_1$	$\tilde{x}_2$	
Основной	1,5	7,0	
Интервал варьирования	0,5	1,0	
Верхний	2,0	8,0	
Нижний	1,0	6,0	
Опыты	**Кодированные значения факторов**		
	x_1	x_2	y^*
1	−1	−1	95,0
2	+1	−1	90,0
3	−1	+1	85,0
4	+1	+1	82,0
b_j	−2,0	−4,5	
$b_j \times I_j$	−1,0	−4,5	
Шаг при изменении $\tilde{x}_2$ на 0,5	−0,11	−0,5	
Округление	−0,1	−0,5	
Опыты			
5	1,4	6,5	
6	1,3	6,0	
7	1,2	5,5	
8	1,1	5,0	
9	1,0	4,5	

* Среднее значение из двух параллельных опытов.

Этапы расчета крутого восхождения.

1. Расчет составляющих градиента.

$$b_1 \times I_1 = -1,0, \qquad b_2 \times I_2 = -4,5.$$

Теперь мы должны прибавлять составляющие градиента к основному уровню факторов. Берем условия опыта № 5: $\tilde{x}_1$=0,5, $\tilde{x}_2$=2,5. В опыте

№ 6 факторы имеют уже нереальные значения, следовательно, можно сделать вывод, что шаг движения велик.

2. Воспользуемся условием: умножение составляющих градиента на любое положительное число дает точки, также лежащие на градиенте. В данной задаче удобно изменять pH ($\tilde{x}_2$) на 0,5, т. е. уменьшить составляющую градиента в 9 раз. Во столько же раз уменьшается и составляющая градиента по первому фактору (—0,11). Изменению составляющих градиента соответствует в табл. 10.4 строка: шаг при изменении $\tilde{x}_2$ на 0,5. Наконец, методы анализа позволяют задавать значение $\tilde{x}_1$ с точностью до одного знака после запятой, шаг по этому фактору округляется.

3. Последний этап расчета: последовательное прибавление составляющих градиента к основному уровню. Получаем серию опытов крутого восхождения (в табл. 10.4 — опыты 5—9). Эти опыты часто называют мысленными.

Если бы мы признали разумным изменить фактор $\tilde{x}_1$ на — 0,20, то правильно ли рассчитана серия опытов крутого восхождения?

Опыты	$\tilde{x}_1$	$\tilde{x}_2$
5	1,3	6,0
6	1,1	5,0
7	0,9	4,0
8	0,7	3,0
9	0,5	2,0

Составляющая градиента уменьшилась по первому фактору в 1,0/0,2=5 раз. Во столько же раз уменьшилась составляющая градиента по второму фактору (-4,5/5=-09), или, округляя эту величину, имеем шаг по второму фактору —1,0. Опыты 5—9 (см. выше) как раз и получены прибавлением $\tilde{x}_1$=—0,2 и $\tilde{x}_2$=—1,0 к основным уровням факторов. Таким образом, расчет сводится к тому, чтобы выбрать шаг движения по одному из факторов и пропорционально произведениям коэффициентов регрессии на интервалы варьирования рассчитать шаги по другим факторам. Иногда имеет смысл оценить ожидаемые значения параметра оптимизации в мысленных опытах. Проведем расчет для опыта № 7 крутого восхождения (табл. 10.4). Мы собираемся для оценки параметра оптимизации использовать уравнение регрессии:

$$\hat{y} = 88{,}0 - 2{,}0x_1 - 4{,}5x_2.$$

Однако в табл. 10.4 приведены натуральные значения факторов, а в уравнении применяются кодированные значения. Поэтому необходимо перевести натуральные значения в кодированные. Кодированные

величины получаются с помощью уже известной нам формулы:

$$x_j=(\tilde{x}_j-\tilde{x}_{j0})/I_j,$$

x_1=—6,0, x_2=—1,5. Подставляя эти значения в уравнение регрессии, получим $\hat{y}_7$=95,95 ($\hat{y}$ —так обозначают предсказанную по уравнению регрессии величину зависимой переменной). Аналогично для опыта № 8 x_1=—0,8; x_2=— 2,0 и $\hat{y}_8$=98,6. Экспериментально полученные значения могут не совпадать с расчетными: величины независимых переменных выходят за область эксперимента.

Рассмотрим еще один пример по расчету крутого восхождения для процесса экстракции гафния трибутилфосфатом.

Пример 2. В табл. 10.5 так же, как и в табл. 10.4, приведена стандартная форма представления условий, матрицы планирования и результатов опытов вместе с крутым восхождением.

Таблица 10.5

Матрица планирования, результаты опытов и крутое восхождение

Уровень	Факторы				
	$\tilde{x}_1$	$\tilde{x}_2$	$\tilde{x}_3$	$\tilde{x}_4$	
Основной	3,0	30	1,5 : 1	15	
Интервал варьирования	2,0	10	1,0	10	
Верхний	5,0	40	2,5 : 1	25	
Нижний	1,0	20	0,5 : 1	5	
Опыты	Кодированные значения факторов				Отклик $y \cdot 10^2$*
	x_1	x_2	x_3	x_4	
1	—1	—1	—1	—1	2,060
2	+1	—1	+1	—1	3,400
3	—1	—1	+1	+1	3,095
4	—1	+1	—1	+1	4,995
5	+1	+1	—1	—1	15,150
6	+1	—1	—1	+1	9,225
7	—1	+1	+1	—1	8,250
8	+1	+1	+1	+1	5,995
b_j	0,0195	0,02030	—0,0137	—0,0066	
$b_j \times I_j$	0,0390	0,203	—0,0137	—0,066	
Шаг при изменении $\tilde{x}_2$ на 5	0,9605	5	—0,3399	—1,6256	
Округление	1,0	5,0	—0,3	—2,0	
9	4,0	35,0	1,2 : 1	13	
10	5,0	40,0	0,9 : 1	11	
11	6,0	45,0	0,6 : 1	9	
12	7,0	50,0	0,3 : 1	7	
13	8,0	55,0	0 : 1	5	
14	9,0	60,0	—	3	

* Среднее значение из двух параллельных опытов, рандомизированных во времени.

Остались нерассмотренными два момента: как влияют на крутое восхождение соотношения численных значений коэффициентов регрессии и почему движение по градиенту начинается из нулевой точки.

Представим себе, что в адекватном линейном уравнении значим только один коэффициент. Тогда в движении по градиенту будет участвовать только один фактор. Многофакторная задача выродится в однофакторную. А это менее эффективно. Рассмотренный случай является крайним, но в практике довольно часто *b*-коэффициенты существенно различаются между собой, оставаясь значимыми.

Функция, величины коэффициентов которой различаются не существенно, называется симметричной относительно коэффициентов. Движение по градиенту для симметричной функции наиболее эффективно. Удачным выбором интервалов варьирования можно сделать симметричной любую линейную функцию для значимых факторов.

На первом этапе планирования не всегда удается получить симметричную функцию. Если функция резко асимметрична (коэффициенты различаются на порядок), то выгоднее вновь поставить эксперимент, изменив интервалы варьирования, а не двигаться по градиенту. Так, в примере 2 после первой серии опытов получено следующее уравнение регрессии:

$$\hat{y} \cdot 10^3 = 22{,}48 - 1{,}01x_1 + 19{,}46x_2 + 1{,}46x_3 - 1{,}05x_4.$$

Здесь b_2 на порядок превышает остальные коэффициенты, которые статистически незначимы. Это связано скорее с неудачным выбором интервалов варьирования, чем с отсутствием соответствующих эффектов. Движение по градиенту нецелесообразно. Решение увеличить вдвое интервал варьирования незначимых факторов привело к такому результату:

$$\hat{y} \cdot 10^3 = 65{,}5 + 19{,}5x_1 + 20{,}3x_2 - 13{,}7x_3 - 6{,}6x_4.$$

На этот раз функция оказалась симметричной, и было реализовано крутое восхождение.

Направление градиента определяется единственным способом, и движение должно начинаться из нулевой точки. На рис. 10.7 приведена простая геометрическая иллюстрация этого факта.

Хорошо видно, что движение из наилучшей точки плана проходит в стороне от оптимальных условий.

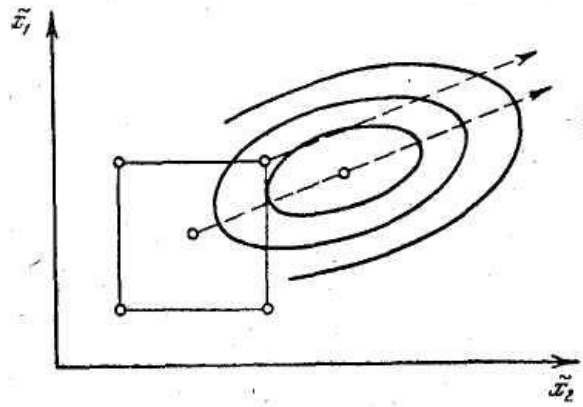


Рис**.** 10.7. Движение по градиенту из нулевой и из наилучшей точек плана

Можно рассуждать иначе. Функция отклика, вид которой нам неизвестен, разлагалась в ряд Тейлора в окрестности нулевой точки. Именно к этой точке и относится оценка градиента.

Итак, мы узнали, как производится расчет градиента. Перейдем теперь к практической реализацией опытов в направлении градиента.

10.6. Реализация мысленных опытов

Рассчитав составляющие градиента, мы получили условия мысленных опытов. Число мысленных опытов зависит от задачи. Ограничением сверху служит граница области определения хотя бы по одному из факторов. Иногда по технологическим соображениям нет смысла определять условия многих опытов. Обычно рассчитывается 5—10 мысленных опытов.

Как реализовать мысленные опыты? Нужно ли ставить все опыты подряд или только некоторые из них? С какого опыта начинать? Если модель адекватна, то начинают реализацию с тех опытов, условия которых выходят за область эксперимента хотя бы по одному из факторов. Для неадекватной модели часто один-два опыта выполняют в области эксперимента. Для мысленных опытов процесса ионообменного разделения (табл. 10.4) имеет смысл ставить эксперимент начиная с опыта № 7 ($\tilde{x}_1$=1,2, $\tilde{x}_2$=5,5). Этот опыт по фактору x_2 уже выходит за пределы области эксперимента.

Если начинать реализацию мысленных опытов с опыта № 5, условия которого $\tilde{x}_1$=1,4, $\tilde{x}_2$=6,5, то значения факторов для этого опыта

находятся внутри области эксперимента (основной уровень $\tilde{x}_1$=1,5, $\tilde{x}_2$=7,0; I_1=0,5, I_2=1,0). Так как модель адекватна, то значение параметра оптимизации для этого опыта можно получить просто расчетом $\hat{y}_1$=90,65.

Условия мысленных опытов следует тщательно обдумать и убедиться, что нет затруднений в их реализации. Если что-то не ладится, можно изменить шаг и рассчитать мысленные опыты заново.

Существует две принципиально различные стратегии реализации мысленных опытов. Все намеченные к реализации опыты ставятся одновременно либо последовательно по некоторой программе. Одновременно могут ставиться все мысленные опыты, через один, через два и т. д. Последовательный принцип заключается в том, что вначале ставятся два-три опыта, анализируются результаты и принимается решение о постановке новых опытов. Выбор стратегий определяется стоимостью опытов, их длительностью и условиями экспериментирования.

Представим себе задачу, в которой опыт длится несколько месяцев, но одновременно можно поставить довольно большое число опытов. При последовательной стратегии реализация мысленных опытов надолго затягивается. Выгоднее реализовать сразу все намеченные опыты. Это характерно для сельскохозяйственных, биологических, металлургических задач и т. д.

Преимущество одновременной реализации опытов в том, что эта стратегия исключает временной дрейф.

Когда опыты быстры и дешевы, эта стратегия вполне пригодна. А если опыты дороги, приходится пользоваться последовательной стратегией, так как минимизация числа опытов приобретает большую актуальность.

Имеется несколько вариантов последовательной стратегии. Можно реализовать опыты по одному и после каждого анализировать результаты. Другой путь — ставятся одновременно два-три опыта и затем принимаются решения.

При незначительном изменении параметра оптимизации (поверхность пологая) следующим реализуется далеко отстоящий опыт, при сильном изменении (поверхность крутая) — близлежащий.

Иногда пользуются методом «ножниц»: реализуются два крайних мысленных опыта, а затем прощупывается пространство внутри этого интервала. Минимальное число опытов — три, так как оптимум необходимо захватить «в вилку». Два опыта могут оказаться достаточными, когда координаты оптимума близки к координатам

опытов исходного плана или же когда попытка продвинуться по неадекватной модели оказывается неудачной.

Крутое восхождение может считаться эффективным, если хотя бы один из реализованных опытов даст лучший результат по сравнению с наилучшим опытом серии. Например, наилучший опыт № 5 в серии (табл. 10.5) y_5=15,1, а реализованный опыт №10 y_{10}=30,4, следовательно, крутое восхождение эффективно. Затем из всех реализованных опытов выбирается тот, который дал лучший результат, и его условия принимаются за основной уровень факторов в следующей серии опытов. Если в одном из реализованных опытов достигнуты оптимальные условия, то эксперимент заканчивается.

В процессе получения волокна из полипропилена крутое восхождение привело к следующим результатам: y_9=60,1; y_{10}=59,7; y_{11}=57,8; y_{12}=55,3. Средний выход в серии опытов b_0=56,5, максимальный выход — y=65,3.

При последовательном поиске можно было бы сократить число опытов. Действительно, уже первый опыт не дал улучшения результатов. Однако возражений против проведения второго или даже третьего опытов нет. Четвертый опыт, видимо, уже не нужен.

Таким образом, вместо четырех опытов достаточно было провести два-три.

Рассмотрим два примера движения по градиенту.

Пример 3. Оптимизация процесса получения карбометоксисульфанил-гуанидина (табл. 10.6).

Таблица 10.6

Крутое восхождение при оптимизации процесса получения карбометоксисульфанилгуанвдина

Условия движения по градиенту	Факторы			Отклик y
	$\tilde{x}_1$	$\tilde{x}_2$	$\tilde{x}_3$	
$b_j \times I_j$	0,356	51,51	140,40	
Шаг при изменении $\tilde{x}_2$ на 5	0,0368	5	14,30	
Округление	0,03	5	14,00	
Опыты				
9	0,73	140	44	—
10	0,76	145	58	—
11	0,79	150	72	66,70
12	0,82	155	86	—
13	0,85	160	100	72,50
14	0,88	165	114	68,40

Крутое восхождение оказалось весьма эффективным: средний выход в предыдущей серии опытов b_0=23,28, максимальный выход y=46,80 .

Пример 4. Оптимизация процесса получения производного пиперазина (табл. 10.7). Это крутое восхождение оказалось также очень эффективным. В опыте № 12 выход целевого продукта равен 74,3%, что на 20% выше выхода в нулевой точке. Однако, крутое восхождение бывает столь эффективным не всегда

Таблица 4.7

Крутое восхождение

Условия движения по градиенту	Факторы					
	$\tilde{x}_1$	$\tilde{x}_2$	$\tilde{x}_3$	$\tilde{x}_4$	$\tilde{x}_5$	y, %
$I_j \times b_j$	2,025·0,25= =−0,506	5,05·0,25=1,26		−2,10·5= =−10,5		
Шаг при $\tilde{x}_4$=−2	−0,0963	0,24		−2		
Округление	0,09	0,25	—	−2		
Нулевой уровень	1,25	1,25	4,00	25	40	55,0
Опыты						
9	1,16	1,50	4,00	23	40	—
10	1,07	1,75	4,00	21	40	—
11	0,98	2,00	4,00	19	40	68,8
12	0,89	2,25	4,00	17	40	74,3
13	0,80	2,50	4,00	15	40	66,8

Эти примеры иллюстрируют захват оптимума «в вилку».

Остановимся на некоторых особенностях реализации опытов крутого восхождения.

Рассмотрим следующую ситуацию. При эффективном крутом восхождении достигается граница области определения одного из факторов. По этому фактору дальше двигаться нельзя. Возможны два решения: зафиксировать значение этого фактора и дальше двигаться по остальным или остановиться и поставить новую серию опытов линейного приближения. На практике чаще предпочитают первое решение. В этом случае нужно продолжить расчет мысленных опытов и выбрать стратегию их реализации.

Особого рассмотрения заслуживает постановка повторных опытов. Чаще всего повторные опыты не ставятся, а дублируется только наилучший результат. Будет, конечно, не хуже, если ставить параллельные опыты во всех точках.

Иногда приходится считаться с возможностью временного дрейфа. Ведь между исходной серией опытов и движением по градиенту может пройти значительное время. Здесь можно рекомендовать систематическое повторение нулевых точек исходного плана,

рандомизированных с точками крутого восхождения. Это дает возможность проверить гипотезу о наличии дрейфа.

При движении по градиенту возможны пять ситуаций, схематично представленных на рис. 10.8.

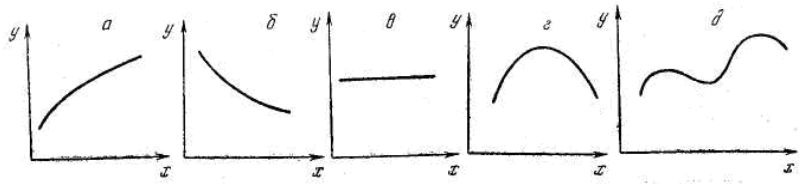


Рис. 10.8. Ситуации при движении по градиенту

Наиболее благоприятные случаи даны на рис. 10.8, *а, г* и *д,* где движение по градиенту оказалось эффективным. В случае *а* параметр оптимизации все время возрастает, в случае *г* он проходит через максимум, что было проиллюстрировано примерами 3 и 4. Более сложным является случай *д,* где нарушена предпосылка одноэкстремальности.

Случай *б* иллюстрирует неэффективное крутое восхождение. Вместо ожидаемого увеличения параметра оптимизации наблюдается уменьшение. Здесь либо план эксперимента расположен в области оптимума, либо есть грубые ошибки.

Наконец, в случае *в* все опыты на градиенте дают одно и то же значение. Поверхность отклика имеет вид постоянного гребня.

В соответствии с шаговым принципом «ползания» по поверхности отклика крутое восхождение может осуществляться многократно, пока не будет достигнута почти стационарная область.

Принятие решений после крутого восхождения, которое мы рассмотрим ниже, зависит от рассмотренных выше ситуаций.

Мы познакомились с крутым восхождением по поверхности отклика. Крутое восхождение — это движение в направлении градиента функции отклика. Градиент задается частными производными, а частные производные функции отклика оцениваются коэффициентами регрессии. В крутом восхождении независимые переменные изменяют пропорционально величинам коэффициентов регрессии и с учетом их знаков. Составляющие градиента однозначно получаются умножением коэффициентов регрессии на интервалы варьирования по каждому фактору. Серия опытов в направлении градиента рассчитывается последовательным прибавлением к основному уровню факторов величин, пропорциональных составляющим градиента.

Реализацию мысленных опытов для адекватной модели начинают с опыта, условия которого выходят за область эксперимента хотя бы по одному из факторов. Для неадекватной модели один-два опыта выполняют в области эксперимента. Возможно проведение сразу всех мысленных опытов. Более экономная процедура состоит в проведении двух-трех опытов, оценке результатов и принятии решений о прекращении или дальнейшем проведении экспериментов (последовательный поиск). При движении по градиенту возникают различные ситуации, определяющие принятие дальнейших решений.

После завершения крутого восхождения вас ожидают довольно разнообразные ситуации, требующие принятия решений о дальнейших действиях.

Ситуации различаются по признаку: оказалось крутое восхождение эффективным или нет. Положение оптимума (близко, далеко, неопределенно) также имеет значение в принятии решений. В некоторых случаях нужно учитывать адекватность (или неадекватность) линейной модели.

4.7. Крутое восхождение эффективно

Об эффективности движения по градиенту можно судить по величине параметра оптимизации. Движение по градиенту считается эффективным, если реализация мысленных опытов, рассчитанных на стадии крутого восхождения, приводит к улучшению значения параметра оптимизации по сравнению с самым хорошим результатом в матрице.

При эффективном крутом восхождении возможны два исхода: область оптимума достигнута или область оптимума не достигнута.

Область оптимума достигнута. Этот случай является самым легким в смысле принятия решений. Экспериментатор может окончить исследование, если задача заключалась в достижении области оптимума, или продолжить исследование, если задача заключалась не только в достижении области оптимума, но и в детальном ее изучении. При этом необходимо достроить линейный план до плана второго порядка и результаты эксперимента представить в виде полинома второй степени. Перечисленные два варианта принятия решений следуют из концепции Бокса— Уилсона, согласно которой задача оптимизации условно разбивается на два этапа.

Первый этап *— крутое восхождение с целью скорейшего достижения области оптимума*. При этом используется линейное планирование. Линейный план может использоваться один или несколько раз в зависимости от интенсивности продвижения.

Второй этап *— описание области оптимума методами нелинейного планирования.*

При эффективном крутом восхождении весьма часто удается быстро приблизиться к области оптимума (совершить крутое восхождение один раз). Исследователь попадает в область оптимума, которая не может быть описана линейным приближением, и движение по методу крутого восхождения заканчивается. Завершается первый этап оптимизации. Метод крутого восхождения не решает вопроса о самой лучшей точке поверхности отклика, об экстремуме. Чтобы изучить область оптимума, необходимо перейти ко второй стадии планирования — к исследованию почти стационарной области. В принятии решений мы должны рассматривать и этот вариант.

Область оптимума не достигнута. В этом случае ставится линейный план следующего цикла и исследование продолжается.

Выше было приведено крутое восхождение (первый цикл) для процесса получения карбометоксисульфанилгуанидина. Оно привело к увеличению выхода реакции до 72,5%. Предполагается, что при удачном подборе условий реакции выход может быть повышен до 95—97%.

Возможные варианты решений:

1) окончить исследование;

2) построить план второго порядка для исследования области оптимума;

3) построить линейный план следующего цикла крутого восхождения.

Первые два варианта кажутся нецелесообразными, выход реакции может быть повышен, при удачном подборе условий реакции, до 95—97 %. На стадии крутого восхождения получено только 72,5%. Можно предположить, что имеется резерв более чем в 20%. Поставленная цель не достигнута. Область оптимума достаточно далека.

Решение построить линейный план следующего цикла представляется наиболее целесообразным. Нужно попытаться второй раз совершить крутое восхождение и приблизиться к области оптимума. Такое решение и было принято экспериментатором. При построении линейного плана второго цикла прежде всего возникает вопрос о выборе центра эксперимента. Самая простая рекомендация — расположить центр нового плана в той части факторного пространства, которая соответствует условиям наилучшего опыта при крутом восхождении.

Пример 1. Оптимизируем процесс получения карбометоксисульфанилгуанидина. (матрица планирования первого цикла приведена в табл. 10.2, крутое восхождение — в табл. 10.6).

Крутое восхождение первого цикла привело к увеличению выхода реакции до 72,5%. Увеличение выхода явилось следствием повышения температуры и возрастания времени реакции. Это учитывалось при выборе локальной области факторного пространства во второй цикле планирования.

Что же касается первого фактора (отношения количества растворителя к количеству основного вещества), то этот фактор изменялся на стадии крутого восхождения наиболее медленно. И действительно, коэффициент b_1 значительно меньше b_2 и b_3 (b_1=1,78; b_2=10,28; b_3=9,36).

С технологической точки зрения увеличение x_1 нежелательно. Поэтому при выборе условий второй серии опытов значение x_1 было уменьшено. Уровни факторов и интервалы варьирования второй серии опытов, а также матрица планирования и результаты эксперимента приведены в табл. 10.8.

Таблица 10.8

Вторая серия опытов на стадии крутого восхождения

Уровень	Факторы			
	$\bar{x}_1$	$\bar{x}_2$	$\bar{x}_3$	
Основной	0,5	160	55	
Интервал варьирования	0,2	6	15	
Верхний	0,7	166	70	
Нижний	0,3	154	40	

Опыты	Кодированные значения факторов			
	x_1	x_2	x_3	y
1	+	+	+	76,00
2	+	−	+	74,05
3	−	−	+	80,90
4	−	−	−	73,00
5	+	+	−	76,81
6	+	−	−	62,65
7	−	+	−	81,40
8	−	+	+	82,40

Уравнение регрессии получается в виде полинома первой степени

$$\hat{y} = 75{,}901 - 3{,}524x_1 + 3{,}251x_2 + 2{,}436x_3.$$

Расчет дисперсии приведен в табл. 10.9.

$$s^2_{\text{ад}} = 54{,}35/4 = 13{,}59; \qquad F_{\text{эксп}} = 13{,}59/0{,}97 = 14{,}01; \qquad F_{\text{табл}} = 3{,}8.$$

Таблица 10.9

Расчет дисперсии линейной модели

Номер опыта	y	$\hat{y}$	$\lvert y - \hat{y}\rvert$	$(y - \hat{y})^2$	Номер опыта	y	$\hat{y}$	$\lvert y - \hat{y}\rvert$	$(y - \hat{y})^2$
1	76,00	78,06	2,06	4,24	5	76,81	73,19	3,62	13,10
2	74,05	71,56	2,49	6,25	6	62,65	66,69	4,04	16,32
3	80,90	78,61	2,29	5,29	7	81,40	80,24	1,16	1,34
4	73,00	73, 74	0,74	0,55	8	82,40	85,11	2,71	7,34

Линейное приближение неадекватно. Ниже приведены два возможных решения:

1) движение по градиенту;

2) переход к нелинейному планированию.

При движении по градиенту (линейное приближение неадекватно и область оптимума близка) вероятность успеха мала. Однако, если опыты очень дороги (а нелинейное планирование требует опытов значительно больше, чем линейное), можно рассчитать опыты крутого восхождения и некоторые из них реализовать. Это требует немного экспериментальных усилий.

Кроме того, реализация опытов по крутому восхождению может заинтересовать экспериментатора по технологическим соображениям. Следует обратить внимание на то, что знак b_1 отрицательный. Значит соотношение между растворителем и основным веществом будет уменьшаться. Растворителем является этиленгликоль. Чем меньше его будет в реакционной массе, тем лучше.

В других случаях следует переходить к нелинейному планированию.

Результаты крутого восхождения приведены в табл. 10.10.

Таблица 10.10

Крутое восхождение (вторая серия)

Условия движения по градиенту	Факторы			y
	$\tilde{x}_1$	$\tilde{x}_2$	$\tilde{x}_3$	
$b_j \times I_j$	−3,524×0,2= =−0,705	3,251×6= =19,506	2,436×15= =36,540	
Шаг при изменении $\tilde{x}_1$ на 0,1	−0,1	2,76	5,17	
Округление	−0,1	3	5	
Опыты				
9 (нулевой уровень)	0,5	160	55	77,3
10	0,4	163	60	82,2
11	0,3	166	65	—
12	0,2	169	70	83,6
13	0,1	172	75	84,8
14	0	175	80	36,9

Выход реакции повышен примерно до 85 %. По сравнению с выходом в центре эксперимента это — увеличение на 7,5%, а по сравнению с лучшим опытом в матрице— всего лишь на 2,4% ($s^2_{\{y\}}$=0,97). Тем не менее крутое восхождение оказалось весьма примечательным. В опыте № 13 максимальный выход получен при значении $\tilde{x}_1$=0,1. До планирования эксперимента считалось, что процесс получения карбометоксисульфанилгуанидина может успешно протекать при $\tilde{x}_1$>0,7, а выход реакции более 70% был неизвестен.

В данном случае крутое восхождение в некорректном применении (в условиях нелинейности и близости к области оптимума), привело в область факторного пространства, где при $\tilde{x}_1$=0,1 получен довольно высокий выход реакции.

Неопределенная ситуация. Когда y не имеет ограничения и экспериментатор не может определить степень близости оптимума, возможны два решения: построение линейного плана следующего цикла или, если достигнут требуемый результат, окончание работы.

Общая картина принятия решений для случая, когда крутое восхождение оказалось эффективным, показана на рис. 10.9.

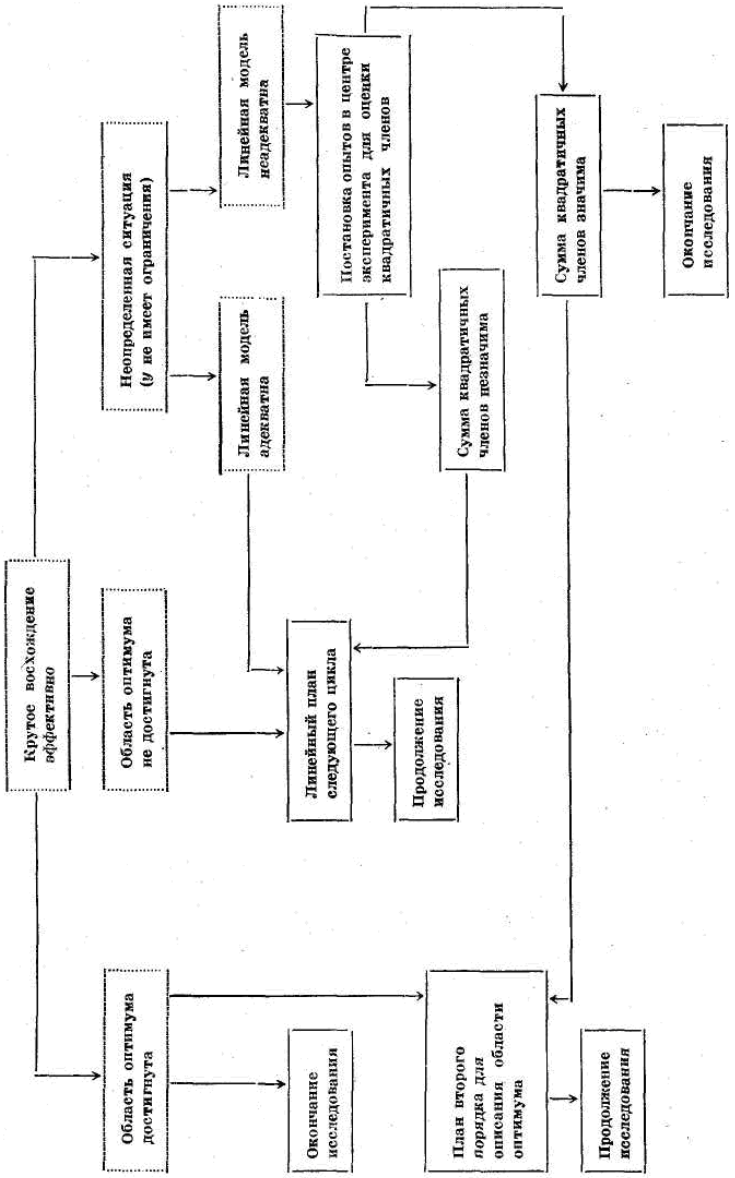


Рис. 10.9. Принятие решений после крутого восхождения; крутое восхождение, эффективно

10.8. Крутое восхождение неэффективно

Принимать решения при неэффективном движении по градиенту гораздо сложнее. Принятие решений во многом зависит от определенности ситуации (далеко от оптимума, близко, неопределенно) и от адекватности линейной модели. Наиболее типичные случаи показаны на схеме рис. 10.10. Рассмотрим каждую ситуацию отдельно.

Область оптимума близка. Если при реализации матрицы планирования удалось получить достаточно высокие значения параметра оптимизации и при крутом восхождении улучшить их не удалось, то наиболее типичными являются решения:

1) окончание исследования (выбирается лучший опыт);

2) построение плана второго порядка для описания области оптимума.

Если линейная модель была неадекватна, то возможно третье решение — возврат к схеме, изображенной на рис. 10.2, для выяснения причины неадекватности линейной модели.

Пример 2. Имеется следующая ситуация: исходный план— полуреплика, линейная модель неадекватна, крутое восхождение оказалось неэффективным, область оптимума близка. Параметром оптимизации является выход полезного продукта. Максимально возможный выход —100%. При реализации полуреплики получен наибольший выход — 80%. Ошибка опыта — 1%.

Какому из трех решений можно отдать предпочтение?

Предлагается три варианта:

1) окончить исследование;

2) перейти к нелинейному планированию второго порядка;

3) достроить полуреплику до полного факторного эксперимента.

Первое решение — окончить исследование. Проведем анализ ситуации. Разница в 20% между максимальным и наилучшим выходом весьма ощутима. Видимо, целесообразно продолжить исследование и постараться улучшить значение параметра оптимизации.

Окончить исследование можно в том случае, если бы ставилась цель только приблизиться к области высокого выхода.

Второе решение — достроить линейный план до плана второго порядка. Это одно из возможных решений. Если бы исходным планом был полный факторный эксперимент, то такое решение было бы наиболее целесообразным. Но мы имели дело с дробным факторным экспериментом. В этом случае линейные оценки смешаны с эффектами взаимодействий. Поэтому имеет смысл подумать также и о другом решении.

Третье решение — достроить полуреплику до полного факторного эксперимента. Это решение представляется разумным. Наряду с этим можно также рассматривать переход к нелинейному планированию.

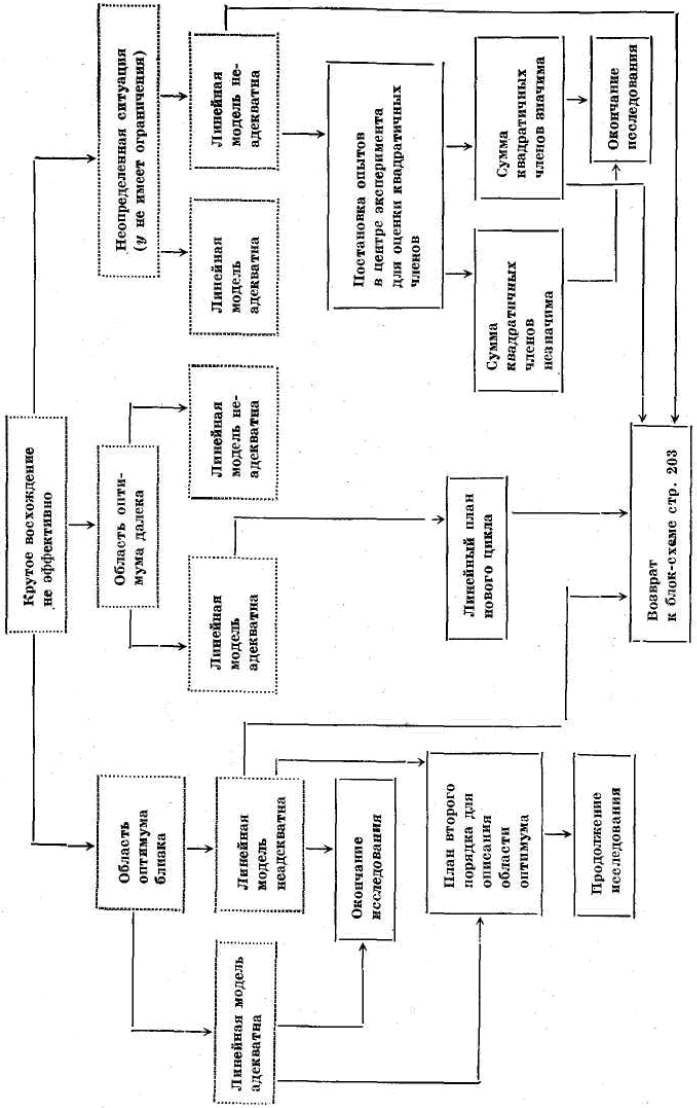


Рис. 4.10. Принятие решений после крутого восхождения; крутое восхождение неэффективно

Область оптимума далека. Линейная модель адекватна. Если область оптимума далека и линейная модель адекватна, казалось бы, имеются все предпосылки, чтобы крутое восхождение оказалось эффективным. Тем не менее на практике крутое восхождение нередко оказывается неэффективным. Возможное объяснение — в характере поверхности отклика. Мы исходим из предпосылки, что поверхность отклика гладкая и одноэкстремальная. В действительности она может иметь, например, вид, показанный на рис. 10.11.

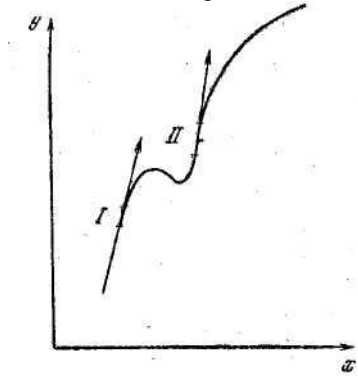


Рис. 10.11. Пример крутого восхождения; область оптимума далека, линейная модель адекватна, крутое восхождение неэффективно

I — исследованная область факторного пространства в первом цикле крутого восхождения;

II — исследованная область факторного пространства во втором цикле крутого восхождения

В таких случаях целесообразно передвинуться в другую область факторного пространства и построить линейный план второго цикла крутого восхождения. Область оптимума далека. Линейная модель неадекватна. Здесь возможно единственное решение: возвратиться к схеме, изображенной на рис. 10.2, и выяснить причины неадекватности линейной модели. Напомним некоторые причины, вследствие которых крутое восхождение могло оказаться неэффективным.

1. Интервалы варьирования выбраны неудачно.
2. Исходная модель строилась по полуреплике. Нужно достроить полуреплику до полного факторного эксперимента, получить раздельные оценки для всех коэффициентов регрессии и совершить новое крутое восхождение.
3. Исходная модель строилась по дробной реплике 2^{k-p}, где $p>1$. Целесообразно использовать метод «перевала», т. е. построить

матрицу второй серии опытов, изменив все знаки на обратные. Это даст возможность освободить линейные эффекты от совместных оценок с парными взаимодействиями. Положение не улучшится, если значимыми являются взаимодействия более высокого порядка.

В случае нелинейности исходной модели можно попытаться преобразовать параметр оптимизации. Это обычный прием для снижения степени полинома.

Пример 3. В табл. 10.11 приведен план 2^{4-1} с генерирующим соотношением $x_4=x_1x_2x_3$.

Таблица 10.11

Матрица планирования 2^{4-1} и результаты эксперимента

Уровень		Факторы			
		$\tilde{x}_1$	$\tilde{x}_2$	$\tilde{x}_3$	$\tilde{x}_4$
Нижний		45	50	0	3,5
Основной		60	60	4	6,5
Верхний		75	70	8	9,5
I_j		15	10	4	3

Опыты	x_0	x_1	x_2	x_3	x_4	$x_1x_2+x_3x_4$	$x_1x_3+x_2x_4$	$x_2x_3+x_1x_4$	y
1	+	−	−	−	−	+	+	+	61,8
2	+	+	+	+	+	+	+	+	55,4
3	+	+	+	−	−	+	−	−	61,5
4	+	+	−	+	−	−	+	−	61,5
5	+	−	+	+	−	−	−	+	62,0
6	+	+	−	−	+	−	−	+	58,0
7	+	−	+	−	+	−	+	−	56,3
8	+	−	−	+	+	+	−	−	52,7
b_j	58,65	0,45	0,15	−0,75	−3,05	−0,80	0,10	0,65	

$s^2_{\text{воспр}}=1;\quad s^2_{\{b_j\}}=0,125;\quad 2{,}3s_{\{b_j\}}=0,81.$

Этот план применялся при оптимизации процесса получения новокаина. Здесь $\tilde{x}_1$ — время реакции, *мин;* $\tilde{x}_2$ — температура реакционной среды, °С; $\tilde{x}_3$ — избыток натриевой соли парааминобензойной кислоты, %; $\tilde{x}_4$— концентрация натриевой соли парааминобензойной кислоты, %. Параметром оптимизации является выход реакции, %.

В этом примере линейное приближение оказалось неадекватным и крутое восхождение неэффективным.

Какое решение целесообразно принять? Возможны три варианта:

1) построить новый план, уменьшив интервалы варьирования (это позволяет избавиться от эффектов взаимодействия и, возможно, сделать линейное приближение адекватным);

2) достроить линейный план до плана второго порядка;

3) достроить полуреплику до полного факторного эксперимента с тем, чтобы освободить линейные эффекты от смешивания с взаимодействиями второго порядка.

Прежде чем построить новый план, надо обратить внимание на величину $ts_{\{b_j\}}$. Для t=2,3 она равна +0,81. Только один коэффициент регрессии b_4 оказался значимым.

Если принять решение построить новый план с уменьшением интервалов варьирования, то может оказаться, что ни один линейный эффект не выделится на фоне ошибок.

Приемлемое решение — достроить полуреплику до полного факторного эксперимента и совершить новое крутое восхождение при неискаженных линейных оценках,

Достроенный план приведен в табл. 10.12.

Таблица 10.12

Матрица планирования 2^4

Номер опыта	x_0	x_1	x_2	x_3	x_4	y, %	Номер опыта	x_0	x_1	x_2	x_3	x_4	y, %
1	+	−	−	−	−	61,8	9	+	−	−	−	+	55,0
2	+	+	−	−	−	64,5	10	+	+	−	−	+	58,3
3	+	−	+	−	−	65,3	11	+	−	+	−	+	56,3
4	+	+	+	−	−	61,5	12	+	+	+	−	+	53,3
5	+	−	−	+	−	62,8	13	+	−	−	+	+	52,7
6	+	+	−	+	−	61,6	14	+	+	−	+	+	65,9
7	+	−	+	+	−	62,0	15	+	−	+	+	+	66,0
8	+	+	+	+	−	71,5	16	+	+	+	+	+	55,4

Полученное уравнение регрессии имеет вид

$$\hat{y}=60,85+0,62x_1+0,54x_2+1,36x_3-2,99x_4-1,61x_1x_2+0,72x_1x_3-$$
$$-0,25x_1x_4+0,93x_2x_3-0,65x_2x_4+0,78x_3x_4-0,018x_1x_2x_3-$$
$$-2,13x_1x_2x_4-0,43x_1x_3x_4-0,12x_2x_3x_4-2,15x_1x_2x_3x_4,$$

$$s^2_{\text{воспр}}=1,67; \qquad 2s_{\{bj\}}=0,65; \qquad s_{\{bj\}}=0,325.$$

Уравнение регрессии существенно изменилось. Все линейные коэффициенты оказались значимыми, за исключением b_1. Большой

вклад в движение по градиенту вносит x_3 (b_3=1,36), который в полуреплике оказался незначимым. Произошло это потому, что b_{124}= —2,13. А мы предполагали, что оценка $b_3 \rightarrow \beta_3 + \beta_{124}$ будет неискаженной. На этом примере мы еще раз убеждаемся, что эффекты взаимодействий второго порядка не всегда менее значимы, чем эффекты взаимодействий первого порядка. D этом примере даже b_{1234}= — 2,15. Совершим теперь новое крутое восхождение. Оно оказалось более удачным, чем первое (табл. 10.13).

Таблица 10.13.

Крутое восхождение ($\tilde{x}_1 = 60$ мин)

Условия движения по градиенту	Факторы			y, %
	$\tilde{x}_2$	$\tilde{x}_3$	$\tilde{x}_4$	
$b_j \times I_j$	0,54×10=5,4	1,36×4=5,44	—2,99×3=—8,97	
Шаг	0,600	0,606	—1	
Округление	0,600	0,6	—1	
Опыты				
17	60	4	6,5	
18	60,6	4,6	5,5	
19	61,2	5,2	4,5	
20	61,8	5,8	3,5	65,8
21	62,4	6,4	2,5	79,3
22	63,0	7,0	1,5	63,3

Крутое восхождение неэффективно. Положение оптимума неопределенное. Если нет информации о положении оптимума и на стадии крутого восхождения не удалось улучшить значение параметра оптимизации, то можно рекомендовать поставить опыты в центре эксперимента с тем, чтобы оценить вклад квадратичных членов. При значимой сумме можно приступать к достройке линейного плана до плана второго порядка, так как наличие квадратичных членов свидетельствует о близости к почти стационарной области.

Обратим еще раз внимание на то, что при незначимой сумме обратного вывода делать нельзя, ибо возможен, например, такой случай: b_{11}=5,7, b_{22}=—5,3, $b_{11}+b_{22}$= +0,4. Сумма незначима, так как коэффициенты имеют разные знаки. Это случай, когда имеется два оптимума. Если же есть основание полагать, что оптимум один, то при незначимой сумме квадратичных членов можно приступить ко второму циклу крутого восхождения.

10.9. Многоцелевая (многокритериальная) оптимизация.

Большинство практических задач оптимизации при исследовании объектов имеет не один, а два или несколько параметров оптимизации, т. е. несколько целевых функций. В подобных случаях осуществляют многоцелевую оптимизацию. Преимущество такой оптимизации заключается в том, что объект оптимизации достигает экстремальных (наилучших) значений сразу по нескольким показателям. При этом нет необходимости проводить дополнительные опыты, нужно только в каждом из них вместо одного параметра оптимизации измерить те, которые указаны в поставленной задаче (увеличивается только объем измерений). Табл. 10.14 соответствует случаю, когда в двухфакторном эксперименте три целевых функции y_1, y_2, y_3. План эксперимента для описания процесса по всем трем откликам одинаков,

модели идентичны:

$$\begin{aligned}\widehat{y_1} &= b_0^{(1)} + b_1^{(1)} x_1 + b_2^{(1)} x_2 + b_{12}^{(1)} x_1 x_2;\\ \widehat{y_2} &= b_0^{(2)} + b_1^{(2)} x_1 + b_2^{(2)} x_2 + b_{12}^{(2)} x_1 x_2;\\ \widehat{y_3} &= b_0^{(3)} + b_1^{(3)} x_1 + b_2^{(3)} x_2 + b_{12}^{(3)} x_1 x_2,\end{aligned} \qquad \text{(A)}$$

вычисление коэффициентов аналогично:

$$b_j^{(1)} = \frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N} x_{ji}\, y_{1i}; \quad b_j^{(2)} = \frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N} x_{ji}\, y_{2i};$$

$$b_j^{(3)} = \frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N} x_{ji}\, y_{3i}; \quad j = 1, \overline{k}.$$

Таблица 10.14

№ опыта	x_1	x_2	y_1	y_2	y_3
1	−	−	y_{11}	y_{21}	y_{31}
2	−	+	y_{12}	y_{22}	y_{32}
3	+	−	y_{13}	y_{23}	y_{33}
4	+	+	y_{14}	y_{24}	y_{34}

При многоцелевой оптимизации возникают другие сложности. При получении экстремальных значений всех откликов нужно осуществить многокритериальную максимизацию (минимизацию).

Допустим, в (А) все отклики необходимо максимизировать. При этом фактор x_1 вошел в модели с разными знаками — в $\hat{y}_1$ и $\hat{y}_2$ с плюсом, а в $\hat{y}_3$ с минусом. Тогда при увеличении x_1 максимизируются только y_1 и y_2, а y_3 уменьшается; следовательно, необходимо искать компромиссное решение. Возможен и такой случай: в (А) отклики y_1 и y_2 нужно максимизировать, а y_3 — минимизировать, в модели $\hat{y}_1$, $\hat{y}_2$ и $\hat{y}_3$ фактор x_1 вошел с плюсом. В результате при увеличении x_1 вместе с y_1 и y_2 возрастает y_3, а при уменьшении x_1 вместе с y_3 уменьшаются y_1 и y_2. Очевидно, что экстремальных значений всех целевых функций не достичь, поэтому вновь требуется искать компромиссное решение.

Одним из методов, позволяющих найти компромиссное решение, является метод согласованного оптимума.

Пусть имеем две целевые функции $y_1 = f_1(\mathbf{x})$; $y_2 = f_2(\mathbf{x})$, находящиеся в начальных состояниях x_1^0 и x_2^0 и имеющие градиенты целевых функций

$$\xi_1(x_1^0) = \frac{\partial f_1}{\partial \mathbf{x}}(x_1^0); \quad \xi_2(x_2^0) = \frac{\partial f}{\partial \mathbf{x}}(x_2^0).$$

Тогда общая точка пересечения этих векторов соответствует решению следующей линейной системы уравнений:

$$\{\xi_1(\mathbf{x}_1^0),\ \mathbf{x} - \mathbf{x}_1^0\} = 0;$$
$$\{\xi_2(\mathbf{x}_2^0),\ \mathbf{x} - \mathbf{x}_2^0\} = 0.$$

Если соблюдаются условия

$$dy_1 = [\xi_1(\mathbf{x}),\ d\mathbf{x}] = 0;$$
$$dy_2 = [\xi_2(\mathbf{x}),\ d\mathbf{x}] = 0, \qquad (Б)$$

то полученную точку называют *согласованным оптимумом.* При двухфакторном эксперименте уравнения (Б) можно переписать в виде

$$dy_1 = \xi_{11}\,dx_1 + \xi_{12}\,dx_2 = 0;$$
$$dy_2 = \xi_{21}\,dx_1 + \xi_{22}\,dx_2 = 0,$$

где

$$\xi_{lj} = \partial f_l / \partial x_j; \quad l = 1,\ 2; \quad j = \overline{1,\ k}.$$

Уравнения имеют нетривиальное решение, если их определитель равен нулю:

$$\begin{vmatrix} \xi_{11} & \xi_{12} \\ \xi_{21} & \xi_{22} \end{vmatrix} = 0.$$

Раскрывая этот определитель, получим

$$\xi_{11}\,\xi_{22} = \xi_{21}\,\xi_{12}. \qquad \text{(В)}$$

Таким образом, в точке согласованного оптимума прирост целевых функций по различным аргументам равнозначен. Если рассматривать (В) с учетом

$$f(x_1^0,\ x_2^0) = b_0;\quad \frac{1}{2}\,\frac{\partial^2 f}{\partial x_1^0\,\partial x_2^0} = b_{12};$$

$$\frac{\partial f}{\partial x_1^0} = b_1;\quad \frac{1}{2}\,\frac{\partial^2 f}{\partial x_1^{0\,2}} = b_{11};$$

$$\frac{\partial f}{\partial x_2^0} = b_2;\quad \frac{1}{2}\,\frac{\partial^2 f}{\partial x_2^{0\,2}} = b_{22}.$$

то это равенство примет вид

$$b_1^{(1)}\,b_2^{(2)} = b_1^{(2)}\,b_2^{(1)},$$

где $b^{(i)}_j$ — коэффициенты регрессии моделей $\hat{y}_1$ и $\hat{y}_2$.

Согласно условию (Б), в точке согласованного оптимума векторы приростов обеих целевых функций параллельны (коллинеарны):

$$\xi_1 = \lambda\xi_2, \qquad \text{(Г)}$$

где λ — неизвестный коэффициент.

Следует отметить, что дифференциальные уравнения линии согласованного оптимума (В), создающие колинеарность векторов-градиентов целевых функций (Г), не обеспечивают максимальности функций f_1 и f_2 на всей линии (области) согласованного оптимума, а обеспечивают только стационарность этих функций:

$$f_1(\mathbf{x}) = C_1(\lambda);\quad f_2(\mathbf{x}) = C_2(\lambda),$$

где C_1, C_2 — константы, которые можно трактовать как определенные уровни y_1 и y_2.

Если при максимизации первой целевой функции можно ограничиться значением C_1, то, определяя λ (с учетом C_1) и вычисляя $C_2(\lambda)$, можно получить условия согласованного оптимума. На рис. 10.12 показаны линии равного уровня двух поверхностей откликов, а также линия согласованного оптимума, которая проходит через точки

абсолютных «личных» оптимумов y_1 и y_2, удовлетворяющие условиям $\xi_1 = 0$, $\xi_2 = 0$.

В случае, когда целевых функций больше двух, согласованный оптимум искать трудно; при этом следует воспользоваться методом перебора.

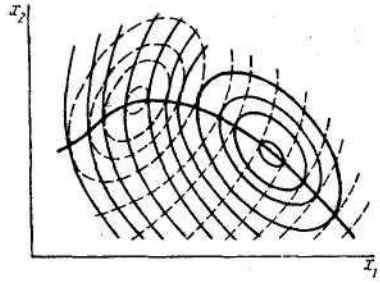


Рис. 10.12

В тех случаях, когда число откликов возрастает, задача оптимизации может быть решена с применением обобщенного параметра. Часто бывают случаи, когда функциональное соотношение позволяет выбрать обобщенный параметр. Однако не всегда удается найти подобный параметр, имеющий физический смысл. Часто его приходится выбирать в виде абстрактного математического выражения, например в виде

$$Q = \sum_{l=1}^{L} \alpha_l y_l,$$

где Q —обобщенный параметр; α_i— весовые коэффициенты (коэффициенты предпочтения) соответствующих целевых функций; $l = \overline{1, L}$.

Если все y_i необходимо максимизировать, то и Q следует максимизировать. Если же среди целевых функций есть такие, которые необходимо минимизировать, то для обобщенного отклика можно использовать выражение

$$Q = \frac{\sum_{l=1}^{r} \alpha_l y_l}{\sum_{l=r+1}^{L} \alpha_l y_l}.$$

где $y_l, l = \overline{1, r}$ — целевые функции, которые нужно максимизировать; $y_l, l = \overline{r+1, L}$ — целевые функции, которые следует минимизировать.

В этом случае отклик *Q* необходимо максимизировать.

В тех случаях, когда трудно найти аналитическое решение при поиске компромиссного решения для всех откликов, выбирают одну целевую функцию, которую оптимизируют, остальные являются ограничениями в виде «не более» или «не менее».

Подведем некоторые итоги из сказанного.

Нами рассмотрены наиболее типичные решения после крутого восхождения. Как принимать решение, зависит от эффективности крутого восхождения, а также от определенности ситуации (далеко от оптимума, близко, неопределенно) и от адекватности линейной модели.

Если крутое восхождение эффективно и область оптимума близка, возможны два решения: окончание исследования и достройка линейного плана до плана второго порядка в целях описания области оптимума. Какое решение выбрать — это зависит от того, как сформулирована задача оптимизации.

Если область оптимума далека, решение одно: построение линейного плана нового цикла.

В неопределенной ситуации, когда экспериментатор не может определить степень близости оптимума, можно переходить к новому линейному плану.

При неэффективном крутом восхождении приходится возвращаться к схеме, изображенной на рис 10.2. Если линейная модель неадекватна, следует поставить опыты в центре эксперимента для грубой оценки квадратичных членов уравнения регрессии. Если сумма квадратичных членов значима, это может свидетельствовать о близости к почти стационарной области. Тогда следует приступать к построению плана второго порядка или кончать исследования. При незначимой сумме квадратичных членов нужное решение выбрать довольно трудно. Наиболее типичным является построение линейного плана нового цикла.

11. Другие методы оптимизации в планировании эксперимента

11. 1 Симплекс-планирование

Когда конечной целью исследований является оптимизация свойств объектов, то построение модели объекта как промежуточный этап можно опустить, если есть алгоритм или метод нахождения оптимальных значений функции отклика. В некоторых случаях построение модели затруднено по техническим или экономическим причинам. Эти трудности привели к тому, что в методах оптимизации были разработаны такие алгоритмы, которые при периодическом проведении активного эксперимента без построения модели позволяют достигнуть оптимальных значений выходных показателей объекта. Подобный алгоритм движения к оптимуму является основой симплекс-планирования или последовательного симплексного метода планирования эксперимента.

Последовательный симплексный метод относится к методам поиска экстремума целевой функции, применение которого требует проведения минимально возможного числа опытов при определении направления движения при незначительных по объему вычислениях.

Построение планов эксперимента. Напомним, что симплексом называют простейшую выпуклую геометрическую фигуру, имеющую в k мерном факторном пространстве $k+1$ вершину. Число вершин симплекса всегда на единицу больше размерности пространства эксперимента. В двумерном пространстве, т. е. на плоскости, симплексом является любой треугольник, в трехмерном — любая треугольная пирамида (тетраэдр). Координаты вершин симплексов и являются условиями проведения опытов при эксперименте. Построение плана эксперимента — задание координат (факторов **x**) в каждой вершине симплекса. Симплексы, как, например, и треугольные, могут быть разнообразными. Если расстояния между вершинами симплекса одинаковы, то его называют *правильным*. Из произвольного симплекса всегда можно получить правильный путем преобразования системы координат. Для простоты изложения сути метода в дальнейшем будем рассматривать только правильные симплексы.

Таким образом, план эксперимента при симплексном методе это совокупность $k+1$ опытов, условия проведения которых задаются координатами вершин симплекса. Технологические режимы или варьируемые факторы представляют собой координаты факторного пространства. При этом важно задать начальный симплекс; движение к

оптимуму и постановка новых опытов определяются алгоритмом метода.

Рассмотрим два способа задания координат вершин начального симплекса :

- одна из вершин симплекса помещена в начало координат, а остальные расположены так, что ребра, исходящие из первой вершины, образуют одинаковые углы с соответствующими координатными осями (рис. 11.1, а).

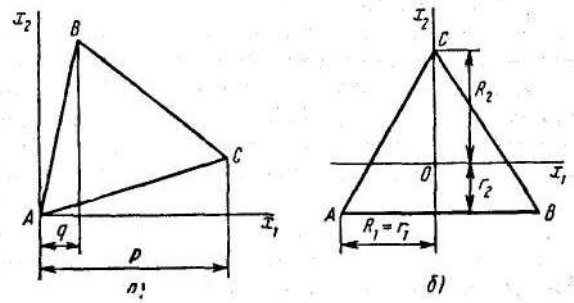


Рис. 11.1.

Координаты вершин симплекса, а соответственно и план эксперимента в этом случае может быть представлены в виде матрицы, приведенной в табл. 11.1, где значения факторов даны в кодированном виде.

Таблица 11.1

№ вершины	Координаты вершин			
	x_1	x_2	x_3	x_k
1	0	0	0	0
2	p	q	q	q
3	q	p	q	q
4	q	q	p	q
⋮	⋮	⋮	⋮	⋮
$k+1$	q	q	q	p

Для правильного симплекса

$$p = \frac{1}{k\sqrt{2}}(k - 1 + \sqrt{k+1}); \quad q = \frac{1}{k\sqrt{2}}(\sqrt{k+1} - 1), \tag{11.1}$$

где $l = 1$ — расстояние между вершинами симплекса;

2) центр симплекса (центр плана эксперимента) помещен в начало координат, а (k-+-1)-я вершина — на ось x_k (рис. 11.1, *б),* остальные вершины расположены симметрично относительно координатных осей. План эксперимента определяется матрицей (табл. 11.2), где при единичной длине ребра симплекса

$$r_j = \frac{l}{\sqrt{2j(j+1)}},$$
$$R_j = \frac{l}{\sqrt{2(j+1)}},\ j = \overline{1, k}. \qquad (11.2)$$

Таблица 11.2

№ вершины	Координаты вершин				
	x_1	x_2	x_3	x_{k-1}	x_k
1	$-r_1$	$-r_2$	$-r_3$	$-r_{k-1}$	$-r_k$
2	R_1	$-r_2$	$-r_3$	$-r_{k-1}$	$-r_k$
3	0	R_2	$-r_3$	$-r_{k-1}$	$-r_k$
⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮
k	0	0	0	R_{k-1}	$-r_k$
$k+1$	0	0	0	0	R_k

Матрица координат вершин начального симплекса, построенного по первому способу при k=3 (l=1), приведена в табл. 11.3. Значения факторов кодированные.

Т а б л и ц а 11.3

№ вершины	Координаты точек плана		
	x_1	x_2	x_3
1	0	0	0
2	0,944	0,236	0,236
3	0,236	0,944	0,236
4	0,236	0,236	0,944

Алгоритм симплексного метода. Экспериментальное определение оптимальных значений целевой функции осуществляют в такой последовательности:

1) выбирают целевую функцию, варьируемые факторы, интервалы варьирования факторов и производят кодирование факторов (задание таблицы исходных данных);

2) уточняют план эксперимента, т. е. рассчитывают координаты начального симплекса (первым или вторым способом). Число опытов в обоих случаях

$$N = k + 1;$$

3) проводят соответствующие опыты по плану эксперимента;

4) упорядочивают отклики согласно степени их уменьшения и выделяют наименьшее значение отклика $y_{i\min}$, которое затем отбрасывают;

5) строят новый симплекс. Он образуется оставшимися вершинами исходного симплекса и новой вершиной, получаемой путем зеркального отображения отброшенной относительно противоположной грани исходного симплекса (рис. 11.2).

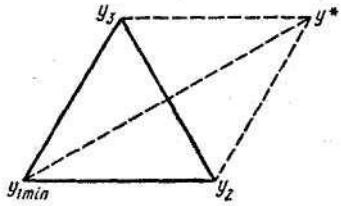


Рис.11.2

Координаты новой точки x рассчитывают следующим образом:

$$\mathbf{x}^* = \frac{2}{k}(\mathbf{x}^1 + \mathbf{x}^2 + \ldots + \mathbf{x}^{j-1} + \mathbf{x}^{j+1} + \ldots + \mathbf{x}^{k+1}) -$$

$$-\mathbf{x}^j = \frac{2}{k}\sum_{i=1}^{k+1}\mathbf{x}^i - \left(\frac{2}{k} + 1\right)\mathbf{x}^j, \qquad (11.3)$$

где $\mathbf{x}^j$ — координаты вершины исходного симплекса с наименьшим значением целевой функции.

Построение плана в виде симплекса позволяет вычислить (предсказать) отклик в новой вершине $\mathbf{x}^*$:

$$\widehat{y}^* = \frac{2}{k}\sum_{i=1}^{k+1}\widehat{y}^i - \left(\frac{2}{k} + 1\right)\widehat{y}^j; \qquad (11.4)$$

6) проводят эксперимент в новой точке $\mathbf{x}^*$ и получают экспериментальное значение y^* целевой функции;

7) последовательно перемещают симплекс, в процессе чего на каждом шаге происходит отбрасывание вершины симплекса с наименьшим значением целевой функции и реализация опыта в новой

вершине. При этом направление движения совпадает с направлением градиента (рис. 11.3).

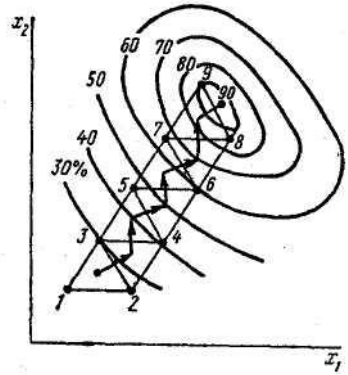


Рис. 11.3

При движении симплекса в факторном пространстве могут возникнуть случаи, когда размеренное движение нарушается. Если при перемещении симплекса на протяжении $k + 1$ шагов одна из вершин сохраняет свое положение, то симплекс совершает оборот вокруг этой вершины (рис. 11.4, а).

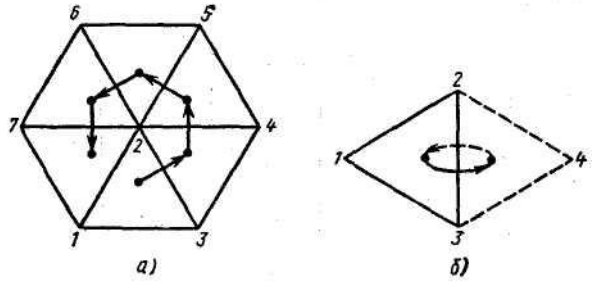


Рис. 11.4

Это означает, что либо в данной точке находится оптимум целевой функции, либо значение целевой функции в этой вершине определено неверно (например, выброс). Для выяснения необходимо в этой точке повторить эксперимент и в дальнейшем использовать новое значение отклика.

Если отклик в новой вершине симплекса меньше, чем в других, то в соответствии с правилом движения необходимо возвратиться к

предыдущему циклу (рис. 11.4, *б)*. Для избежания «зацикливания» в исходном симплексе вершину, в которой значение отклика следует после минимального, исключают. Дальнейшее движение осуществляют в соответствии с п. 6.

При приближении к области оптимальных значений откликов (можно определить по разности значений откликов в вершинах симплексов) размер симплекса уменьшается на ½ или на ¼ от начального.

Если ошибка эксперимента относительная величина, то целесообразно для каждой вершины симплекса проводить несколько параллельных опытов и использовать усредненные значения наблюдений целевой функции.

Преимуществами симплексного метода являются: малое число опытов, увеличение объема эксперимента только на один опыт при дополнительном включении нового фактора, простота вычислений, увеличение эффективности метода при росте числа факторов.

Пример 11.1. При технологической операции термообработки на процент выхода годных изделий y наибольшее влияние оказывают температура печи $x_1 \equiv T$, °С, время обработки $x_2 \equiv \tau$, ч. Необходимо подобрать режимы операции таким образом, чтобы, изменяя их в допустимых пределах, увеличить процент выхода годных изделий.

В табл. 11.4 приведены план эксперимента и результаты опытов.

Таблица 11.4

№ опыта	x_1	x_2	y
1	0,866	0,500	26
2	−0,866	0,500	24
3	0	−1,0	28

Минимальное значение отклика $y_{\min} = 24\%$ было получено во втором опыте. Следовательно, необходимо отбросить вторую вершину симплекса. По выражению (5.3) вычислим координаты новой вершины (четвертый опыт):

$$x_1^* = \frac{2}{2}\left[0{,}866+(-0{,}866)+0\right]-\left(\frac{2}{2}+1\right)\left(-0{,}866\right)=1{,}732;$$

$$x_2^* = \frac{2}{2}\left[0{,}5+0{,}5+(-1{,}0)\right]-\left(\frac{2}{2}+1\right)0{,}5=-1{,}0.$$

С помощью (11.4) предскажем значение отклика в четвертом опыте:

$$\widehat{y}^* = \frac{2}{2}\left[26+24+28\right]-\left(\frac{2}{2}+1\right)24=30\%.$$

При этом экспериментальное значение отклика y=29,5%.

При симплексном методе экспериментальные опыты можно проводить через шаг, а в промежуточных оценивать отклики с помощью выражения (11.4).

11.2. Метод канонического преобразования и анализа поверхности отклика.

Для целей оптимизации исследуемого объекта, который описывается уравнением второго порядка, существует преобразование, позволяющее получить графическую и аналитическую интерпретации области оптимума. Упомянутое преобразование называется ***каноническим***. Каноническое преобразование исходного уравнения регрессии второго порядка

$$\hat{y} = b_0 + \sum_i b_i x_i + \sum_{i<j} b_{ij} x_i x_j + \sum_i b_{ii} x^2_i \qquad (11.5)$$

представляет собой переход к стандартному уравнению

$$\hat{Y} - Y_s = \sum_{i=1}^{n} B_{ii} X_i, \qquad (11.6)$$

где Y_s — значение выходной переменной в центре поверхности отклика; X_i— канонические переменные; B_{ij} — коэффициенты канонического уравнения.

К новому уравнению переходят, перенося начало координат в центр поверхности отклика и поворачивая оси на определенный угол.

Перенос начала координат приводит к устранению линейных и свободного членов в уравнении, поворот осей — к исключению взаимодействий.

Трудности геометрической интерпретации уравнения регрессии второго порядка возрастают с увеличением числа факторов. При $n > 3$ дать наглядное представление о геометрии функции отклика, очевидно, невозможно, однако и в этом случае каноническое преобразование дает хорошие результаты, если последовательно рассматривать изменение двух факторов при стабилизированных остальных. Такой прием позволяет получить серию контурных кривых на плоскости для числа факторов $n \geq 3$ (очевидно, что объемное изображение функции отклика при $n \geq 3$ также не дает исследователю особых преимуществ).

При каноническом преобразовании уравнения регрессии второго порядка для двух факторов ($n = 2$) получают уравнение

$$\hat{Y} - Y_s = B_{11} X^2_1 + B_{22} X^2_2. \qquad (11.7)$$

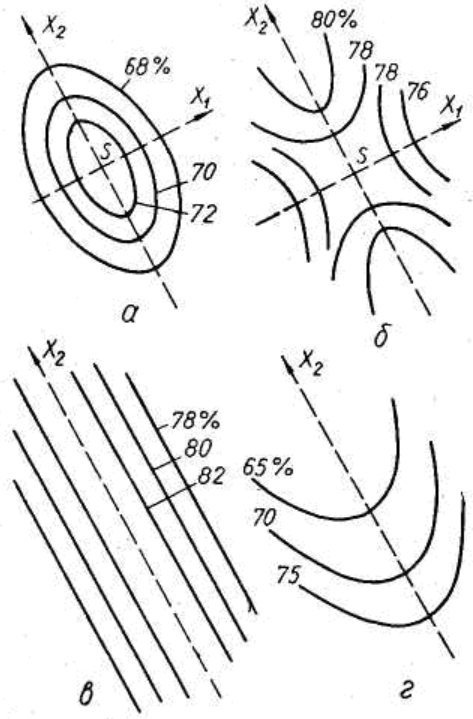


Рис. 11.5. Контурные кривые функции отклика области оптимума, описываемой уравнением второго порядка.

Для уравнения (11.7) в зависимости от знаков и значений B_{11} и B_{22} возможны четыре вида контурных кривых для равных значений параметра оптимизации (рис. 11.5): *а — коэффициенты* B_{11} и B_{22} *имеют одинаковые знаки;* контурные кривые в этом случае являются эллипсами; при $B_{ii} < 0$ центр эллипсов будет максимумом, при $B_{ii} > 0$ — минимумом, если $(B_{22}) < (B_{11})$, то эллипс вытянут по оси X_2 и наоборот; *б — коэффициенты* B_{11} *и* B_{22} *имеют разные знаки;* контурные кривые в этом случае являются гиперболами; центр фигуры называется «седлом» или «минимаксом»; в зависимости от соотношения абсолютных значений коэффициентов B_{11} и B_{22} изменение выходной переменной по осям X_1X_2 будет различным; *в, г — один из коэффициентов* (B_{22}) равен нулю, центр фигуры находится на бесконечности; поверхность отклика представляет собой возрастающее возвышение — «гребень»—

(*г*); возможен также случай, когда $B_{22} \approx 0$ и центр фигуры находится в любой точке оси X_2, поверхность отклика представляет собой «стационарное возвышение»—(*в*). На практике случай *(в)* встречается редко.

Указанные случаи идеализированы, однако они помогают исследователю ориентироваться в структуре поверхности отклика. Основные типы поверхностей отклика для двух переменных приведены в табл. 11.5.

Таблица 11.5

Типы поверхностей отклика канонического уравнения двух переменных

Номер типа поверхности	Коэффициенты	Знаки коэффициентов		Тип кривых в сечении	Геометрическая интерпретация	Центр
		B_{11}	B_{22}			
1	$B_{11} = B_{22}$	—	—	Окружность	Круглая выпуклость	Максимум
2	$B_{11} = B_{22}$	+	+	То же	Круглая впадина	Минимум
3	$B_{11} > B_{22}$	—	—	Эллипс	Эллипсоидная выпуклость	Максимум
4	$B_{11} > B_{22}$	+	+	То же	Эллипсоидная впадина	Минимум
5	$B_{11} = B_{22}$	+	—	Гипербола	Симметричное седло	Седловая точка
6	$B_{11} = B_{22}$	—	+	То же	То же	То же
7	$B_{11} > B_{22}$	+	—	»	Вытянутое седло	»
8	$B_{22} = 0$	—	0	Прямая	Стационарный гребень	Нет
9	$B_{22} = 0$	—	0	Парабола	Возрастающий гребень	На бесконечности

Кратко изложим алгоритм канонического преобразования уравнения регрессии второго порядка в уравнение (11.7).

Начало координат переносят в новую точку факторного пространства *S*. Для этого уравнение регрессии второго порядка дифференцируют по каждому фактору и приравнивают к нулю. Решая систему уравнений, находят координаты нового центра, подставляют их в уравнение регрессии и получают значение выходной переменной Y_s в центре факторного пространства *S*. В уравнении регрессии исчезают члены первой степени и изменяется значение свободного члена

$$\hat{Y} - Y_s = \sum_{i,\ j=1}^{n} b_{ij} x_i x_j + \sum_{i=1}^{n} b_{ii} x_i^2. \tag{11.8}$$

В новом центре *поворачивают оси* до совмещения с главными осями поверхности функции отклика. Эта операция осуществляется по правилам аналитической геометрии.

Например, для $n = 2$ характеристическое уравнение имеет вид

$$f(B) = \begin{vmatrix} (b_{11} - B) & 0{,}5b_{12} \\ 0{,}5b_{21} & (b_{22} - B) \end{vmatrix} = 0. \tag{11.9}$$

Решение (11.9) записывают уравнением

$$B^2 - a_1 B + a_2 = 0 \tag{11.10}$$

где

$$a_1 = (b_{11} + b_{22}) \qquad a_2 = (b_{11} b_{22} - 0{,}25 b_{12})^2.$$

Два корня этого уравнения дают искомые значения коэффициентов уравнения в канонической форме.

Для n=3 характеристическая матрица (11.9) дополняется соответствующими строками и столбцами:

$$f(B) = \begin{vmatrix} (b_{11} - B) & 0{,}5b_{12} & 0{,}5b_{13} \\ 0{,}5b_{21} & (b_{22} - B) & 0{,}5b_{23} \\ 0{,}5b_{31} & 0{,}5b_{32} & (b_{33} - B) \end{vmatrix} = 0. \tag{11.11}$$

Решение (11.11) записывают уравнением

$$B^3 - a_1 B^2 + a_2 B - a_3 = 0,$$

где

$$a_1 = \sum_{i=1}^{n} b_{ii};$$

$$a_2 = \sum_{i,\ j=1}^{n} b_{ii} b_{jj} - 0{,}25 \sum_{i<j}^{n} b_{ij}^2;$$

$$a_3 = \prod_{i=1}^{n} b_{ii} + 0{,}25 \prod_{i,\ j=1}^{n} b_{ij} - 0{,}25 \sum_{\substack{i,\ j=1 \\ i \neq j \neq q}}^{n} b_{ii} b_{iq}.$$

Правильность расчетов проверяют по формуле

$$\sum_{i=1}^{n} B_{ii} = \sum_{i=1}^{n} b_{ii}. \tag{11.12}$$

Пример. Произвести канонический анализ уравнения регрессии

$$\hat{y} = 85{,}14 + 3{,}43x_1 - 1{,}32x_2 + 2{,}60x_1^2 - 1{,}19x_2^2 + 3{,}00x_1x_2.$$

Решение. Начало координат переносим в новую точку факторного пространства следующими действиями:

$$\frac{\partial \hat{y}}{\partial x_1} = 3{,}43 + 2 \cdot 2{,}60 x_1 + 3{,}00 x_2 = 0;$$

$$\frac{\partial \hat{y}}{\partial x_2} = -1{,}32 - 2 \cdot 1{,}19 x_2 + 3{,}00 x_1 = 0;$$

$$x_{1s} = -0{,}197; \qquad x_{2s} = -0{,}802.$$

Подставляем значения x_{1s} и x_{2s} в уравнение регрессии и получаем значение выходной переменной Y_s=85,33 в центре S.

Для поворота осей в новом центре надо знать значения канонических коэффициентов B_{11} и B_{22}. Для вычисления этих значений приравняем характеристический детерминант к нулю:

$$\begin{vmatrix} (2{,}60 - B) & 0{,}5 \cdot 3{,}00 \\ 0{,}5 \cdot 3{,}00 & (-1{,}19 - B) \end{vmatrix} = 0,$$

или воспользуемся формулами (11.9)

a_1 = 2,60— 1,19 = —1,41; a_2 = —2,60-1,19 —0,25 $(3{,}00)^2$ = —5,34.

Получим уравнение

$$B^2 - 1{,}41B - 5{,}34 = 0.$$

Корнями этого уравнения будут B_{11}=3,2, B_{22}=1,71. Условие (11.12) выполняется:

2,60—1,19 = 3,12—1,71.

Уравнение регрессии в канонической форме примет вид

$$\hat{Y} - 85{,}33 = 3{,}12 X_1^2 - 1{,}71 X_2^2.$$

В соответствии с приведенной выше классификацией контурными кривыми в области оптимума являются гиперболы ($B_{11} < 0$, $B_{22} > 0$).

11.3 Оптимизация свойств многокомпонентных материалов

Многие из применяемых материалов представляют собой смеси различных компонентов (полупроводниковые материалы, ферриты, клеи и т. д.). Свойства этих материалов зависят от концентрации процентного содержания составляющих их компонентов. Целью оптимизации является установление количественных зависимостей между концентрациями компонентов и свойствами смеси и поиск составов, обеспечивающих экстремальные свойства материала.

Особенностью задач исследования многокомпонентных материалов является взаимозависимость варьируемых факторов— концентрации

компонентов, т. е. изменив концентрацию одного компонента, необходимо изменять концентрацию нескольких или всех остальных компонентов. Состав смеси обычно выражают в мольных, весовых или объемных долях, а также в процентах от общей суммы. Для смесей выполняется соотношение

$$\sum_{j=1}^{k} x_j = 1\,(100\%), \tag{11.13}$$

где $x_j \geq 0$ — концентрация j-го компонента; k — число компонентов смеси.

Эта принципиальная особенность исследуемой задачи влияет на алгоритм ее решения (на построение плана, вид модели и др.). Соотношение (11.13), задающее возможные составы k -компонентной смеси, представляет собой правильный симплекс с k вершинами в (k — 1)-мерном пространстве. Для изображения составов используют барицентрическую систему координат.

Например, для двухкомпонентной смеси (k=2) симплекс — прямая [содержание компонентов определяется соотношением отрезков (рис. 11.6, *а*)]; для трехкомпонентной (k=3) правильный симплекс — равносторонний треугольник.

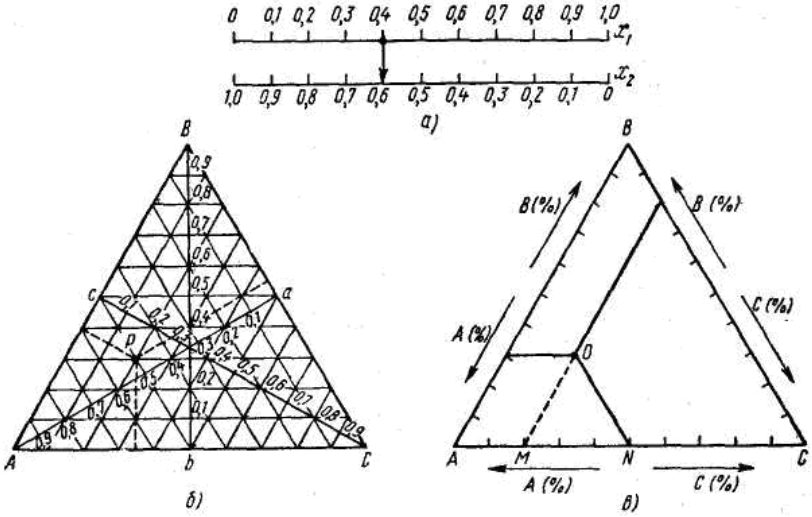


Рис. 11.6

При этом каждая точка треугольника соответствует определенному составу тройной смеси и, наоборот, каждый состав характеризуют одной определенной точкой. Метод изображения свойств тройной смеси с помощью концентрационного треугольника получил широкое распространение в физической химии. Вершины треугольника соответствуют чистым веществам, стороны — двойным смесям. Опустив из каждой вершины треугольника *A, B*, и *C* перпендикуляры, разделив каждый из них на десять равных отрезков и проводя через полученные деления прямые, параллельные сторонам треугольника, получим 10%-ную сетку (рис. 11.6, *б)*.

Приближение от каждой данной стороны к противоположной вершине соответствует пропорциональному возрастанию содержания соответствующего вершине компонента от 0 до 1. Концентрация компонентов в любой точке треугольника определяется длиной перпендикуляров, опущенных из этой точки на стороны треугольников.

Так, изображенная на рис. 11.6, *б* точка *P* имеет следующие концентрации компонентов: $A = 0{,}5$; $B = 0{,}3$; $C = 0{,}2$.

Другой более простой способ отсчета концентраций предложен Г. Розенбумом. В треугольнике Розенбума из точки внутри треугольника проводят прямые, параллельные его сторонам, состав тройной смеси отсчитывают по трем отрезкам, отсекаемым этими прямыми на соответствующих сторонах треугольника (рис. 11.6, *е*). Точка *P* в треугольнике Розенбума имеет следующие концентрации компонентов:
$A = 0{,}5$; $B = 0{,}3$; $C = 0{,}2$. В дальнейшем для изображения смесей принят способ Розенбума.

Целевую функцию *y* трехкомпонентной смеси обычно представляют проекциями линий равного уровня на плоскость концентрационного треугольника. В результате получают диаграмму, связывающую определенное свойство (значение *y)* с составом смеси (диаграмма состав — свойство).

При $k = 4$ концентрационный симплекс — тетраэдр каждая вершина которого соответствует чистым компонентам ребра — двухкомпонентным, а грани — трехкомпонентным смесям. Для определения координат точек внутри тетраэдра через эту точку проводят плоскости, параллельные граням тетраэдра, и вычисляют расстояния от этих плоскостей до граней, противоположных вершинам, соответствующих 100%-ным содержаниям компонентов на гранях противоположных вершинам, содержание соответствующих вершинам компонентов равно нулю (начало отсчета).

При изучении свойства сложных смесей с числом компонентов $k > 3$ диаграмму графически представляют в виде линий равного уровня в сечениях $(k - 1)$ -мерного симплекса плоскостями, параллельными его граням. При этом в сечениях варьируются три компонента, остальные $(q - 3)$ закрепляют на определенных уровнях (сечения диаграмм состав — свойство).

Задание области исследования. При оптимизации свойств материалов рассматривают не полный концентрационный симплекс, а лишь некоторый локальный участок (свойства чистых материалов или смеси с меньшим числом составляющих не важны, т. е. не анализируют вершины и стороны симплекса).

Локальный участок задается определенными ограничениями на возможное содержание компонентов в смеси:

$$0 < a_j \leqslant x_j \leqslant b_j < 1; \quad j = \overline{1, k}. \tag{11.14}$$

Ограничения (11.14) на концентрации компонентов выделяют в полном концентрационном симплексе некоторую подобласть (в общем случае в виде многогранника), число и координаты вершин которой зависят от заданных ограничений.

Координаты вершин многогранника, ограничивающего локальную область исследования, определяют следующим образом:

1) выписывают все возможные комбинации двух уровней a_j и b_j для каждого компонента при пропуске одной из них (таких комбинаций 2^{k-1}) и повторяют эту процедуру k раз. Всего получают $k \cdot 2^{k-1}$ комбинаций уровней с пропусками одного из компонентов. Приведем возможные комбинации для $k = 3$:

$$a_1 a_2,\ a_1 b_2,\ b_1 a_2,\ b_1 b_2,\ a_1 a_3,\ a_1 b_3,$$
$$b_1 a_3,\ b_1 b_3,\ a_2 a_3,\ a_2 b_3,\ b_2 a_3,\ b_2 b_3;$$

2) среди полученных комбинаций выбирают те, в которых сумма компонентов меньше единицы и выполняются условия $0 < a_i \leqslant x_i \leqslant b_i < 1; \quad i = \overline{1, k}$. Затем в эти комбинации на места пропусков добавляют недостающие до общей суммы компоненты, равной 1 или 100% с учетом заданных ограничений, и вычеркивают одинаковые комбинации. В результате будут заданы вершины многогранника (область исследования).

Таблица 11.6

№ варианта	x_1	x_2	x_3
1	0,2	0,18	—
2	0,2	0,67	—
3	0,6	0,18	—
4	0,6	0,67	—
5	0,2	—	0,05
6	0,2	—	0,4
7	0,6	—	0,05
8	0,6	—	0,4
9	—	0,18	0,05
10	—	0,18	0,4
11	—	0,67	0,05
12	—	0,67	0,4

В качестве примера рассмотрим построение локальной области исследования, когда на концентрации компонентов смеси наложены следующие ограничения:

$$0{,}2 \leqslant x_1 \leqslant 0{,}6;\ 0{,}18 \leqslant x_2 \leqslant 0{,}67;\ 0{,}05 \leqslant x_3 \leqslant 0{,}4. \qquad (11.15)$$

Таблица 11.7

№ варианта	x_1	x_2	x_3
1	0,2	0,18	$0{,}62 > 0{,}4$
2	0,2	0,67	0,13
3	0,6	0,18	0,22
4	0,6	0,67	>1
5	0,2	$0{,}75 > 0{,}67$	0,05
6	0,2	0,4	0,4
7	0,6	0,35	0,05
8	0,6	$0 < 0{,}18$	0,4
9	$0{,}77 > 0{,}6$	0,18	0,05
10	0,42	0,18	0,4
11	0,28	0,67	0,05
12	>1	0,67	0,4

Полный перебор уровней концентрации компонентов в соответствии с п. 1 приведен в табл. 11.6, а координат вершин локального многогранника в соответствии с п. 2 — в табл. 11.7. Варианты смесей 1, 5, 8, 9 отбрасываются из-за нарушений условий (11.15), а варианты 4, 12 из-за нарушения условия (11.13). В результате вершины многогранника соответствуют вариантам 2, 3, 6, 7, 10 и 11 из полного

перебора. Графическое изображение многогранника показано на рис. 11.7.

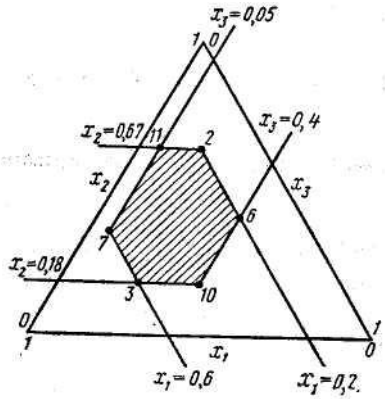


Рис. 11.7

Выбор математической модели. Характерной особенностью задачи оптимизации свойств многокомпонентных материалов является сложный вид поверхности отклика, отражающий зависимость свойств от состава смеси. Для адекватного описания таких зависимостей необходимы полиномы достаточно высоких степеней вплоть до четвертого порядка. Кроме того, если в матрице **X** одновременно имеются столбцы фиктивного фактора $x_0 = 1$, парных взаимодействий $x_i x_l$ и квадратов x^2_i, то согласно (11.13) ковариационная матрица оказывается вырожденной. Поэтому приходится описывать свойства смеси с помощью приведенных полиномов.

Рассмотрим порядок приведения полиномов на примере полинома второй степени для описания свойств трехкомпонентной смеси. Модель второго порядка для $k = 3$ имеет вид

$$\widehat{y} = b_0 + b_1 x_1 + b_2 x_2 + b_3 x_3 + b_{12} x_1 x_2 + \\ + b_{13} x_1 x_3 + b_{23} x_2 x_3 + b_{11} x_1^2 + b_{22} x_2^2 + b_{33} x_3^2.$$

В этой модели необходимо устранить b_0 (коэффициент при фиктивном факторе x_0) и квадратичные эффекты. Поскольку $x_1+x_2+x_3=1$, умножив левую и правую части этого выражения на b_0 получим $b_0x_1+b_0x_2+b_0x_3 = b_0$, а умножив это выражение последовательно на x_1 x_2, x_3 соответственно найдем

$x^2_1 = x_1 — x_1x_2 — x_1x_3$; $x^2_2 = x_2 — x_1x_2 — x_1x_3$; $x^2_3 = x_3 — x_1x_3 — x_2x_3$.

Подставив полученные соотношения в первоначальные выражения и приведя подобные члены, определим

$$y = (b_0 + b_1 + b_{11})\, x_1 + (b_0 + b_2 + b_{22})\, x_2 + (b_0 + b_3 + b_{33})\, x_3 + \\ + (b_{12} - b_{11} - b_{12})\, x_1 x_2 + (b_{13} - b_{11} - b_{33})\, x_1 x_3 + \\ + (b_{25} - b_{22} - b_{33})\, x_2 x_3.$$

Введя обозначения $\beta_j = b_0 + b_j + b_{jj}$; $\beta_{jl} = b_{jl} - b_{jj} - b_{ll}$, получим приведенный полином второй степени трех переменных:

$$\widehat{y} = \beta_1 x_1 + \beta_2 x_2 + \beta_3 x_3 + \beta_{12} x_1 x_2 + \beta_{13} x_1 x_3 + \beta_{23} x_2 x_3.$$

Таким образом, число коэффициентов полинома второй степени для трех переменных уменьшилось с 10 до 6, следовательно, требуется меньшее число опытов для построения модели.

Приведенный полином второй степени от k переменных

$$\widehat{y} = \sum_{1 \leqslant j \leqslant k} \beta_j x_j + \sum_{1 \leqslant j < l \leqslant k} \beta_{jl} x_j x_l$$

содержит C^2_{k+1} коэффициентов.

Приведенный полином неполного третьего порядка для трехкомпонентной смеси

$$\widehat{y} = \beta_1 x_1 + \beta_2 x_2 + \beta_3 x_3 + \beta_{12} x_1 x_2 + \beta_{13} x_1 x_3 + \\ + \beta_{23} x_2 x_3 + \beta_{123} x_1 x_2 x_3,$$

для k-компонентной

$$\widehat{y} = \sum_{1 \leqslant j \leqslant k} \beta_j x_j + \sum_{1 \leqslant j < l \leqslant k} \beta_{jl} x_j x_l + \sum_{1 \leqslant j < l < s \leqslant k} \beta_{jls} x_j x_l x_s.$$

Приведенный полином третьего порядка для трехкомпонентной смеси

$$\widehat{y} = \beta_1 x_1 + \beta_2 x_2 + \beta_3 x_3 + \beta_{12} x_1 x_2 + \beta_{13} x_1 x_3 + \beta_{23} x_2 x_3 + \\ + \nu_{12} x_1 x_2 (x_1 - x_2) + \nu_{13} x_1 x_3 (x_1 - x_3) + \nu_{23} x_2 x_3 (x_2 - x_3) + \\ + \beta_{123} x_1 x_2 x_3,$$

для k-компонентной

$$\widehat{y} = \sum_{1 \leqslant j \leqslant k} \beta_j x_j + \sum_{1 \leqslant j < l \leqslant k} \beta_{jl} x_j x_l + \\ + \sum_{1 \leqslant j < l \leqslant k} \nu_{jl} x_j x_l (x_j - x_l) + \sum_{1 \leqslant j < l < s \leqslant k} \beta_{jls} x_j x_l x_s.$$

Приведенный полином четвертого порядка для трехкомпонентной смеси

$$\widehat{y} = \beta_1 x_1 + \beta_2 x_2 + \beta_3 x_3 + \beta_{12} x_1 x_2 + \beta_{13} x_1 x_3 + \beta_{23} x_2 x_3 + \nu_{12} x_1 x_2 (x_1 - x_2) + \nu_{13} x_1 x_3 (x_1 - x_3) + \nu_{23} x_2 x_3 (x_2 - x_3) + \delta_{12} x_1 x_2 (x_1 - x_2)^2 + \delta_{13} x_1 x_3 (x_1 - x_3)^2 + \delta_{23} x_2 x_3 (x_2 - x_3)^2 + \beta_{1123} x_1^2 x_2 x_3 + \beta_{1223} x_1 x_2^2 x_3 + \beta_{1233} x_1 x_2 x_3^2,$$

для *k*-компонентной

$$\widehat{y} = \sum_{1 \leqslant j \leqslant k} \beta_j x_j + \sum_{1 \leqslant j < l \leqslant k} \beta_{jl} x_j x_l + \sum_{1 \leqslant j < l \leqslant k} \nu_{jl} x_j x_l (x_j - x_l) + \sum_{1 \leqslant j < l \leqslant k} \delta_{jl} x_j x_l (x_j - x_l)^2 + \sum_{1 \leqslant j < l < s \leqslant k} \beta_{jjls} x_j^2 x_l x_s + \sum_{1 \leqslant j < l < s \leqslant k} \beta_{jlls} x_j x_l^2 x_s + \sum_{1 \leqslant j < l < s \leqslant k} \beta_{jlss} x_j x_l x_s^2 + \sum_{1 \leqslant j < l < s < r \leqslant k} \beta_{jlsr} x_j x_l x_r x_s,$$

где ν, δ, β — коэффициенты регрессии.

Планирование эксперимента. Минимальное число опытов $N_{\min}$, необходимое для оценки коэффициентов полиномиальной модели по экспериментальным данным, равно числу коэффициентов выбранного полинома, т. е. для модели степени μ и *k* компонентов

$$N_{\min} = C_{k+\mu-1}^{\mu}.$$

Рассмотрим некоторые планы, которые применяют при оптимизации свойств многокомпонентных материалов.

Симплекс-решетчатые планы. Наибольшее распространение получили симплекс-решетчатые планы. Эти планы обеспечивают равномерное распределение экспериментальных точек по (*k* — 1)-мерному симплексу и являются насыщенными (число опытов плана равно числу коэффициентов оцениваемой модели). Точки симплексной решетки степени μ для *k* компонентов содержат все возможные сочетания (μ+1)-го равноотстоящего уровня по каждому компоненту с координатами

$$x_j = 0,\ 1/\mu,\ 2/\mu,\ \ldots,\ 1.$$

Для квадратичной решетки {*k*, 2}, обеспечивающей построение модели второго порядка (μ=2), используют следующие уровни каждого компонента: 0, 1/2, 1, а обеспечивающей построение модели третьего порядка (μ=3) —0, 1/3, 2/3, 1 и т. д. Некоторые {3, μ}- и {4, μ}- решетки представлены на рис. 11.8, *а, б* и 11.9, *а, б.*

Записав координаты точек симплексной решетки, получим планы эксперимента. Планы эксперимента для решеток {3, 2}, {3, 3}, 3, 4} и {4, 2} представлены в табл. 5.7, 5.8 соответственно

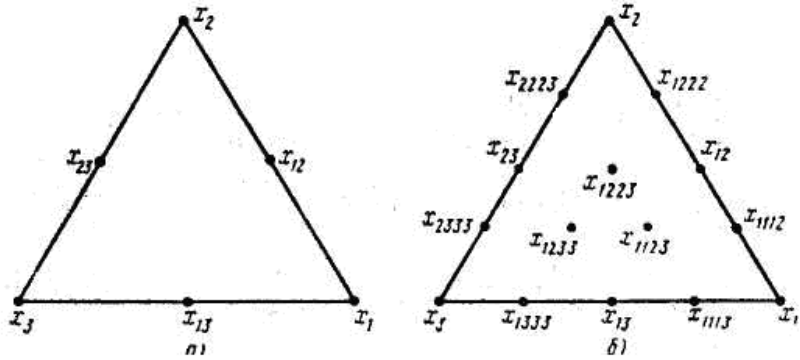


Рис.11.8

Таблица 11.8

№ опыта	x_1	x_2	x_3	$y_{экс}$	№ опыта	x_1	x_2	x_3	$y_{экс}$
1	1	0	0	y_1	4	1/2	1/2	0	y_{12}
2	0	1	0	y_2	5	1/2	0	1/2	y_{13}
3	0	0	1	y_3	6	0	1/2	1/2	y_{23}

Таблица 11.9

№ опыта	x_1	x_2	x_3	$y_{экс}$	№ опыта	x_1	x_2	x_3	$y_{экс}$
1	1	0	0	y_1	9	3/4	0	1/4	y_{1113}
2	0	1	0	y_2	10	1/4	0	3/4	y_{1333}
3	0	0	1	y_3	11	0	3/4	1/4	y_{2223}
4	1/2	1/2	0	y_{12}	12	0	1/4	3/4	y_{2333}
5	1/2	0	1/2	y_{13}	13	1/2	1/4	1/4	y_{1123}
6	0	1/2	1/2	y_{23}	14	1/4	1/2	1/4	y_{1223}
7	3/4	1/4	0	y_{1112}	15	1/4	1/4	1/2	y_{1233}
8	1/4	3/4	0	y_{1222}					

Для обозначения свойств смеси *y* вводят индексы, указывающие, при каком содержании компонентов в смеси получены данные значения

y. Так, значения y_{12} (табл. 11.8) соответствуют смеси, содержащей $1/2\ x_1$ и $1/2\ x_2$; значения y_{1113} — смеси, содержащей $3/4\ x_1$, $0x_2$, $1/4\ x_3$, а значения y_{1233}— смеси, содержащей $1/4\ x_1$, $1/4\ x_2$ и $1/2x_3$ (табл. 11.9).

Симплекс-решетчатые планы являются частично композиционными, т. е. допускающими достройку плана без потери результатов предыдущих опытов. Так, как видно из рис. 11.8 и 11.9, в случае, когда полинома второго порядка недостаточно для адекватного описания заданного свойства, можно без потери результатов предыдущих опытов перейти к планам неполного третьего или четвертого порядка.

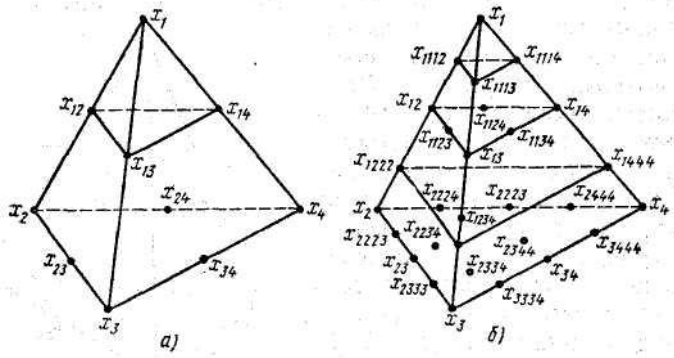


Рис. 11.9.

План третьего порядка композиционен только линейному плану. Для описания свойств смеси по результатам эксперимента используют описанные приведенные полиномы соответствующих степеней.

Планы Ламбракиса. В симплекс-решетчатых планах для полиномов невысоких степеней в большинстве опытов вводят не все компоненты. Очевидно, что результаты опытов с чистыми компонентами и двухкомпонентными смесями несут мало информации о свойствах многокомпонентной смеси. Поэтому для смесей с числом компонентов $k \geq 4$ предложены планы Ламбракиса. Эти планы представляют собой симплексные решетки Шеффе с заменой опытов с чистыми компонентами опытами с координатами: $x_1 = x_2 = \ldots = x_k = 1/(k - 1)$.

Например, при построении полинома второй степени в четырехкомпонентной смеси следует четыре точки с координатами $x_1 = x_2 = x_3 = x_4 = 1$ (рис. 11.9 *а),* заменить четырьмя точками с координатами $x_1 = x_2 = x_3 = x_4 = 1/3$ (рис. 11.10).

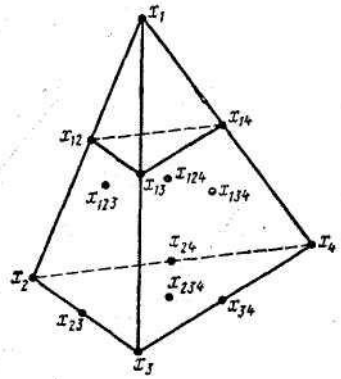


Рис. 11.10

Таким образом, план Ламбракиса вместо четырех опытов в вершинах тетраэдра включает четыре опыта в центрах граней тетраэдра, а также шесть опытов серединах ребер (из плана Шеффе). Для описания свойств по результатам реализации плана Ламбракиса используют приведенные полиномы соответствующих степеней.

Симплекс-центроидные планы. Для описания свойств многокомпонентных смесей полиномами невысоких степеней Шеффе предложены также симплекс-центроидные планы, содержание $(2^k - 1)$ точку с координатами (1, 0.....0), (1/2, 1/2, 0, ... 0), ... *(1/k, 1/k,* .... *1/k),*а также все точки, которые можно получить из этих перестановками координат. Для данного числа компонентов k можно построить единственный симплекс-центроидный план, содержащий точку в центре (центроид) симплекса и центроиды всех симплексов низшей размерности, его составляющих. Симплекс-центроидные планы для k= 3, 4 представлены на рис. 11.10, матрица симплекс-центроидного плана для k = 4 дана в табл. 11.10. Как видно из сравнения рис. 11.9 и 11.10 симплекс-центроидный план для k=3 совпадает с симплекс-решетчатым планом неполного третьего порядка.

Полиномы, описывающие свойства смеси согласно результатам проведенных экспериментов по симплекс-центроидному плану, содержат столько же коэффициентов, сколько точек в плане. Для k-компонентной смеси

$$\widehat{y} = \sum_{1 \leqslant j \leqslant k} \beta_j x_j + \sum_{1 \leqslant j < l \leqslant k} \beta_{jl} x_j x_l + \sum_{1 \leqslant j < l < s \leqslant k} \beta_{jls} x_j x_l x_s + \\ + \beta_{12 \ldots k} x_1 x_2 \ldots x_k. \qquad (11.16)$$

Для k = 4 модель, получаемая по результатам реализации симплекс-центроидного плана, имеет вид

$$\widehat{y} = \beta_1 x_1 + \beta_2 x_2 + \beta_3 x_3 + \beta_4 x_4 + \beta_{12} x_1 x_2 + \beta_{13} x_1 x_3 + \beta_{14} x_1 x_4 + \beta_{23} x_2 x_3 + \beta_{24} x_2 x_4 + \beta_{34} x_3 x_4 + \beta_{123} x_1 x_2 x_3 + \beta_{124} x_1 x_2 x_4 + \beta_{134} x_1 x_3 x_4 + \beta_{234} x_2 x_3 x_4 + \beta_{1234} x_1 x_2 x_3 x_4.$$

Таблица 11.10

№ опыта	x_1	x_2	x_3	x_4	y	№ опыта	x_1	x_2	x_3	x_4	y
1	1	0	0	0	y_1	9	0	1/2	0	1/2	y_{24}
2	0	1	0	0	y_2	10	0	0	1/2	1/2	y_{34}
3	0	0	1	0	y_3	11	1/3	1/3	1/3	0	y_{123}
4	0	0	0	1	y_4	12	1/3	1/3	0	1/3	y_{124}
5	1/2	1/2	0	0	y_{12}	13	1/3	0	1/3	1/3	y_{134}
6	1/2	0	1/2	0	y_{13}	14	0	1/3	1/3	1/3	y_{234}
7	1/2	0	0	1/2	y_{14}	15	1/4	1/4	1/4	1/4	y_{1234}
8	0	1/2	1/2	0	y_{23}						

D-оптимальные планы. Среди различных критериев оптимальности, как отмечалось, важнейшими являются критерии *D*- и *G*-оптимальности. Как известно, *D*-оптимальный план обеспечивает для заданного числа опытов наилучшую точность оценок коэффициентов модели. Свойство *G*-оптимальности плана обеспечивает минимум максимальной дисперсии предсказанных значений рассматриваемого свойства в области исследования. Симплекс-решетчатые планы обладают свойствами *D*- и *G*-оптимальности только при построении полиномов второго и неполного третьего порядка. Планы Шеффе более высокого порядка не являются *D*- оптимальными; *D*-оптимальная симплексная решетка для полинома третьего порядка была построена Ж. Кифером.

Для множества планов с координатами точек $x_i = 1$, $x_l = x_s = 0$; $x_i = 1 - x_l = c$, $x_s = 0$, $c < 0{,}5$; $x_i = x_l = x_s = 1/3$ при построении полинома третьего порядка план будет *D*-оптимальным для $c = (1 - \sqrt{5})/2$, т. е. точки на сторонах симплекса должны иметь координаты $x_i = 0{,}2764$, $x_l = 0{,}7236$. Число точек плана, так же как и для решетки Шеффе, $C_{k+\mu-1}^{\mu}$. *D*-оптимальный план третьего порядка для трехкомпонентной смеси приведен в табл. 11.11.

Таблица 11.11

№ опыта	x_1	x_2	x_3	y	№ опыта	x_1	x_2	x_3	y
1	1	0	0	y_1	6	0,7236	0	0,2764	y_{113}
2	0	1	0	y_2	7	0,2764	0	0,7236	y_{133}
3	0	0	1	y_3	8	0,	0,7236	0,2764	y_{223}
4	0,7236	0,2764	0	y_{112}	9	0,	0,2764	0,7236	y_{233}
5	0,2764	0,7236	0	y_{122}	10	0,333	0,3333	0,3333	y_{123}

При использовании полинома четвертого порядка для трехкомпонентной смеси план будет *D*-оптимальным, если

$$x_i = (7 - \sqrt{21})/14;\ x_l = 1 - x_j;\quad x_s = 0$$

или

$$x_j = 0{,}1727,\ x_l = 0{,}8273;\ x_s = 0.$$

Кроме того, в *D*-оптимальном плане четвертого порядка имеются точки с координатами

$$x_i = x_l = (7 - \sqrt{5})/22;\quad x_s = 1 - (x_i + x_l)$$

или $x_j = x_l = 0{,}2165$; $x_s = 0{,}567$.

D-оптимальный план четвертого порядка для трехкомпонентной смеси приведен в табл. 11.12.

Таблица 11.12

№ опыта	x_1	x_2	x_3	y	№ опыта	x_1	x_2	x_3	y
1	1	0	0	y_1	9	0,8273	0	0,1727	y_{1113}
2	0	1	0	y_2	10	0,1727	0	0,8273	y_{1333}
3	0	0	1	y_3	11	0	0,8273	0,1727	y_{2223}
4	0,5	0,5	0	y_{12}	12	0	0,1727	0,8273	y_{2333}
5	0,5	0	0,5	y_{13}	13	0,567	0,2165	0,2165	y_{1123}
6	0	0,5	0,5	y_{23}	14	0,2165	0,567	0,2165	y_{1223}
7	0,8273	0,1727	0	y_{1112}	15	0,2165	0,2165	0,567	y_{1233}
8	0,1727	0,8273	0	y_{1222}					

D-оптимальные планы различных степеней для трехкомпонентных смесей показаны на рис. 11.11, *а—г.*

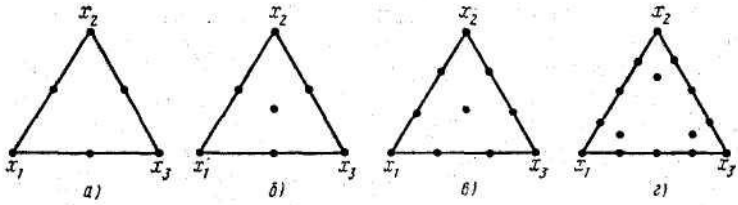


Рис. 11.11

Как видно из рисунка, здесь так же, как и для симплекс-решетчатых планов, возможна композиционная достройка плана от второй степени до четвертой, для перехода от третьей степени к четвертой необходимо проделать опыты заново. Для описания свойств смеси для *D*-оптимальных, как и для симплекс-решетчатых планов, используются приведенные полиномы соответствующих степеней.

Планирование эксперимента на локальных участках исследуемой области. При исследовании локальных участков факторного пространства выбор плана эксперимента определяется прежде всего формой заданной области эксперимента. Здесь возможны следующие варианты:

1) исследуемая область — симплекс или может быть сведена к симплексу (число вершин $NM = k$);

2) исследуемая область — многогранник (число вершин $NM > k$);

3) исследуемая область — куб (гиперкуб) или параллелепипед (число вершин $NM = 2^{k-1}$).

Рассмотрим последовательно все варианты.

Если наложенные на концентрации компонентов ограничения таковы (например, односторонние), что число вершин полученного многогранника NM совпадает с числом компонентов смеси k, то многогранник является симплексом (хотя и неправильным) и можно использовать описанные планы на симплексе. Это возможно также и в тех случаях, когда внутри полученного многогранника $(NM > k)$ удается выделить подобласть в виде симплекса, например путем выбора из NM вершин многогранника k вершин локального симплекса на основе априорной информации или интуиции разработчика. Для перевода плана, построенного на полном концентрационном симплексе, на локальный участок вершины локального симплекса A_i, $i = \overline{1, k}$ с координатами

$$A_1 (x_1^{(1)}, x_2^{(1)}, \ldots, x_k^{(1)}); \; A_2 (x_1^{(2)}, x_2^{(2)} \ldots, x_k^{(2)}); \ldots;$$
$$A_k (x_1^{(k)}, x_2^{(k)}, \ldots, x_k^{(k)})$$

принимают за самостоятельные псевдокомпоненты

$$z_i: \; 0 \leqslant z_j \leqslant 1; \; \sum_{j=1}^{n} z_j = 1.$$

Относительно новых переменных $z_1, z_2, \ldots, z_k$ могут быть построены все ранее описанные планы. Для любой n-й точки построенного плана переход от псевдокоординат z_j к исходным координатам x_j осуществляют по формуле

$$x_j^{(n)} = x_j^{(1)} + z_2^{(n)}\,(x_j^{(2)} - x_j^{(1)}) + z_3^{(n)}\,(x_j^{(3)} - x_j^{(1)}) + \ldots$$
$$\ldots + z_k^{(n)}\,(x_j^{(k)} - x_j^{(1)}),$$

где x_j — содержание j-го компонента в вершине z_i (A_i).

Примеры построения плана в псевдокоординатах и перевода его на локальный симплекс, т. е. в первоначальные координаты, приведены в табл. 11.13.

Таблица 11.13

№ опыта	z_1	z_2	z_3	x_1	x_2	x_3
1	1	0	0	0,86	0	0,14
2	0	1	0	0	0,78	0,22
3	0	0	1	0,78	0	0,22
4	0,5	0,5	0	0,43	0,39	0,18
5	0,5	0	0,5	0,82	0	0,18
6	0	0,5	0,5	0,39	0,39	0,22
7	0,333	0,333	0,333	0,546	0,259	0,193

Изображение локальной области приведено на рис. 11.12.

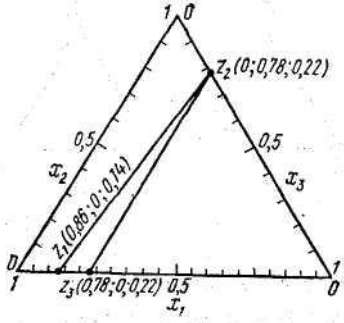


Рис. 11.12

Исследованию в данной трехкомпонентной смеси подвергался не весь концентрационный треугольник, а лишь подобласть в виде треугольника с вершинами: z_1 (0,86; 0; 0,14); z_2(0; 0,78; 0,22); z_3 (0,78; 0; 0,22).

В общем случае наложенные на концентрации компонентов двусторонние ограничения высекают в полном концентрационном симплексе многогранник с числом вершин $NM > k$. Определение числа

и координат вершин локальной области по заданным ограничениям производят при постановке задачи (задание области исследования). План непосредственно на многограннике, предложенный Р. Мак Лином и В. Андерсеном, включает кроме вершин многогранника центры двух-, трех-....., (k — 1)-мерных граней многогранника и его центр.

Таблица 11.14

№ опыта	x_1	x_2	x_3	x_4
1	0,4	0,1	0,47	0,03
2	0,4	0,1	0,42	0,08
3	0,6	0,1	0,27	0,03
4	0,6	0,1	0,22	0,08
5	0,4	0,47	0,1	0,03
6	0,4	0,42	0,1	0,08
7	0,6	0,27	0,1	0,03
8	0,6	0,22	0,1	0,08

Таблица 11.15

№ опыта	x_1	x_2	x_3	x_4	№ вершин, образующих грань
9	0,5	0,1	0,345	0,055	1, 2, 3, 4
10	0,5	0,345	0,1	0,055	5, 6, 7, 8
11	0,4	0,2725	0,2725	0,055	1, 2, 5, 6
12	0,6	0,1725	0,1725	0,055	3, 4, 7, 8
13	0,5	0,235	0,235	0,03	1, 3, 5, 7
14	0,5	0,21	0,21	0,08	2, 4, 6, 8
15	0,5	0,2225	0,2225	0,05	Центр многогранника

Координаты центров граней находят путем усреднения координат точек, образующих грань, координаты центра — путем усреднения соответствующих координат всех вершин многогранника. Пример построения плана на многограннике для четырехкомпонентной смеси представлен в табл. 11.14 и 11.15, где исследуется смесь со следующими ограничениями на изменения концентраций компонентов:

$$0{,}4 \leqslant x_1 \leqslant 0{,}6;\ 0{,}1 \leqslant x_2 \leqslant 0{,}5;\ \ 0{,}1 \leqslant x_3 \leqslant 0{,}5;\ \ 0{,}03 \leqslant x_4 \leqslant 0{,}08.$$

Данные ограничения образуют многогранник с восемью вершинами, координаты которых представлены в табл. 11.14, а центры граней — в табл. 11.15.

В план на многограннике Мак Лина и Андерсена входят кроме вершин центры граней. Координаты центров граней (с указанием номеров вершин, образующих грань), а также центра полученного многогранника приведены в табл. 11.16.

Таблица 11.16

№ опыта	x_1	x_2	x_3	x_4
1	0,05	0,1	0,2	0,65
2	0,1	0,1	0,2	0,6
3	0,05	0,2	0,2	0,55
4	0,1	0,2	0,2	0,5
5	0,05	0,1	0,4	0,45
6	0,1	0,1	0,4	0,4
7	0,05	0,2	0,4	0,35
8	0,1	0,2	0,4	0,3

Таким образом, полученный план (табл. 11.14 и 11.15) содержит 15 опытов.

Для описания результатов эксперимента, проведенного по плану Мак Лина и Андерсена, используют приведенный полином, включающий кроме линейных членов все возможные слагаемые взаимодействия k компонентов от парных до k -х включительно [всего $(2^k — 1)$ член]. С ростом числа компонентов смеси число комбинаций условий эксперимента в плане быстро растет и становится значительно больше числа коэффициентов модели. Для сокращения числа опытов плана можно исключить центры некоторых граней (например, из соображения равномерности распределения оставшихся точек) или производить с помощью ЭВМ выбор точек плана и множества точек для выбранной модели в соответствии с каким-либо критерием оптимальности плана (например, *D*-оптимальности).

При исследовании локальных участков факторного пространства эксперимента иногда возможен случай, когда ограничения налагают не на все, а лишь на $(k — 1)$ компонент смеси. Один из компонентов (обычно это основа смеси) можно рассматривать как достройку системы до 1 или 100%. В этом случае число вершин многогранника равно 2^{2k-1} и задача может решаться как в симплексной (барицентрической), так и в независимой (ортогональной) системе координат размерности $k — 1$, а многогранник преобразуется в куб или параллелепипед. При этом необходимо, чтобы сумма верхних пределов изменения концентраций компонентов, на которые наложены ограничения, не должна превышать 1 или 100%.

Рассмотрим пример такой задачи. Пусть имеется четырехкомпонентная смесь со следующими ограничениями на изменения концентрации компонентов:

$$0{,}05 \leqslant x_1 \leqslant 0{,}1;\ 0{,}1 \leqslant x_2 \leqslant 0{,}2;\ 0{,}2 \leqslant x_3 \leqslant 0{,}4;\ 0 \leqslant x_4 \leqslant 1.$$

Компонент x_4 является основой смеси и рассматривается как достройка смеси до 1 (имеет ограничения от 0 до 1). Решаем эту задачу сначала в симплексной системе координат. Построив вершины многогранника, получим 8 вершин (табл. 11.16), центры граней многогранника приведены в табл. 11.17. Поскольку на четвертый компонент не наложены ограничения и верхние границы изменений концентраций компонентов x_1, x_2 и x_3 образуют сумму 0,1 + 0,2 + 0,4 = 0,7 < 1, полученный многогранник может быть преобразован в куб. Для этого кодируют нижнюю и верхнюю границы первых трех компонентов через —1 и +1 соответственно (как это принято для задач с независимыми переменными) и выбирают из каталога план второго порядка для трехпеременных типа *B,* наиболее близких к *D*-оптимальному и достаточно экономичный по числу опытов. Выбранный план представлен в левой части табл. 11.18. Перевод плана в натуральные единицы (концентрации компонентов) приведен в правой части табл. 11.18. Содержание компонента x_4 рассчитано как добавка концентраций x_1,x_2 и x_3 до 1 или 100%. Как видно из сравнения правой части табл. 11.18 с табл. 11.16 и 11.17, планы, построенные двумя способами, совпадают.

Построение математической модели. После проведения эксперимента и получения значений отклика для каждого заданного планом состава смеси производят вычисление коэффициентов соответствующего плану полинома.

Таблица 11.17

№ опыта	x_1	x_2	x_3	x_4	№ вершин, образующих грань
9	0,075	0,15	0,2	0,575	1, 2, 3, 4
10	0,075	0,15	0,4	0,375	5, 6, 7, 8
11	0,075	0,1	0,3	0,525	1, 2, 5, 6
12	0,075	0,2	0,3	0,425	3, 4, 7, 8
13	0,05	0,05	0,3	0,5	1, 3, 5, 7
14	0,1	0,15	0,3	0,45	2, 4, 6, 8
15	0,075	0,15	0,3	0,475	Центр многогранника

Таблица 11.18

№ опыта	z_1	z_2	z_3	x_1	x_2	x_3	x_4
1	−1	−1	−1	0,05	0,1	0,2	0,65
2	+1	−1	−1	0,1	0,1	0,2	0,6
3	−1	+1	−1	0,05	0,2	0,2	0,55
4	+1	+1	−1	0,1	0,2	0,2	0,5
5	−1	−1	+1	0,05	0,1	0,4	0,45
6	+1	−1	+1	0,1	0,1	0,4	0,4
7	−1	+1	+1	0,05	0,2	0,4	0,35
8	+1	+1	+1	0,1	0,2	0,4	0,30
9	−1	0	0	0,05	0,15	0,3	0,45
10	+1	0	0	0,1	0,15	0,3	0,45
11	0	−1	0	0,075	0,1	0,3	0,525
12	0	+1	0	0,075	0,2	0,3	0,425
13	0	0	−1	0,075	0,15	0,2	0,575
14	0	0	+1	0,075	0,15	0,4	0,375
15	0	0	0	0,075	0,15	0,3	0,475

При этом коэффициенты рассчитывают в зависимости от вида плана, т. е. строится план на полном симплексе или для исследования локального участка.

Для планов на полном симплексе используют свойство насыщенности плана, что существенно упрощает задачу. Рассмотрим расчет коэффициентов полинома на примере приведенной модели второго порядка для трех компонентов:

$$\widehat{y} = \beta_1 x_1 + \beta_2 x_2 + \beta_3 x_3 + \beta_{12} x_1 x_2 + \beta_{13} x_1 x_3 + \beta_{23} x_2 x_3.$$

Если последовательно подставлять в уравнение координаты всех шести точек симплекс-решетчатого плана эксперимента, представленного в табл. 11.9, то при подстановке координат первой точки *(x_1=1, x_2=0, x_3=0)* получим $y_1=\beta_1$ и соответственно $\beta_2= y_2$, $\beta_3= y_3$.

При подстановке в уравнение координат четвертой точки найдем

$$y = 0{,}5\beta_1 + 0{,}5\beta_2 + 0{,}25\ \beta_{12}.$$

Так как

$$\beta_j = y_j, \text{ то } y_{12} = 0{,}5\, y_1 + 0{,}5\, y_2 + 0{,}25\, \beta_{12}.$$

Отсюда

$$\beta_{12} = 4y_{12} - 2y_1 - 2y_2.$$

Соответственно

$$\beta_{13} = 4y_{13} - 2y_1 - 2y_3; \quad \beta_{23} = 4y_{23} - 2y_2 - 2y_3.$$

Три точки определяющие коэффициент β_{jl}, лежат на одном ребре. Аналогично определяют коэффициенты полинома второго порядка

$$\widehat{y} = \sum_{1 \leqslant j \leqslant k} \beta_j x_j + \sum_{1 \leqslant j < l \leqslant k} \beta_{jl} x_j x_l$$

для *k*-компонентной смеси:

$$\beta_j = y_j; \quad \beta_{jl} = 4y_{jl} - 2y_j - 2y_l.$$

Также выводят соотношения для расчета коэффициентов любого приведенного полинома при любом числе компонентов. Так, для полинома неполного третьего порядка для трехкомпонентной смеси

$$\widehat{y} = \beta_1 x_1 + \beta_2 x_2 + \beta_3 x_3 + \beta_{12} x_1 x_2 + \beta_{13} x_1 x_3 + \\ + \beta_{23} x_2 x_3 + \beta_{123} x_1 x_2 x_3;$$

$$\beta_j = y_j; \quad \beta_{12} = 4y_{12} - 2y_1 - 2y_2 \text{ и т. д.},$$

для *k* -компонентной смеси

$$\widehat{y} = \sum_{1 \leqslant j \leqslant k} \beta_j x_j + \sum_{1 \leqslant j < l \leqslant k} \beta_{jl} x_j x_l + \sum_{1 \leqslant j < l < s \leqslant k} \beta_{jls} x_j x_l x_s;$$

$$\beta_j = y_j;$$

$$\beta_{jl} = 4y_{jl} - 2y_j - 2y_l;$$

$$\beta_{jls} = 27y_{jls} - 12(y_{jl} + y_{js} + y_{ls}) + 3(y_j + y_l + y_s).$$

Для других планов на полном симплексе (центроидных, *D*-оптимальных и т. п.) для определения коэффициентов полинома производят аналогичную процедуру последовательной подстановки в уравнение регрессии координат экспериментальных точек. Для коэффициентов полинома, полученного по симплекс-центроидному плану, существует следующая общая формула:

$$\beta_{jl\ldots} = r \sum^{r} (-1)^{r-t} t^{r-1} SS_t,$$

где r — число индексов коэффициента $\beta_{jl\ldots}$; SS_t — сумма результатов опытов всех смесей из t компонентов, взятых в равных пропорциях $(1/t)$. Например, для коэффициента β_{jls} $r = 3)$ (j, l, s)

$$y_j + y_l + y_s = SS_1 \text{ при } 1/t = 1;$$

$$y_{jl} + y_{ls} + y_{js} = SS_2 \text{ при } 1/t = 1/2;$$

$$y_{jls} = SS_3 \text{ при } 1/t = 1/3.$$

Таким образом

$$\beta_{jls} = 3\,[(-1)^{3-1}\,1^{3-1}\,SS_1 + (-1)^{3-2}\,2^{3-1}\,SS_2 + \\ + (-1)^{3-3}\,3^{3-1}\,SS_3] = 3\,[(y_j + y_l + y_s) - \\ -4\,(y_{jl} + y_{js} + y_{ls}) + 9y_{jls}].$$

Для *D*-оптимального плана четвертого порядка в трех компонентной системе по плану, представленному в табл. 11.12, уравнение регрессии имеет вид

$$\widehat{y} = \beta_1 x_1 + \beta_2 x_2 + \beta_3 x_3 + \beta_{12} x_1 x_2 + \beta_{13} x_1 x_3 + \\ + \beta_{23} x_2 x_3 + \nu_{12} x_1 x_2 (x_1 - x_2) + \nu_{13} x_1 x_3 (x_1 - x_3) + \\ + \nu_{23} x_2 x_3 (x_2 - x_3) + \delta_{12} x_1 x_2 (x_1 - x_2)^2 + \\ + \delta_{13} x_1 x_3 (x_1 - x_3)^2 + \delta_{23} x_2 x_3 (x_2 - x_3)^2 + \beta_{1123} x_1^2 x_2 x_3 + \\ + \beta_{1223} x_1 x_2^2 x_3 + \beta_{1233} x_1 x_2 x_3^2.$$

Коэффициенты полинома четвертого порядка, полученные подстановкой координат экспериментальных точек в уравнение регрессии, имеют следующий вид:

$$\beta_j = y_j;$$

$$\beta_{jl} = 4y_{jl} - 2y_j - 2y_l,$$

$$\nu_{jl} = \frac{7}{6}\,[3\,(-y_j + y_l) + \sqrt{21}\,(y_{jjjl} - y_{jlll})];$$

$$\delta_{jl} = \frac{7}{6}\,[-3\,(y_j + y_l) - 8y_{jl} + 7\,(y_{jjjl} + y_{jlll})];$$

$$\beta_{jjls} = 26{,}657y_j - 6{,}167\,(y_l + y_s) - 16{,}96\,(y_{jl} + y_{js}) + \\ + 0{,}511y_{ls} - 32{,}18\,(y_{jjjl} + y_{jjls}) + 17{,}196\,(y_{jll} + y_{jss}) + \\ + 5{,}72\,(y_{lls} + y_{lss}) + 84{,}11y_{jjls} - 23.237\,(y_{jjls} + y_{jlss}),$$

где

$$j \neq l \neq s;\ j, l, s = 1, 2, 3.$$

Если исследуется локальная область факторного пространства в виде симплекса, то после реализации выбранного плана эксперимента рассчитывают коэффициенты уравнения регрессии $\widehat{y} = f(z_1, z_2, \ldots, z_h)$ в координатах псевдокомпонентов, используя приведенные формулы для соответствующих планов, полученные подстановкой в уравнение регрессии координат точек плана.

После проверки адекватности полученной модели для более удобного ее практического использования модель записывают в исходной

системе координат с помощью формул перевода координат из одной системы в другую:

$$z_1 = z_1^{(1)} + x_2(z_1^{(2)} - z_1^{(1)}) + x_3(z_1^{(3)} - z_1^{(1)}) + \ldots + x_k(z_1^{(k)} - z_1^{(1)});$$

$$z_2 = z_2^{(1)} + x_2(z_2^{(2)} - z_2^{(1)}) + x_3(z_2^{(3)} - z_2^{(1)}) + \ldots + x_k(z_2^{(k)} - z_2^{(1)});$$

. . . . . .

$$z_{k-1} = z_{k-1}^{(1)} + x_2(z_{k-1}^{(2)} - z_{k-1}^{(1)}) + x_3(z_{k-1}^{(3)} - z_{k-1}^{(1)}) + \ldots + x_k(z_{k-1}^{(k)} - z_{k-1}^{(1)}).$$

Значения $z_j^{(l)}$ находят при решении $(k - 1)$ систем уравнений:

$$x_1^{(1)} z_1^{(1)} + x_2^{(1)} z_1^{(2)} + x_3^{(1)} z_1^{(3)} + \ldots + x_k^{(1)} z_1^{(k)} = 1;$$

$$x_1^{(2)} z_1^{(1)} + x_2^{(2)} z_1^{(2)} + x_3^{(2)} z_1^{(3)} + \ldots + x_k^{(2)} z_1^{(k)} = 0;$$

. . . . . .

$$x_1^{(k)} z_1^{(1)} + x_2^{(k)} z_1^{(2)} + x_3^{(k)} z_1^{(3)} + \ldots + x_k^{(k)} z_1^{(k)} = 0;$$

$$x_1^{(1)} z_2^{(1)} + x_2^{(1)} z_2^{(2)} + x_3^{(1)} z_2^{(3)} + \ldots + x_k^{(1)} z_2^{(k)} = 0;$$

$$x_1^{(2)} z_2^{(1)} + x_2^{(2)} z_2^{(2)} + x_3^{(2)} z_2^{(3)} + \ldots + x_k^{(2)} z_2^{(k)} = 1;$$

. . . . . .

$$x_1^{(k)} z_2^{(1)} + x_k^{(k)} z_2^{(2)} + x_3^{(k)} z_2^{(3)} + \ldots + x_k^{(k)} z_2^{(k)} = 0;$$

$$x_1^{(1)} z_{k-1}^{(1)} + x_2^{(1)} z_{k-1}^{(2)} + x_3^{(1)} z_{k-1}^{(3)} + \ldots + x_k^{(1)} z_{k-1}^{(k)} = 0;$$

$$x_1^{(2)} z_{k-1}^{(1)} + x_2^{(2)} z_{k-1}^{(2)} + x_3^{(2)} z_{k-1}^{(3)} + \ldots + x_k^{(2)} z_{k-1}^{(k)} = 0;$$

. . . . . .

$$\bar{x}_1^{(k)} z_{k-1}^{(1)} + x_2^{(k)} z_{k-1}^{(2)} + x_3^{(k)} z_3^{(k)} z_{k-1}^{(3)} + \ldots + x_k^{(k)} z_{k-1}^{(k)} = 1,$$

где $z_j^{(l)}$ — содержание псевдокомпонента z_j в вершинах исходного симплекса; $z_j^{(l)}$ — содержание j-го компонента в вершинах

$$z_l(A_l);\ l = 1,2,\ldots,k.$$

Поскольку такой перевод координат возможен только для уравнений с независимыми переменными, исходное уравнение регрессии необходимо преобразовать, исключив одну переменную, например последнюю,

$$z_k = 1 - \sum_{j=1}^{k-1} z_j.$$

Для построения математической модели по результатам экспериментов, проведенных по плану на локальном многограннике в связи с тем, что эти планы обычно ненасыщенные (число опытов больше числа коэффициентов модели), используют метод наименьших квадратов, модель строят непосредственно в координатах исходных компонентов. Алгоритм метода наименьших квадратов реализуют в виде программы на ЭВМ.

Проверка адекватности математической модели. После определения коэффициентов уравнения регрессии необходимо провести статистический анализ полученных результатов: проверить адекватность уравнения и построить доверительные интервалы значений отклика, предсказываемых по уравнению регрессии.

При постановке эксперимента по планам на симплексах (решетчатым, центроидным, *D*-оптимальным и др.) из-за их насыщенности степени свободы, необходимые для проверки адекватности уравнения, отсутствуют. Поэтому для проверки адекватности уравнения ставят опыты в дополнительных, так называемых контрольных точках. Эти точки обычно выбирают так, чтобы предусмотреть возможность их использования для построения модели более высокого порядка, если полученное уравнение окажется неадекватным.

Точность предсказаний отклика в различных точках симплекса различна и зависит от координат точек. Дисперсию предсказанного значения отклика определяют по закону накопления ошибок. Рассмотрим расчет дисперсии предсказанных значений отклика на примере модели второго порядка для трехкомпонентной смеси:

$$\widehat{y} = \beta_1 x_1 + \beta_2 x_2 + \beta_3 x_3 + \beta_{12} x_1 x_2 + \beta_{13} x_1 x_3 + \beta_{23} x_2 x_3.$$

Предположим, что значения откликов являются результатом усреднения n_j и n_{jl} параллельных опытов в соответствующих точках симплекса, а дисперсия воспроизводимости опыта s^2_y во всех точках плана одинакова. Так как дисперсия среднего в n раз меньше дисперсии отдельных наблюдений экспериментальных значений откликов, то

$$s^2_{\bar{y}_j} = s^2_y/n_j; \quad s^2_{\bar{y}_{jl}} = s^2_y/n_{jl}.$$

Заменив в приведенном полиноме второго порядка коэффициенты их выражениями через отклики

$$(\beta_j = \bar{y}_j; \ \beta_{jl} = 4\bar{y}_{jl} - 2\bar{y}_j - 2\bar{y}_l),$$

Получим

$$\widehat{y} = \bar{y}_1 x_1 + \bar{y}_2 x_2 + \bar{y}_3 x_3 + (4\bar{y}_{12} - 2\bar{y}_1 - 2\bar{y}_2) x_1 x_2 +$$
$$+ (4\bar{y}_{13} - 2\bar{y}_1 - 2\bar{y}_3) x_1 x_3 + (4\bar{y}_{23} - 2\bar{y}_2 - 2\bar{y}_3) x_2 x_3 =$$
$$= \bar{y}_1 (x_1 - 2x_1 x_2 - 2x_1 x_3) + \bar{y}_2 (x_2 - 2x_1 x_2 - 2x_2 x_3) +$$
$$+ \bar{y}_3 (x_3 - 2x_1 x_3 - 2x_2 x_3) + 4\bar{y}_{12} x_1 x_2 + 4\bar{y}_{13} x_1 x_3 +$$
$$+ 4\bar{y}_{23} x_2 x_3.$$

По условию $x_1 + x_2 + x_3 = 1$, преобразуем коэффициенты при $\bar{y}_j$:

$$x_1 - 2x_1 x_2 - 2x_1 x_3 = x_1 - 2x_1 (x_2 + x_3) = x_1 - 2x_1 (1 - x_1) =$$
$$= x_1 (2x_1 - 1) \text{ и т. д.}$$

В результате найдем

$$\widehat{y} = x_1 (2x_1 - 1) \bar{y}_1 + x_2 (2x_2 - 1) \bar{y}_2 + x_3 (2x_3 - 1) \bar{y}_3 +$$
$$+ 4x_1 x_2 \bar{y}_{12} + 4x_1 x_3 \bar{y}_{13} + 4x_2 x_3 \bar{y}_{23}.$$

Введя обозначения

$$a_j = x_j (2x_j - 1); \; a_{jl} = 4x_j x_l,$$

с учетом приведенных выражений для $s^2_{\bar{y}_j}$ и $s^2_{\bar{y}_{jl}}$, получим выражение для дисперсии уравнения регрессии $s^2_{\widehat{y}}$:

$$s^2_{\widehat{y}} = s^2_y \left(\sum_{1 \leqslant j \leqslant k} \frac{a_j^2}{n_j} + \sum_{1 \leqslant j < l \leqslant k} \frac{a_{jl}^2}{n_{jl}} \right)$$

Аналогично могут быть определены выражения для дисперсий полиномов различных степеней. Так, для модели неполного третьего порядка выражение для оценки дисперсии уравнения регрессии принимает вид

$$s^2_{\widehat{y}} = s^2_y \left(\sum_{1 \leqslant j \leqslant k} \frac{b_j^2}{n_j} + \sum_{1 \leqslant j < l \leqslant k} \frac{b_{jl}^2}{n_{jl}} + \sum_{1 \leqslant j < l < s \leqslant k} \frac{b_{jls}^2}{n_{jls}} \right),$$

где

$$b_j = \frac{1}{2} x_j (6x_j^2 - 2x_j + 1) - 3 \sum_{l=1}^{a} x_l^2;$$

$$b_{jl} = 4x_j x_l (3x_j + 3x_l - 2); \; b_{jls} = 27 x_j x_l x_s.$$

Часто число параллельных опытов во всех точках плана принимают одинаковым и равным n, т. е. $n_j = n_{jl} = n$. Тогда формулу для оценки дисперсии уравнения регрессии можно записать так:

$$s^2_{\hat{y}} = s^2_y \frac{\xi}{n},$$

где s^2_y — оценка дисперсии воспроизводимости опыта; ξ— параметр, зависящий от степени полинома. Для полинома второго порядка для полинома неполного третьего порядка

$$\xi = \sum_{1 \leqslant j < k} a_j^2 + \sum_{1 \leqslant j < l \leqslant k} a_{jl}^2,$$

Так как величина ξ зависит только от состава смесей, то для трехкомпонентных смесей можно заранее построить линии равного значения ξ для полиномов различных степеней. Изолинии для полиномов второго и неполного третьего порядка представлены на рис. 11.13, *а, б*.

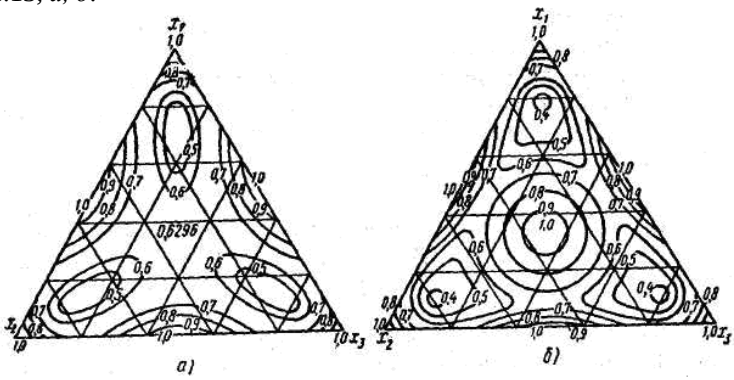


Рис. 11.13

Зная s^2_y и n, легко найти оценку дисперсии предсказанных значений отклика в любой точке диаграммы состав-свойство, воспользовавшись соответствующим значением ξ, полученным по графику изолиний. Проверку адекватности проводят в каждой контрольной точке. Для этого составляют отношение

$$t = \frac{\Delta y}{\sqrt{s^2_{\bar{y}} + s^2_{\hat{u}}}} = \frac{\Delta y \sqrt{n}}{s^2_y \sqrt{1+\xi}},$$

где

$$\Delta y = \bar{y}_{\text{эксп}} - y_{\text{расч}}.$$

Значение t, распределенное по закону Стьюдента, сравнивают с табличным значением t, выбранным для уровней значимости $\alpha/2m$ (m — число контрольных точек) и числа степеней свободы оценки дисперсии воспроизводимости опыта.

Гипотеза об адекватности уравнения принимается, если экспериментальное значение t меньше табличного ($t_{эксп} < t_{табл}$) для всех контрольных точек.

Построение доверительных интервалов для значений отклика в различных точках концентрационного симплекса производят следующим образом:

$$\hat{y} - \Delta \leqslant y \leqslant \hat{y} + \Delta; \quad \Delta = t_{\alpha/k,f} s_{\hat{y}},$$

где $t_{\alpha/k,f}$—табличное значение t-критерия Стьюдента для уровня значимости α/k(k — число коэффициентов регрессии) и числа степеней свободы оценки дисперсии воспроизводимости опыта f. При одинаковом числе параллельных опытов в каждой точке для трехкомпонентных диаграмм для определения y можно воспользоваться картами для изолиний :

$$\Delta = t_{\alpha/k,f} \frac{s_y}{\sqrt{n}} \xi^{0.5}.$$

Построение диаграмм состав—свойство и поиск оптимальных составов смеси. Полученные уравнения регрессии, связывающие отклики с составами смесей, позволяют рассчитать параметры смеси любого состава и построить диаграммы состав—свойство, представляющие собой изолинии равных параметров, изображенные на концентрационном симплексе или его сечениях для многокомпонентных смесей.

Для построения диаграмм и поиска оптимальных составов смеси с экстремальным параметром можно использовать метод сеток. При этом по уравнению регрессии рассчитывают значения параметра во всех точках концентрационной сетки, построенной с заданным шагом на исследуемой области.

Для уравнений регрессии второго порядка при построении диаграмм и поиске оптимальных составов удобно использовать канонический вид уравнения, позволяющий определить вид поверхности отклика и достаточно просто построить их изолинии, а также найти координаты экстремальных точек. Эти вопросы подробно рассматриваются в курсе аналитической геометрии. При решении сложных задач оптимизации составов многокомпонентных смесей, когда имеется несколько откликов, для одного из них (наиболее важного) находится максимум или минимум. Другие целевые функции являются односторонними («не более» или «не менее») или являются двусторонними («от» и «до») ограничениями. В этом случае используют различные алгоритмы поиска экстремума (рассмотрены ранее), реализованные на ЭВМ. Для построения диаграмм состав—свойство используют программы вывода графической информации.

12. Оптимизация испытаний в производственных условиях

12.1 Эволюционное планирование

Особую ценность методы оптимизации приобретают при их применении непосредственно в производственных условиях. В результате оптимизации объектов улучшаются технические параметры готовой продукции и уменьшаются экономические затраты.

Особенности оптимизации в производственных условиях. В производственных условиях невозможно контролировать все множество факторов. Кроме того, не все факторы поддаются контролю по различным метрологическим причинам. В результате существует значительное подмножество неконтролируемых факторов, которые затрудняют оценку откликов за счет смещения и искажения поверхности отклика. Поэтому необходимо периодически варьировать контролируемые факторы *x*. При этом следует:

а) изменять факторы x_i только в интервале, разрешаемом технической документацией, который, как правило, невелик;

б) учитывать возникновение большого шумового поля, причиной которого является ошибка эксперимента и влияние неконтролируемых факторов.

Таким образом, возникает необходимость выделения слабого сигнала на фоне шума. При этом следует использовать метод накопления результатов измерения. ***Для этого необходимо слегка «покачивать» объект, изменяя независимые переменные в малом интервале.*** Процесс оптимизации должен быть организован так, чтобы можно было получать не только годную продукцию, но и информацию о поверхности отклика и о местонахождении оптимума.

Изменение условий производства приводит к изменению поверхности отклика и местонахождения оптимума. Исследователь должен учитывать это, т. е. осуществлять ***адаптационную оптимизацию***.

Примером адаптационной оптимизации объектов является разработанный Дж. Боксом ***метод эволюционного планирования (ЭВОП)***. Суть метода заключается в том, что путем незначительного изменения режимов, постоянно вносимого в объект, получают информацию, используемую для поиска оптимальных режимов процесса. В результате затруднительно построить математическую модель объекта, поэтому ***метод ЭВОП, как и метод симплексного планирования, своей целью ставит только поиск оптимальных режимов объекта.***

Существенной особенностью метода ЭВОП является возможность надежного выявления малых изменений целевой функции на фоне шумов, что достигается путем повторения опытов плана эксперимента n раз. При этом среднеквадратичная ошибка среднего из n независимых измерений оказывается в $\sqrt{n}$ раз меньше среднеквадратичной ошибки единичного измерения.

Алгоритм метода ЭВОП. Алгоритм данного метода имеет много общего с ранее рассмотренными.

На этапе планирования выбирают:

1) ограниченное число факторов (2—4), наиболее важных для данного объекта;

2) начальную точку x_0, около которой осуществляют варьирование факторов;

3) интервал варьирования $\Delta x_j \quad (j = \overline{1, k})$ с учетом особенностей производственных условий;

4) план эксперимента либо ПФЭ типа 2^k (k = 2, 3), либо 2^{k-1} (k = 3, 4) с одной или двумя центральными точками (двумя — при разбиении факторного эксперимента на два ортогональных блока).

Таким образом, число операционных условий

$$N = 2^k + (k\text{-}1); \quad k=2,3;$$

$$N=2^{k-1}+(k-1); \quad k=3, 4,$$

т. е. для k = 2, N = 5, причем один опыт в центре (для плана ПФЭ).

Проведение эксперимента по методу ЭВОП имеет особенности, так как необходимо выделить значимые изменения отклика на фоне его шумовых флуктуаций. Эксперимент проводят до тех пор, пока не добиваются существенного изменения целевой функции y. На этом заканчивается часть эксперимента, называемая ***фазой***. Каждая фаза состоит из n циклов, в каждом из которых выполняется $N = 2^k+(k-1)$ опытов (рис. 12.1).

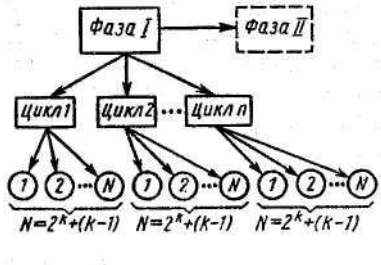


Рис. 12.1

По данным эксперимента первой фазы определяют направление градиента к оптимальному режиму. По результатам каждого цикла заполняют табл. 11.7. Анализ данных таблицы заключается в вычислении ошибки эксперимента (среднеквадратичного отклонения) и доверительных интервалов эффектов и последующем сравнении их с эффектом того или иного фактора. Если доверительный интервал фактора после *n*-го цикла больше его эффекта, то заметного изменения отклика при варьировании этого фактора не происходит, и наоборот, если доверительный интервал меньше эффекта, то наблюдается заметное изменение отклика и необходимо переходить к следующим операционным условиям. Разность (табл. 12.1)

$$D_l = \left(\frac{1}{n-1} \sum_{i=1}^{n-1} y_{li} \right) - y_{ln}, \quad l = \overline{1,N},$$

где y_{li} — наблюдение отклика в *l-м* опыте и в *i* –м цикле; n — число циклов.

Поскольку дисперсия суммы независимых случайных величин равна сумме дисперсий, а дисперсия произведения случайной величины на постоянную равна квадрату постоянной, умноженной на дисперсию случайной величины, то

$$\sigma_{D_l}^2 = \left(\frac{1}{(n-1)^2} \sum_{i=1}^{n-1} \sigma_{y_{li}}^2 \right) - \sigma_{y_{ln}}^2. \tag{12.1}$$

Так как предполагают, что все измерения целевой функции независимы и имеют одну и ту же дисперсию σ^2_v, то

$$\sigma_D^2 = \frac{n}{n-1} \sigma_y^2. \tag{12.2}$$

Отсюда

$$\sigma_y = \sqrt{\frac{n-1}{n}}\, \sigma_D. \tag{12.3}$$

Таким образом, оценка s^2_D значения дисперсии D_l может быть использована для получения оценки s^2_v дисперсии ошибки наблюдения. Для упрощения вычислений оценку s^2_D получают, используя размах значений *D:*

$$s_D = R_D/d; \quad R_D = |D_{l\max} - D_{l\min}|. \tag{12.4}$$

Таблица 12.1

y_3 y_1 y_2 / y_4 — ЭВОП, цикл 1 ($n=1$) Отклик выход продукта — Фаза 1 Дата

Вычисление средних значений						Вычисление среднеквадратичных отклонений
№ опытов	1	2	3	4	5	
1. Сумма предыдущих циклов						Сумма предыдущих циклов $s=$
2. Среднее предыдущих циклов						Среднее предыдущих циклов $s=$
3. Новые наблюдения	94,0	94,5	96,5	94,5	94,5	Размах $R=$
4. Разности п. 2—п. 3						Новое значение $s=R/f_{N\ n}=$
5. Новые суммы п. 1+п. 3	94,0	94,5	96,5	94,5	94,5	Новая сумма $s_n=$
6. Новые средние	94,0	94,5	96,5	94,5	94,5	Новое среднее значение $s=\frac{s_n}{n-1}$

Вычисление эффектов	Вычисление доверительных интервалов (ДИ)
Температуры $0{,}5(\bar{y}_3+\bar{y}_4-\bar{y}_2-\bar{y}_5)=1{,}0$	Для новых средних значений $\frac{2}{\sqrt{n}}s=$
Давления $0{,}5(\bar{y}_3+\bar{y}_5-\bar{y}_2-\bar{y}_4)=1{,}0$	
Взаимодействия $0{,}5(\bar{y}_2+\bar{y}_3-\bar{y}_4-\bar{y}_5)=1{,}0$	Для эффектов $\frac{2}{\sqrt{n}}s=$
Центральной точки $0{,}2(\bar{y}_2+\bar{y}_3+\bar{y}_4+\bar{y}_5-4\bar{y}_1)=0{,}8$	Для центральной точки $\frac{1{,}78}{\sqrt{n}}s=$

Из (12.2) и (12.3) следует, что

$$s_y = \frac{1}{d}\sqrt{\frac{n-1}{n}}\,R_D. \tag{12.5}$$

Значения

$$\frac{1}{d}\sqrt{\frac{n-1}{n}} = f_{n,N}$$

табулированы (табл. 12.2).

Таблица 12.2

№ циклов n	Число опытов N						
	4	5	6	7	8	9	10
2	0,32	0,3	0,28	0,26	0,25	0,24	0,23
3	0,4	0,35	0,32	0,3	0,29	0,27	0,26
4	0,42	0,37	0,34	0,32	0,3	0,29	0,28
5	0,43	0,38	0,35	0,33	0,31	0,3	0,29
6	0,44	0,39	0,36	0,34	0,32	0,31	0,3
7	0,45	0,4	0,37	0,34	0,33	0,31	0,3
8	0,45	0,4	0,37	0,35	0,33	0,31	0,3
9	0,46	0,4	0,37	0,35	0,33	0,32	0,31
10	0,46	0,41	0,37	0,35	0,33	0,32	0,31
11	0,46	0,41	0,38	0,35	0,33	0,32	0,31
12	0,47	0,41	0,38	0,35	0,34	0,32	0,31
13	0,47	0,41	0,38	0,36	0,34	0,32	0,31
14	0,47	0,41	0,38	0,36	0,34	0,32	0,31
15	0,47	0,42	0,38	0,36	0,34	0,33	0,31

Для n = 3 и некоторого плана с пятью точками ($2^2 + 1 = 5$) находим $f_{3.5}$=0,35. Для оценки ошибки воспроизводимости получаем $s_y = R_D f_{n.N}$. Для проверки значимости эффектов факторов определяют доверительный интервал эффектов факторов и взаимодействия, а также эффекта центральной точки:

$$\Delta_{\text{ф}} = \pm\theta\,\frac{2}{\sqrt{N-1}}\,\frac{s_y}{\sqrt{n}};$$

$$\Delta_{\text{ц}} = \pm\theta\sqrt{\frac{N-1}{N}}\,\frac{s_y}{\sqrt{n}}, \tag{12.6}$$

где θ находят по табл. 12.3 для нормированной функции Лапласа из условия $\Phi(\theta) = 0{,}5\,\alpha$; α — доверительная вероятность.

Таблица 12.3

$\varphi(x)$, $x \geqslant 0$; $\varphi(-x) = \varphi(x)$; $\overline{\Phi}(x) = \int_0^x \varphi(x)\,dx$; $x \geqslant 0$; $\Phi(x) = 0{,}5 + \overline{\Phi}(x)$, $\Phi(-x) = 0{,}5 - \overline{\Phi}(x)$

x	$\varphi(x)$	$\overline{\Phi}(x)$	x	$\varphi(x)$	$\overline{\Phi}(x)$	x	$\varphi(x)$	$\overline{\Phi}(x)$
0	0,3989	0	1,15	0,2059	0,374928	2,3	0,0283	0,489276
0,5	0,3984	0,019939	1,2	0,1942	0,38493	2,35	0,0252	0,490613
0,1	0,3970	0,039828	1,25	0,1826	0,39435	2,4	0,0224	0,491802
0,15	0,3975	0,059618	1,3	0,1714	0,4032	2,45	0,0198	0,492857
0,2	0,391	0,07926	1,35	0,1604	0,411492	2,5	0,0175	0,49379
0,25	0,3867	0,098706	1,4	0,1497	0,419243	2,55	0,0154	0,494614
0,3	0,3814	0,117911	1,45	0,1394	0,426471	2,6	0,0136	0,495339
0,35	0,3752	0,136831	1,5	0,1295	0,433193	2,65	0,0119	0,495975
0,4	0,3683	0,155422	1,55	0,1200	0,439429	2,7	0,0104	0,496533
0,45	0,3605	0,173645	1,6	0,1109	0,445201	2,75	0,0091	0,49702
0,5	0,3521	0,191463	1,65	0,1023	0,450528	2,8	0,0079	0,497445
0,55	0,3429	0,208840	1,7	0,094	0,455434	2,85	0,0069	0,497814
0,6	0,3332	0,225747	1,75	0,0863	0,459941	2,9	0,006	0,498134
0,65	0,323	0,242154	1,8	0,079	0,46407	2,95	0,005	0,498411
0,7	0,3123	0,258035	1,85	0,0721	0,467843			
0,75	0,3011	0,273373	1,9	0,0656	0,471283			
0,8	0,2897	0,288145	1,95	0,0596	0,474412			
0,85	0,278	0,302338	2,00	0,054	0,47725			
0,9	0,2661	0,315940	2,05	0,0488	0,479818			
0,95	0,2541	0,328944	2,1	0,044	0,482136			
1,0	0,2420	0,341345	2,15	0,0396	0,484222			
1,05	0,2299	0,353141	2,2	0,0355	0,486097			
1,1	0,2179	0,364334	2,25	0,0317	0,487776			

Для $k = 2$, $N = 2^2 + 1$ и $\alpha = 0{,}95$ из табл. 12.3 находим $\theta = 2$ и, следовательно,

$$\Delta_\Phi = \pm 2 s_y / \sqrt{n}; \quad \Delta_\text{ц} = \pm 1{,}78 \; s_y / \sqrt{n}.$$

Эффекты факторов и взаимодействий для $k = 2$

$$\mathcal{Э}_{\Phi j} = 0{,}5 \sum_{i=1}^{N} x_{ji}\, y_i; \quad \mathcal{Э}_{\text{в}jl} = 0{,}5 \sum_{i=1}^{N} (x_j x_l)_i\, y_i,$$

эффект центральной точки

$$\mathcal{Э}_\text{ц} = 0{,}2 \left[\left(\sum_{i=2}^{4} y_i \right) - 4 y_1 \right].$$

Если $\mathcal{Э}_\Phi > \Delta_\Phi$; $\mathcal{Э}_\text{ц} \geqslant \Delta_\text{ц}$, то эффекты факторов и центральной точки существуют и необходимо переходить к новой фазе. План

эксперимента в новой фазе выбирают в градиентном направлении. При этом могут рассматриваться новые факторы, за исключением тех факторов, эффекты влияния которых невелики.

Необходимо учитывать, что при приближении к оптимуму отклик меняется меньше, следовательно, число циклов возрастает. Число циклов зависит также от инерционности процесса: так как интервалы циклов в малоинерционных процессах невелики, то число циклов увеличивается. Число циклов зависит и от интервала варьирования: чем больше Δx_i, тем меньше циклов.

Пример. Рассмотрим двухфакторную технологическую операцию, где $x_1 \equiv T$ — температура операции, °С; $x_2 \equiv P$ — давление, Па; y — выход годной продукции, %. Поскольку $k = 2$, число опытов $N = 2^k + (k — 1) = 5$. Стандартная форма ЭВОП определяет местоположение пяти точек этого плана (табл. 12.1). Сравнивая отклики y (средние отклики) в точках 3 и 4 с откликами в точках 2 и 5, можно определить влияние x_1. Аналогично сравнение $y_{(2\text{-}4)}$ и $y_{(3\text{-}5)}$ позволяет найти x_2. При сравнении $y_{(2\text{-}3)}$ и $y_{(5\text{-}4)}$ определяют эффект взаимодействия, а при сравнении $y_{(2\text{-}3\text{-}4\text{-}5)}$ и $y_{(1)}$ — эффект центральной точки (эффект среднего). Данные эксперимента и результаты вычислений заносятся в карты ЭВП (табл. 12.4, 12.5)

В табл. 12.1 приведены результаты первого, в табл. 12.4 — второго, а в табл. 12.5 — третьего цикла. Как видно из табл. 12.5, эффект температуры 1,65 превышает доверительный интервал ошибки 1,16. Таким образом, температура значимо влияет на процент выхода годной продукции.

Таблица 12.4

$\bar{y}_5$ $\cdot\bar{y}_1$ $\cdot\bar{y}_3$
$\bar{y}_2$ $\bar{y}_4$

ЭВОП. цикл 2 ($n=2$)
Отклик: выход продукта

Фаза I
Дата

Вычисление средних значений

№ опытов	1	2	3	4	5
1. Сумма предыдущих циклов	94,0	94,5	96,5	94,5	94,5
2. Среднее предыдущих циклов	94,0	94,5	96,5	94,5	94,5
3. Новые наблюдения	96,0	95,0	95,0	96,5	94,0
4 Разности п. 2—п. 3	—2,0	—0,5	1,5	—2,0	0,5
5 Новые суммы п. 1 + +п. 3	190,0	189,5	191,5	191,0	188,5
6. Новые средние	95,0	94,7	95,7	95,5	94,2

Вычисление эффектов

Температуры $0{,}5(\bar{y}_3+\bar{y}_4-\bar{y}_2-\bar{y}_5)=1{,}15$

Давления $0{,}5(\bar{y}_3+\bar{y}_5-\bar{y}_2-\bar{y}_4)=-0{,}15$

Взаимодействия $0{,}5(\bar{y}_3+\bar{y}_5-\bar{y}_4-\bar{y}_5)=0{,}35$

Центральной точки $\mathbf{0{,}2}\ (\bar{y}_2+\bar{y}_3+\bar{y}_4+\bar{y}_5-4\bar{y}_1)=0{,}02$

Вычисление среднеквадратичных отклонений

Сумма предыдущих циклов $s=$
Среднее значение предыдущих циклов $s=$
Размах $R=|1{,}5|+|-2{,}0|=3{,}5$
Новое значение $s=Rf_{N,n}=3{,}5\cdot0{,}3=$ $=1{,}05$
Новая сумма $s_н=1{,}05$
Новое среднее значение
$s=\dfrac{s_н}{n-1}=\dfrac{1{,}05}{1}=1{,}05$

Вычисление доверительных интервалов (ДИ)

Для новых средних значений
$\dfrac{2s}{\sqrt{n}}=\dfrac{2\cdot1{,}05}{\sqrt{2}}$

Для эффектов $\dfrac{2s}{\sqrt{n}}=1{,}48$

Для центральной точки $\dfrac{1{,}78s}{\sqrt{n}}=$ $=1{,}32$

Таблица 12.5

$\bar{y}_5$ · $\bar{y}_3$ · $\bar{y}_1$ · $\bar{y}_2$ · $\bar{y}_4$	ЭВОП, цикл 3 ($n=3$) Отклик: выход продукта					Фаза I Дата	
	Вычисление средних значений						Вычисление среднеквадратичных отклонений
№ опытов	1	2	3	4	5		
1. Сумма предыдущих циклов	190,0	189,5	191,5	191,0	188,5		Сумма предыдущих циклов $s=$ $=1,05$
2. Среднее предыдущих циклов	95,0	94,7	95,7	95,5	94,2		Среднее предыдущих циклов $s=$ $=1,05$
3. Новые наблюдения	94,5	93,5	96,0	97,0	94,0		Размах $R=\|1,2\|+\|-1,5\|=2,7$
4. Разности п. 2—п. 3	0,5	1,2	—0,3	—1,5	0,2		Новое значение $s=Rf_{N,n}=2,7\times$ $\times 0,35=0,95$
5. Новые суммы п. 1+ +п. 3	284,5	281,0	287,2	286,5	282,7		Новая сумма $s_н=1,05+0,95=$ $=2,00$
6. Новые средние	94,8	93,7	95,7	95,5	94,2		Новое среднее значение $s=$ $=\frac{s_н}{n-1}=\frac{2,00}{2}=1,0$
Вычисление эффектов							Вычисление доверительных интервалов (ДИ)
Температуры $1/2(\bar{y}_3+\bar{y}_4-\bar{y}_2-\bar{y}_5)=1,65$							Для новых средних $\frac{2s}{\sqrt{n}}=\frac{2\cdot 1,05}{\sqrt{2}}=$ $=1,48$
Давления $1/2(\bar{y}_3+\bar{y}_5-\bar{y}_2-\bar{y}_4)=0,35$							Для эффектов $\frac{2s}{\sqrt{n}}=\frac{2\cdot 1,05}{\sqrt{2}}=1,48$
Взаимодействия $1/2(\bar{y}_2+\bar{y}_3-\bar{y}_4-\bar{y}_5)=-0,15$							Для центральной точки $\frac{1,78s}{\sqrt{n}}=$ $=\frac{1,78\cdot 1,05}{\sqrt{2}}=1,32$
Центральной точки $1/5(\bar{y}_2+\bar{y}_3+\bar{y}_4+\bar{y}_5-4\bar{y}_1)=-0,02$							

12.2. Производственные испытания как этап производства

При оптимизации качества изделий наибольшего эффекта достигают в том случае, когда ее осуществляют на стадии:

а) проектирования (оптимизация конструкторских и проектных решений);

б) производства (оптимизация изделия и процессов);

в) производственных испытаний (оптимизация длительности и объема испытаний).

Оптимизация производственных испытаний или минимизация их продолжительности влияет на все этапы создания изделий. Во-первых, одним из основных требований к созданию новых изделий в современных условиях является сокращение их сроков разработки и освоения. Долговечность изделий всех классов постоянно повышается и информация о сроках их службы необходима разработчику, определение же долговечности занимает значительный процент времени от срока разработки изделия. Следовательно сокращение производственных испытаний позволяет уменьшить срок разработки изделия. Во-вторых, для успешного функционирования систем автоматизированного проектирования (САПР) и автоматизированного управления технологическим процессом (АСУ ТП), а также для создания гибких автоматизированных производств (ГАП) необходима оперативная информация о качестве изделий, которую наиболее полно можно получить по результатам испытаний. Уменьшение времени испытаний повышает оперативность получения данных о состоянии изделий и результатах разработки, тем самым повышая эффективность функционирования САПР и АСУ ТП, а также всего ГАП. В-третьих, при сокращении производственных испытаний строятся математические модели испытаний — зависимость работоспособности изделия от времени и воздействующих факторов. Подобные модели оказывают существенную помощь разработчику изделия. В-четвертых, минимизация продолжительности испытаний позволяет получить экономический эффект. Так как долговечность современных изделий составляет от нескольких тысяч до десятков тысяч часов, то сокращение длительности испытаний в несколько раз приводит к значительной экономии различного вида затрат.

Очевидно, что производственные испытания являются тем этапом создания изделий, когда впервые можно получить информацию о работоспособности готового изделия, об изменении его параметров во времени, старении, показателях надежности и долговечности. Чем

быстрее будет получена эта информация, тем оперативнее и эффективнее будет функционировать вся система создания изделия (рис. 12.2).

Рис. 12.2

В процессе производственных испытаний нужно получить разнообразную информацию о зависимости параметров изделия от времени и различных воздействующих факторов: изменение работоспособности изделия во времени, время отказа работы изделия, его реакция на различные внешние воздействия (механические, климатические и т.п.). В первом случае оценивают показатели надежности путем проведения испытаний на безотказность работы и долговечность, а также на гамма-процентный ресурс и сохраняемость. Этот вид испытаний связан прежде всего с необходимостью получения отказов. Если учесть, что долговечность изделий велика, то для получения информации об общем числе отказов в партии требуется продолжительное время. Во втором случае оценивают влияние механических, климатических и биологических факторов, а также воздействие специальных сред на работоспособность изделий и их соответствие заданным требованиям. Этот вид испытаний не занимает продолжительного времени, однако для оценки влияния каждого воздействующего фактора требуется одна или несколько партий изделий.

Испытания на безотказность и долговечность проводят на этапах разработки изделия и приемки установочной серии. При серийном производстве изделия испытывают на безотказность, долговечность, на гамма-процентный ресурс и на сохраняемость. Испытания на безотказность проводят с целью периодического контроля качества изделий и проверки стабильности ТП. Продолжительность испытаний устанавливают следующим образом: для изделий с минимальной наработкой менее 500 ч продолжительность устанавливают равной минимальной наработке, для изделий с минимальной наработкой от 500 до 25000 ч—равной 500 ч, для изделий с минимальной наработкой свыше 25 000 ч — равной 1000 ч. Испытания проводят по планам одноступенчатого контроля, установленным в

стандартах, при приемочном числе $C = 0$ (т. е. партия принимается при отсутствии отказов), а также при номинальных режимах эксплуатации.

Испытания на долговечность проводят с целью подтверждения минимальной наработки изделий, которая установлена в технической документации. Продолжительность испытаний определяют как время минимальной наработки. Результаты испытаний на долговечность считают положительными, если в испытываемой партии не обнаружено ни одного отказа. Если при проведении испытаний выявлен только один отказ, то выпуск изделий не прекращается, а испытания продолжают до их окончания. Если обнаружено больше одного отказа, то выпуск изделий прекращают до выяснения причин отказов.

Испытания на гамма-процентный ресурс проводят с целью определения (уточнения) такого срока службы (ресурса), который достигается с заданной вероятностью гамма- процентов. Испытания на гамма-процентный ресурс, как правило, являются продолжением испытаний изделий на долговечность.

Испытания на сохраняемость проводят с целью проверки соответствия изделий требованиям по сохраняемости, т. е. способности изделий длительно храниться в тех или иных условиях. Продолжительность испытаний должна быть не менее минимального срока сохраняемости изделия. Изделия считают выдержавшими испытания, если в результате испытаний не было отказа. В конце проводят испытания изделий на безотказность.

Таким образом, ***цель всех испытаний во времени — оценить время работы изделий без отказов.***

Как отмечалось, для изделий, обладающих большой долговечностью, длительность производственных испытаний составляет от нескольких месяцев до нескольких лет. Поэтому ***для минимизации продолжительности испытаний без потери необходимой информации следует построить математическую модель зависимости показателей работоспособности изделия от времени.***

При анализе влияния внешних воздействующих факторов на работоспособность изделия требуется определить, как зависит состояние изделия от этих факторов, вызовут ли они отказ изделия или снизят его работоспособность, сможет ли изделие функционировать при воздействии данного фактора и т. п. Среди подобного вида испытаний наиболее объемными являются механические и климатические (в некоторых случаях проводят радиационные испытания). Их проводят на ограниченном интервале времени при различных уровнях воздействия внешних факторов, после чего при-

нимают решение о способности изделия выдержать эти воздействия. Здесь целесообразно строить многофакторную математическую модель зависимости показателей работоспособности изделия от воздействующих факторов. В табл. 12.6 приведено ориентировочное распределение затрат по видам испытаний ЭП.

Таблица 12.6

Вид испытаний	Стоимость испытаний относительно общей стоимости испытаний, %	Вид испытаний	Стоимость испытаний относительно общей стоимости испытаний, %
Обнаружение резонансных частот	2,4	Испытания на: влагоустойчивость кратковременную	2,7
Испытания на виброустойчивость	3,2	длительную	3,6
вибропрочность	5,0	воздействие повышенного давления	0,8
ударную прочность	0,5	воздействие пониженного давления	0,9
случайную вибрацию	5,7	воздействие солнечной радиации	2,7
воздействие одиночных ударов	1,7	термоудар	4,5
воздействие линейных ускорений	0,7	воздействие соленого тумана	2,4
холодоустойчивость	0,7	грибоустойчивость	1,7
термоциклирование	3,6	надежность	7,5
		долговечность	49,7

Нетрудно видеть, что испытания на надежность и долговечность являются наиболее дорогостоящими. Это связано с длительностью испытаний и возрастанием стоимости с увеличением их продолжительности. Сокращение в несколько раз времени испытаний существенно снижает их стоимость.

Таким образом, при анализе результатов испытаний необходимо прежде всего построить математическую модель зависимости показателей работоспособности изделий от времени и воздействующих факторов. При испытании же во времени, кроме того, необходимо минимизировать их продолжительность.

12.3. Методы минимизации продолжительности производственных испытаний

Существует два основных, принципиально отличающихся друг от друга, направления, позволяющие сократить производственные испытания изделий— ***первое*** *связано с прогнозированием изменения параметров изделий во времени и оценкой момента наступления отказа,* ***второе*** *— с организацией форсированных испытаний, т.е. испытаний, при которых внешние воздействия больше допустимых.* В этом случае ускоряются процессы старения, время наступления отказов и сокращается длительность испытаний.

Проанализируем физические предпосылки минимизации производственных испытаний. Сокращение времени испытаний с помощью прогнозирования, а также использования форсированных режимов основано на следующем. Всякое изделие имеет конечный срок службы (ресурс), при приближении к которому работоспособность и свойства изделия ухудшаются. Ухудшение свойств определяется процессом старения, происходящими в материалах и узлах изделий.

Старение материалов вызвано процессами самопроизвольного изменения во времени их физико-механических и химических свойств, возникающего из-за термодинамической неравновесности исходного состояния. Процессы старения достаточно сложны. Их характер и интенсивность зависят как от внешних факторов (температуры, давления, механических воздействий, химической активности окружающей среды), так и от внутреннего состояния материала (наличия внутренних механических напряжений, примесей, способных ускорять или замедлять химические реакции, и т. д.). Поэтому процессы старения в условиях длительного хранения и эксплуатации протекают по-разному. ***Общей особенностью процессов старения является их направленность— изменение свойств происходит при переходе из <u>метастабильного в более стабильное состояние</u>.*** Процессы старения, несмотря на их сложность и многообразие, иногда удается описать с помощью общей физико-математической модели. Однако вопросы применимости такой модели могут решаться лишь при правильном понимании физики процессов в каждом конкретном случае. Основную роль при этом играет умение выделять в конкретной ситуации превалирующий механизм старения, т. е. составить для каждого процесса физическую модель, наиболее близкую к реальной ситуации. Дать полный перечень всех механизмов старения практически невозможно и не всегда удается их детально описать.

Рассмотрим старение металлов и сплавов, наблюдаемое в таких металлических структурах, которые в результате какой-либо предшествующей обработки (например, неравновесного нагрева или охлаждения, закалки, наклепа) находятся в неустойчивом состоянии, связанном с появлением дефектов в кристаллической решетке либо с образованием несвойственной металлу или сплаву при данной температуре кристаллической структуры. ***Метастабильное состояние характеризуется в этом случае повышенным уровнем внутренней энергии.*** С течением времени металл стремится перейти в более стабильное состояние. Так, сплав, однофазный при высокой температуре, при более низкой температуре в результате диффузионных процессов распадается на две (или более) фазы в соответствии с диаграммой состояний.

В результате экспериментальных исследований было установлено, что в определенном температурном интервале интенсивность большинства процессов старения определяется ***диффузией***. Температурная зависимость интенсивности таких процессов подчиняется закону Аррениуса

$$v = v_0 e^{-\frac{E_a}{kT}} \qquad (12.7)$$

где v — константа скорости процесса; v_0 — размерная константа; E_a— энергия активации; $k = 1{,}38 \cdot 10^{-23}$ Дж/К— постоянная Больцмана; T — абсолютная температура.

Таким образом, в пределах отдельных температурных интервалов каждый из протекающих процессов может быть описан как ***термоактивационный***. Старение, обусловленное распадом пересыщенных твердых растворов, вызывает изменение механических и физических свойств: прочности, твердости, сопротивления и др.

Процессы старения диэлектриков связаны с изменением во времени их структуры и химического состава. Эти процессы могут быть сложными в отдельных деталях. Их многообразие не позволяет описать процессы старения в некоторой единой схеме.

При построении модели старения можно рассматривать два вида механизма старения:

1) под действием физических факторов (без химических изменений);

2) в результате химических изменений.

К первому виду можно отнести механизмы старения, в результате которых происходят изменения кристаллической решетки твердотельных диэлектриков под воздействием теплоты, а также электронной, ионной или нейтронной бомбардировки. К ним же

относятся механизмы старения, связанные с диффузией атомов примесей из внешней среды, с изменением фазового состояния вещества, а также процессы перемещения отдельных молекул и т.д. В результате действия перечисленных механизмов старения диэлектрики изменяют свои свойства —диэлектрические проницаемость и потери, механические характеристики — твердость, прочность на разрыв и т. д. Для этих механизмов старения экспериментально установлена следующая зависимость свойств диэлектрика от времени. Если ввести некоторую обобщенную характеристику свойств диэлектрика *y,* определяющую зависимость от времени свойств, изменяющихся в процессе старения (диэлектрическая проницаемость, механическая и электрическая прочность, влагостойкость и т. д.), то можно записать следующее уравнение:

$$\ln y = -kt + \ln y_0, \tag{12.8}$$

где y_0 начальное значение обобщенной характеристики; k неизвестный коэффициент; t— время. Таким образом, для любых процессов, происходящих при старении диэлектриков, зависимость логарифма обобщенной характеристики от времени линейна.

Ко второму виду механизмов старения диэлектриков относятся процессы, для которых справедливы ***законы кинетики химических реакций.*** Например, в общем случае скорость реакции

$$v(t) = kC_1^{n_1} C_2^{n_2} \dots, \tag{12.9}$$

где C_1 ,C_2, ... — концентрации реагирующих веществ; k — удельная скорость реакции (скорость, отнесенная к единице концентрации); n_1, n_2, ...— величины, характеризующие порядок реакции. В случае, когда имеет место простая мономолекулярная реакция, процесс описывается уравнением

$$\frac{dC}{dt} = -kC. \tag{12.10}$$

Для константы k скорости реакции также справедливо уравнение Аррениуса.

Старение полупроводников и полупроводниковых приборов, как и диэлектриков, обусловлено физико-химическими процессами, для которых справедливы уравнения (12.7)— (12.10).

Характерной особенностью полупроводниковых материалов и приборов является высокая чувствительность поверхности полупроводников к физическим условиям и химической природе окружающей среды, а также к примесям, неоднородностям и дефектам структуры. Влияние состояния поверхности полупроводника на его

свойства проявляется в основном в появлении поверхностной проводимости и поверхностной рекомбинации. Влияние примесей и дефектов структуры, появляющихся в полупроводнике вследствие воздействия внешних факторов и взаимодействия с окружающей средой, в ряде случаев может определять весь механизм старения. Рассматривая появление примесей и дефектов в рабочей области полупроводникового прибора как результат их диффузии из нерабочего объема или через поверхность, удается описать многие явления, характерные для процессов старения полупроводниковых материалов и приборов.

Хотя магнитные материалы представляют собой металл, металлический сплав либо полупроводниковый материал с магнитными свойствами (феррит), их следует рассматривать особо, так как ***магнетизм является специфическим состоянием вещества***. В процессе старения магнитных материалов происходят изменения магнитных свойств и характеристик (формы петли гистерезиса, коэрцитивной силы, проницаемости, диэлектрических потерь и т. д.). ***Для каждого магнитного материала старение связано с изменением во времени химического и фазового составов, концентрации примесей и дефектов структуры решетки, доменной структуры и т. д.***

Несмотря на разнообразие, отдельные элементарные процессы старения можно описать единой обобщенной математической моделью, применимой в определенных температурных интервалах практически ко всем реальным явлениям. Модель предназначена для описания динамики перехода, в результате которого исходная термодинамически неравновесная система переходит в более стабильное состояние. Основной величиной, изменяющейся во времени и характеризующей состояние системы, будем считать концентрацию специфических элементов, возникающих в процессе перехода *C(t).* Если рассматривают процесс возникновения дефектов в кристаллической решетке, то *C(t)*— концентрация дефектов в момент времени *t*. Для химических реакций оксидирования *C(t)* — концентрация молекул, содержащих присоединившийся в процессе реакции кислород. Для полупроводникового прибора *C(t)* может, например, означать концентрацию проникших в объем через поверхность атомов вредных примесей и т. д. Кроме того, необходимо учитывать равновесную концентрацию дефектов C_p. В процессе перехода концентрация образовавшихся элементов стремится к некоторому равновесному значению, зависящему от конкретных условий. Для каждого типа кристалла определенному значению

температуры соответствует своя равновесная концентрация $C_р$. Если в исходном состоянии дефектов было меньше, то их концентрация нарастает, стремясь к $C_р$. При приближении к $C_р$, скорость роста уменьшается При этом скорость изменения мгновенного значения концентрации $dC(t)/dt$ не остается постоянной. Она велика в начале процесса, когда разность $C_р$ — $C(t)$ значительна, и уменьшается при приближении $C(t)$ к значению $C_р$. В общем случае можно записать

$$\frac{dC(t)}{dt} = k|C_р - C(t)|^p. \tag{12.11}$$

где k константа скорости процесса; p — порядок процесса (для химических реакций — порядок реакции).

Уравнение (12.11) описывает динамику обобщенного перехода системы в равновесное состояние. Для простых механизмов старения p= 1 При этом (12.11) можно записать так:

$$\frac{1}{k}\frac{dC(t)}{dt} + C(t) = C_р. \tag{12.12}$$

В уравнении (12.12) необходимо учесть начальное условие—значение концентрации в момент начала процесса старения, т. е. при $t = 0$:

$$C(t)|_{t=0} = C_0. \tag{12.13}$$

Решение уравнения (12.12) при начальном условии (12.13) имеет вид

$$C(t) = C_0 + (C_р - C_0)(1 - e^{-kt}). \tag{12.14}$$

Динамику процесса старения, описываемую уравнением (12.14), иллюстрирует рис. 12.3.

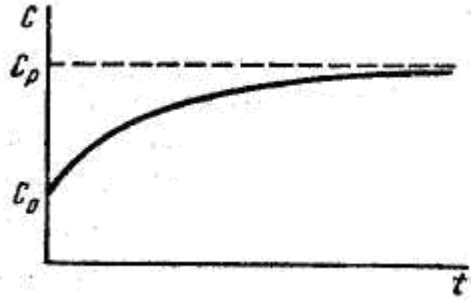


Рис. 12.3

Полученное соотношение можно использовать для установления связи между временем и некоторыми характеристиками материалов либо приборов, изменяющимися в процессе старения.

Прогнозирование состояния изделий. После рассмотрения характера некоторых процессов старения стало очевидным, что ***изменения параметров изделий во времени, отражающие количественно те или иные стороны процесса старения, можно описать с помощью некоторого математического выражения или определенной модели.*** В общем случае процесс прогнозирования математически можно описать следующим образом:

$$y(t_{i+1}) = \mathbf{W} y(t_i), \tag{12.15}$$

где **W** — оператор (модель) прогнозирования; t_i —время контроля параметра изделия $y(t)$.

Подобная трактовка прогнозирования основана на том, что последующие состояния изделия в значительной степени определяются предыдущими состояниями. Анализ механизмов старения материалов и изделий, а также механизмов отказов подтверждают это. Это и является основной предпосылкой для успешного прогнозирования изменения состояния изделий в период производственных испытаний.

Таким образом, прогнозирование тем точнее, чем точнее выявлен механизм изменения состояния изделия и чем точнее он описан оператором (моделью) прогнозирования **W**. Операторы (модели) прогнозирования **W** могут быть различными, однако можно выделить два класса операторов, которые отражают два различных подхода к прогнозированию:

1) экстраполяция изменения состояния изделия до заданных значений процесса или заданного момента времени;

2) статистическая классификация состояния изделия в начальный момент времени по классам, характеризуемым различной степенью работоспособности на заданный момент времени в будущем или различной долговечностью.

Рассмотрим модели прогнозирования, используемые в обоих случаях для оптимизации производственных испытаний.

Экстраполяция процесса изменения состояния изделия во времени. Количественно изменение состояния изделий характеризуется их техническими параметрами, которые наиболее полно описывают изменение работоспособности изделия.

Поскольку оценку состояния изделия осуществляют количественно по значениям изменяющихся во времени параметров, в качестве модели прогнозирования берут математическую модель. Так как основным параметром при прогнозировании является время t, то математическую модель выражают как функцию времени $W(t)$.

Модель прогнозирования может иметь различный вид. Это зависит прежде всего от вида (модели) процесса, а также от качества и количества поступающей информации об изменении состояния изделия. Очевидно, что модель процесса наиболее сильно влияет на модель прогнозирования. Основываясь на знании механизмов старения, можно считать, что основной механизм старения будет определять необходимые изменения состояния изделия, которые характеризуют закономерность его старения. В то же время на процесс старения влияет множество причин (в большинстве своем случайных), которые определяют случайные обратимые изменения состояния и параметров изделия (их можно рассматривать как шум или помеху).

Процесс изменения состояния изделия **y** *(t)* можно представить в виде

$$\mathbf{y}(t) = \xi(t) + \eta(t), \tag{12.16}$$

где $\xi(t)$ — составляющая, характеризующая необратимые изменения; $\eta(t)$ —составляющая, определяющая обратимые изменения в изделии.

При этом процессом постепенного изменения состояния изделий будет такой процесс, для которого выполняется соотношение

$$\| \xi(t + \Delta t) - \xi(t) \| \gg \| \eta(t + \Delta t) - \eta(t) \|, \tag{12.17}$$

где $||\ldots||$ — норма вектора; $\Delta t > 0$.

Можно определить класс моделей экстраполяции, которые позволяют описать изменение состояния изделий. Если реальный процесс характеризуется отдельной (индивидуальной) реализацией, т. е. одномерным временным рядом, то модель имеет общий вид

$$y(t) = W[\beta(y), t) + \varepsilon(t), \tag{12.18}$$

где $W[\beta(y), t]$ — одномерная функция времени, описывающая изменение необратимой составляющей и известная с точностью до коэффициентов $\beta = [\beta_0, \beta_1, \ldots, \beta_k]^T$; $\varepsilon(t)$ — ошибка, связанная с колебаниями обратимой составляющей и погрешностью измерительных цепей.

Выбор модели (метода) прогнозирования процессов типа (12.18) сводится к выявлению структуры случайной составляющей $\varepsilon(t)$, значения которой во времени могут быть независимыми или коррелированными (аддитивное или неаддитивное наложение ошибки — помехи).

Рассмотрим три способа построения модели прогнозирования $W[\beta(y), t]$ для случая, когда ошибка аддитивно накладывается на необратимую составляющую.

Первый способ можно определить как *интерполяционный;* он основан на использовании принципа построения интерполяционных

полиномов для вычисления коэффициентов модели прогнозирования (экстраполяции). В этом случае изменения каждого или выбранного параметра *y(t)* изделия представляют в виде полиномиальной модели степени μ. Коэффициенты модели вычисляют из условия

$$y(t_i) = W(y, t_i);\ i = \overline{1, \mu} \leqslant n, \tag{12.19}$$

где t_i — время контроля параметра; n — число контролируемых точек.

Примером такой модели является второй интерполяционный полином Ньютона, преобразованный для целей экстраполяции:

$$W_\mu(y, t) = y(t_n) + \Delta y_{n-1} N_1 + \Delta^2 y_{n-2} N_2 + \\ + \Delta^3 y_{n-3} N_3 + \ldots, \tag{12.20}$$

где

$$N_\mu = N_\mu(m) = \frac{1}{\mu!} \prod_{k=1}^{k=\mu} (m - 1 + k) \tag{12.21}$$

— преобразованные для экстраполяции коэффициенты Ньютона; m — число шагов прогнозирования; $\Delta^k y_{n-h}$ — конечная разность k-го порядка.

Основным достоинством такого подхода является простота реализации и возможность построения модели при малом n. Однако его целесообразно применять при достаточно гладких функциях $y(t)$ и точных значениях $y(t_i)$. Если же дисперсия процесса велика, то необходимо использовать другой способ построения модели.

Второй способ [метод наименьших квадратов (МНК)] построения модели в условиях больших помех (ошибки) основан на принципе минимизации суммы квадратов отклонений:

$$\sum_{i=1}^{n} [y(t_i) - W(y, t_i)]^2 = \min. \tag{12.22}$$

С помощью данного метода можно построить различные модели; при решении рассматриваемых задач его необходимо использовать для построения регрессионных моделей. В этом случае в качестве модели применяют полином (по крайней мере, после преобразования модели с целью вычисления коэффициентов), степень которого выбирают заведомо меньше числа наблюдений $(\mu \ll n)$, а коэффициенты рассчитывают из условия минимума среднего квадрата отклонения модели от значений параметров процесса изменения состояния в

точках наблюдения $t_0, t_1, \ldots, t_n$. Алгоритмы построения регрессионных моделей рассматривались ранее.

Третий способ основан на использовании первых двух, однако в отличие от них в данном случае производится взвешивание оценок значений временного ряда $y(t_i)$. При этом возможно применение метода экспоненциального сглаживания, когда текущей информации даются большие веса, а предшествующим значениям $y(t)$ меньшие, что необходимо в тех случаях, когда следует «забыть» информацию, поступившую в отдаленном прошлом.

Модель прогнозирования метода экспоненциального сглаживания имеет вид рекуррентной формулы:

$$S(t_n) = \alpha y(t_n) + (1-\alpha) S(t_{n-1}), \tag{12.23}$$

где $S(t_n)$ — значение экспоненциальной средней в момент времени t_n; α — параметр сглаживания ($0<\alpha< 1$). Учитывая рекуррентное соотношение (12.23), получаем

$$S(t_n) = \alpha y(t_n) - \alpha(1-\alpha) y(t_{n-1}) + (1-\alpha)^2 y(t_{n-2})$$
$$= \ldots = \alpha \sum_{i=1}^{n-1} (1-\alpha)^i y(t_{n-i}) + (1-\alpha)^n S(t_0),$$

где $S(t_0)$ — величина, характеризующая начальные условия для применения формулы (12.23).

В частном случае

$$S(t_0) = y(t_0) \text{ или } S(t_0) = \frac{1}{m} \sum_{i=0}^{m} y(t_i),$$

где m — число начальных значений временного ряда.

При ***третьем способе*** используют модели Бокса — Дженкинса, основанные на процедурах взвешивания и сглаживания данных контроля. Однако они, как и метод экспоненциального сглаживания, мало пригодны для эффективного сокращения производственных испытаний, так как являются типичными методами краткосрочного прогнозирования.

Перечисленные способы приводились для построения модели прогнозирования отдельной (индивидуальной) реализации. Если процесс изменения состояния изделия представлен множеством одномерных и однотипных реализаций (испытывается партия однотипных изделий), то для его описания следует пользоваться математической моделью вида

$$y(t) = W[\beta(y), t] + V[\alpha(\varepsilon), t], \tag{12.24}$$

где $V[\alpha(\varepsilon), t]$ — одномерная функция времени, описывающая изменение обратимой составляющей и известная с точностью до коэффициентов $\alpha = (\alpha, \alpha_1, \ldots, \alpha_\nu)^T$. Модель процесса вида (12.24) является более общей моделью, чем (12.18); выбор модели (метода) прогнозирования зависит не только от вида *W,* но и от вида *V.* При этом общая модель прогнозирования состоит из моделей-прогнозирования необратимой *W* и обратимой *V* составляющих. Модели для *W* могут быть построены с помощью перечисленных способов. Для прогнозирования *V* необходимо использовать матричный метод, исходной информацией для которого является множество однотипных реализаций *y(t);* процесс в каждом временном сечении представляют в виде матрицы вероятностей:

$$\mathbf{P}_i = \| p_{i\nu} \|; \quad i = \overline{0, n}; \quad \nu = \overline{1, \pi}, \tag{12.25}$$

где *i* — индекс временного интервала; *ν* — индекс интервала на оси параметра

$$y; \sum_{\nu=1}^{\nu=\pi} p_{i\nu} = 1, \ \forall i.$$

Изменение процесса во времени, т.е. переход от $\mathbf{P}_i$ к $\mathbf{P}_j$ ($i<j$), удобно характеризовать вероятностной мерой, а именно вероятностью перехода из одного состояния в другое. Для количественной оценки состояния изделий область возможных значений показателей (параметров) состояния разбивают на π интервалов (рис. 12.4).

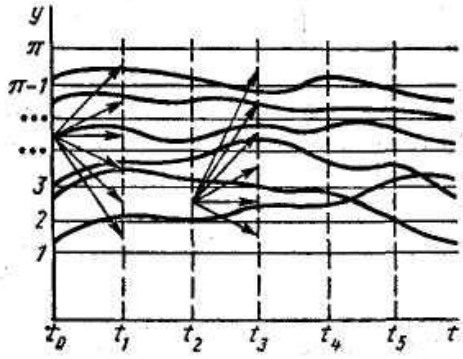


Рис. 12.4

Оценив вероятности перехода из одного интервала (в *i*-й момент времени) в другой (в *(i* + 1)-й момент времени), опишем процесс изменения состояния изделий. Матрица вероятностей перехода имеет вид (рис. 12.4)

$$\mathbf{P} = \| p_{l\nu} \|, \; l, \; \nu = \overline{1, \; \pi}, \tag{12.26}$$

где p_{lv} — вероятность перехода из v-го состояния в l-е. Если обозначить вектор состояния в i-й момент времени через $\mathbf{a}_i$, то процесс прогнозирования можно записать в виде

$$\mathbf{a}_{n+1} = \mathbf{P}\mathbf{a}_n. \tag{12.27}$$

В общем случае, когда соблюдается условие

$$\sum_{\nu=1}^{\nu=\pi} a_{i\nu} = N,$$

$$\mathbf{a}_{n+j} = \mathbf{P}^j \mathbf{a}_n, \tag{12.28}$$

где $\mathbf{P}^j$ — матрица $\mathbf{P}$ в j-и степени; N — число реализаций (изделий).

Таким образом, для процесса вида (12.24) требуется прогнозирование как необратимой составляющей с помощью экстраполяционных моделей, так и обратимой составляющей с помощью матричного метода.

Если распространить модель (12.18) на многомерные процессы как на более общие по сравнению с одномерными, то индивидуальный многомерный процесс (отдельный многопараметрический объект) описывают следующей моделью:

$$\mathbf{y}(t) = \mathbf{W}[\boldsymbol{\beta}(y), t] + \mathbf{E}, \tag{12.29}$$

где

$\mathbf{E} = (\varepsilon_1, \ldots, \varepsilon_k)^T$ — вектор ошибок.

Для прогнозирования процессов типа (12.29) необходимо применять многомерный метод. Пусть модель прогнозирования для необратимой составляющей $\mathbf{W}[\boldsymbol{\beta}(\mathbf{y}), t]$ является линейной по коэффициентам, которые вычисляют с помощью выражения

$$\mathbf{B} = \mathbf{k}\left[\sum_{i=1}^{n} \boldsymbol{\Phi}_i \mathbf{D}^{-1} \mathbf{y}(t_i)\right], \tag{12.30}$$

где $\Phi = \|\varphi_{sr}(t)\|; \; s = \overline{1, \; k}; \; r = \overline{1, \; m}; \; \varphi_{sr}(t)$ — простейшие функции времени. Дисперсионная матрица оценок коэффициентов

$$\mathbf{k} = (k_{sl}) = \left[\sum_{i=1}^{n} \boldsymbol{\Phi}_i \mathbf{D}^{-1} \boldsymbol{\Phi}_i^T\right], \tag{12.31}$$

где $\mathbf{D} = (d_{sl}); \; s, \; l = \overline{1, \; k}$ — дисперсионная матрица ошибок наблюдений, вычисляемая на стационарном или квазистационарном участке процесса:

$$\mathbf{D} = (d_{sl}); \; s, \; l = \overline{1, \; k}$$

Распределение оценок коэффициентов подчиняется закону нормального распределения.

Многомерное прогнозирование, несмотря на сложность, является более эффективным при сокращении производственных испытаний.

Если процесс изменения состояния изделий характеризуется множеством многомерных функций, то для его описания необходимо использовать модель вида

$$\mathbf{y}(t) = \mathbf{W}[\boldsymbol{\beta}(y), t] + \mathbf{V}[\boldsymbol{\alpha}(\varepsilon), t], \tag{12.32}$$

где $\mathbf{V}[\boldsymbol{\alpha}(\varepsilon), t] = [V_1(\alpha^{(1)}, t), \ldots, V_h(\alpha^{(k)}, t)]^T$ - вектор функций времени t и коэффициентов α.

Модель (12.32) является наиболее общей моделью процессов изменения состояния изделий. В настоящее время отсутствуют модели экстраполяции нестационарных процессов, описываемых моделью (12.32). Для их прогнозирования необходимо применять методы статистической классификации.

Статистическая классификация состояния изделия при минимизации продолжительности производственных испытаний. Сформулируем задачу статистической классификации как позволяющую сократить производственные испытания.

Пусть в процессе предварительных производственных испытаний сформированы (описаны) два класса изделий R_1 и R_2, характеризуемые плотностью распределения вероятностей $f(\mathbf{y}/R_1)$; $f(\mathbf{y}/R_2)$ в нулевой момент времени t_0. В первый класс вошли изделия, у которых срок службы меньше некоторого граничного значения $T_{гр}$, а во второй — изделия, у которых срок службы больше $T_{гр}$ (рис. 12.5, а).

С помощью того или иного критерия необходимо изделие, подвергаемое испытаниям, отнести к первому или второму классу. При этом следует учитывать

$$\mathbf{y} \in R_1; \quad T < T_{гр};$$
$$\mathbf{y} \in R_2; \quad T \geqslant T_{гр}. \tag{12.33}$$

Рассмотрим вероятностный подход к определению класса для одномерного случая при гауссовском распределении параметров. Плотность распределения вероятностей обоих классов имеет вид

$$f(y/R)_\lambda = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\,\sigma_\lambda} \exp\left[-\frac{(y-\bar{y}_\lambda)^2}{2\sigma_\lambda^2}\right], \quad \lambda = 1, 2, \tag{12.34}$$

где $\bar{y}_\lambda$, σ_λ^2 — параметры распределения вероятностей.

Пусть параметр прибора, подвергающегося испытаниям, принял значение $y = y^*$ (рис. 12.5, *б).*

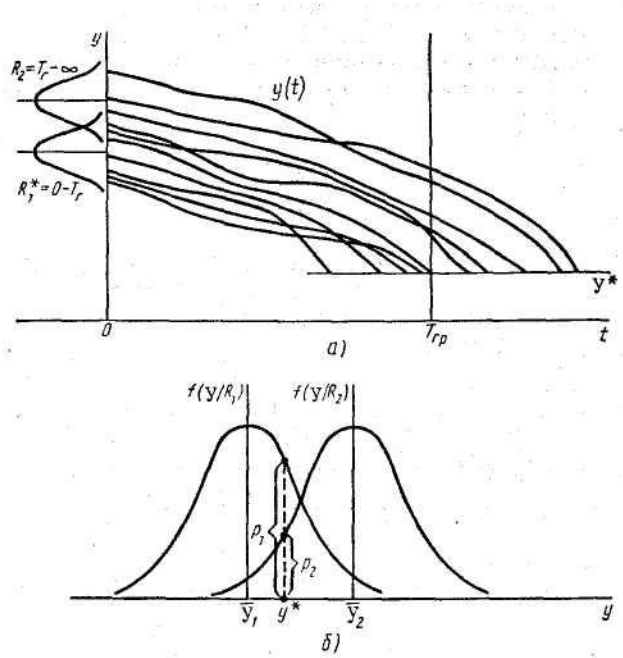


Рис. 12.5

Введем понятие отношения правдоподобия, которое позволяет принять решение — к какому классу принадлежит изделие:

$$L(y) = \frac{f(y^*/R_1)}{f(y^*/R_2)}. \qquad (12.35)$$

Для того чтобы в (12.35) исчезла экспоненциальная зависимость и упростились вычисления, удобнее рассматривать логарифм отношения правдоподобия. Для одномерного случая (рис. 12.5, *б)* он имеет вид

$$\ln L(y) = \ln \frac{\frac{1}{\sqrt{2\pi}\,\sigma_1} \exp\left[-\frac{(y^*-\bar{y}_1)^2}{2\sigma_1^2}\right]}{\frac{1}{\sqrt{2\pi}\,\sigma_2} \exp\left[-\frac{(y^*-\bar{y}_2)^2}{2\sigma_2^2}\right]} =$$

$$= \ln\frac{\sigma_2}{\sigma_1} - \frac{(y^*-\bar{y}_1)^2}{2\sigma_1^2} + \frac{(y^*-\bar{y}_2)^2}{2\sigma_2^2}. \qquad (12.36)$$

где $\overline{y_1}$, $\overline{y_2}$, σ_1^2, σ_2^2, — статистические характеристики распределения классов, вычисляемые согласно испытанной предварительно партии изделий (этап обучения); y^* — параметр новой партии изделий, подвергнутой испытанию (этап экзамена).

Введем порог сравнения Λ, при котором правило (12.33) принимает вид:

$$\begin{aligned} &\text{для } \ln L(y) < \Lambda \\ &\qquad\qquad y \in R_1;\ T < T_{\text{гр}}, \\ &\text{для } \ln L(y) \geqslant \Lambda \\ &\qquad\qquad y \in R_2;\ T \geqslant T_{\text{гр}}. \end{aligned} \tag{12.37}$$

Статистическая классификация как метод прогнозирования особенно эффективна, когда процесс изменения состояния описывается моделью (12.32), т. е. в случае многомерного процесса необратимой и обратимой составляющих.

Если прогнозирование осуществляют для многопараметрических изделий, то условные плотности распределения вероятностей $f(\mathbf{y}(R_\lambda))$, где λ — номер класса, будут многомерными. Выражение (12.36) для двух классов изделий запишем в виде

$$\ln L(\mathbf{y}) = \frac{1}{2} \ln \frac{|\mathbf{V}_2|}{|\mathbf{V}_1|} - \frac{1}{2} (\mathbf{y} - \boldsymbol{\mu}_1)^T \mathbf{V}_1^{-1} (\mathbf{y} - \boldsymbol{\mu}_1) + \frac{1}{2} (\mathbf{y} - \boldsymbol{\mu}_2)^T \mathbf{V}_2^{-1} (\mathbf{y} - \boldsymbol{\mu}_2), \tag{12.38}$$

где $\mathbf{V}_\lambda$ — ковариационные матрицы для изделий классов λ=1,2; $\mathbf{V}_\lambda^{-1}$ — обращенные матрицы; $|\mathbf{V}_\lambda|$ — определители матриц; $\boldsymbol{\mu}_\lambda$ — векторы средних значений параметров изделий $\mathbf{y}$.

Элементы ковариационных матриц и векторы средних значений для каждого класса, как и в (12.36), оценивают по предварительно испытанной партии — обучающей выборке. Так, для первого класса элементы ковариационной матрицы вычисляют по формуле

$$c_{1sr} = \frac{N_1}{N_1 - 1} \left(\frac{1}{N_1} \sum_{l=1}^{N_1} y_{1sl}\, y_{1rl} - \mu_{1s}\, \mu_{1r} \right), \tag{12.39}$$

где $s,\ r = \overline{1,\ k}$ — индексы параметров; k — число параметров; N_1 — число изделий первого класса. Средние значения параметров приборов

$$\mu_{1s} = \frac{1}{N_1} \sum_{l=1}^{N_1} y_{1sl}. \qquad (12.40)$$

Для второго класса c_{2sr} и μ_{2s} вычисляют аналогично.

Достоинством методов статистической классификации является возможность прогнозирования (классификации по классам) по нулевому временному сечению, т. е. для прогнозируемой партии достаточно измерить параметры в начальный момент времени, вычислить для каждого из них логарифм отношения правдоподобия (12.38) и сравнить с экспериментально установленным порогом Λ (12.37). Этот метод имеет и недостаток, который затрудняет его применение. При использовании модели (12.38) необходимо ее обучение, т. е. предварительное вычисление матриц $\mathbf{V}_\lambda$ и $\boldsymbol{\mu}_\lambda$ по заранее испытанной партии изделий. Если учесть, что долговечность современных изделий составляет несколько десятков тысяч часов и испытывать их нужно до отказа, то испытание обучающей выборки практически не осуществимо. Для устранения этого недостатка необходимо применять композиционный подход к прогнозированию с целью минимизации производственных испытаний.

Композиционный метод прогнозирования. Вследствие необходимости обучения модели статистической классификации нужно проводить предварительные испытания изделий продолжительностью $T_{\text{гр}}$, значение которой определяется поставленной задачей и сроком прогнозирования (часто это гарантийное время наработки изделий на отказ). Значение $T_{\text{гр}}$ для современных изделий так велико (десятки тысяч часов), что предварительные испытания невозможно провести, следовательно, нельзя применить методы статистической классификации. Для использования этих методов необходимо применить ускоренные методы обучения моделей. Одним из таких методов получения информации для обучения является метод экстраполяции изменения параметров изделий, который был рассмотрен ранее. ***Сущность композиционного метода прогнозирования заключается в совместном использовании методов экстраполяции и статистической классификации.*** Причем методы экстраполяции используют для ускоренного получения матриц $\mathbf{V}_\lambda$ и $\boldsymbol{\mu}_\lambda$, а методы статистической классификации — для принятия решения при прогнозировании срока службы контролируемого изделия. Алгоритм метода следующий:

1) проводят испытания партии изделий — обучающей выборки — в небольшом интервале времени $t_{\text{и}}$, достаточном для построения модели экстраполяции;

2) по данным изменения параметров $\mathbf{y}(t)$ изделий в интервале $t_и$ строят выбранные модели экстраполяции

$$w\,(\mathbf{y},\, t_и);$$

3) осуществляют экстраполяцию изменения параметров до момента выхода их за допустимые пределы $\mathbf{y}^*$;

4) устанавливают время $T_{гр}$, разделяющее испытываемые изделия на два класса R_1 и R_2;

5) после разграничения изделий по срокам службы, установленным значением $T_{гр}$, формируют классы R_1 и R_2 в нулевом сечении времени и вычисляют матрицы (12.39) и (12.40);

6) для вновь поступающих на испытание (экзаменуемых) изделий рассчитывают логарифм отношения правдоподобия (12.38) и на основе (12.37) принимают решение о долговечности изделия.

Форсированные испытания изделий. Наряду с применением методов прогнозирования, сокращение производственных испытаний, как отмечалось, возможно при использовании форсированных испытаний, т. е. испытаний, основанных на форсированных режимах. Эти режимы в несколько раз ускоряют процессы старения изделий, в результате чего значительно раньше наступает отказ и изделия перестают работать.

При проведении форсированных испытаний необходимо:

1) выбрать воздействующие факторы, которые могут быть использованы в качестве форсированных. Это следует осуществлять на основе знания физических основ механизмов старения изделий и факторов, которые их ускоряют;

2) определить уровни форсирования для установленных воздействующих факторов, причем при наиболее жестких уровнях механизм старения изделий не должен принципиально меняться;

3) наметить план форсированных испытаний, определяющий объем испытаний (число испытуемых партий) и сочетание уровней воздействующих факторов, влияющих на каждую партию;

4) определить взаимосвязь состояний изделий в нормальном и форсированных режимах, т. е. вычислить коэффициент ускорения при использовании форсированных режимов.

Существуют различные методы форсированных испытаний. Рассмотрим только те, которые можно классифицировать как одно- и многофакторные форсированные испытания.

Однофакторные форсированные испытания заключаются в следующем. Пусть испытываются две партии изделий и выбран режим форсирования. При этом одну партию испытывают в нормальном режиме ξ_0, а другую — в форсированном (ужесточенном) $\xi_ф$.

Очевидно, что параметры партии изделий в форсированном режиме изменяются быстрее, чем в нормальном (рис. 12.6).

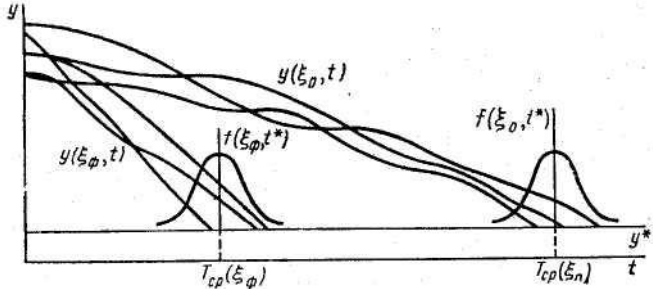


Рис. 12.6

В обоих случаях плотность распределения времени безотказной работы $f(\xi_0, t^*)$, $f(\xi_ф, t^*)$ имеет среднее время безотказной работы $T_{ср}(\xi_0)$ и $T_{ср}(\xi_ф)$.

Коэффициент ускорения режима

$$K_у(\xi_ф) = \frac{T_{ср}(\xi_0)}{T_{ср}(\xi_ф)}. \qquad (12.41)$$

Уровней форсирующего режима может быть выбрано несколько $(\xi_{ф1}, \xi_{ф2}, \dots)$, соответственно столько же партий подвергается испытаниям (помимо партии в нормальном режиме). Для каждого уровня режима вычисляют свой коэффициент ускорения $|K_у(\xi_{ф1}), K_у(\xi_{ф2})|$.

Затем строятзависимость $K_у = f(\xi_ф)$. Для одного типа электровакуумных приборов выражение для интенсивности отказов имеет вид

$$\lambda_а = \lambda_{а0}(u_а/u_{а0})^{1,75},$$

где $\lambda_{а0}$, $\lambda_а$ — интенсивность отказов; $u_{а0}$, $u_а$ — анодно-экранные напряжения (форсирующий фактор) для нормального и форсирующего режимов.

Особенность многофакторных форсирующих испытаний заключается в следующем. Выбор форсирующих факторов и уровней форсирования аналогичен предыдущему. Однако планы многофакторных испытаний принципиально отличаются от однофакторных. Прежде всего многофакторные испытания обладают тем преимуществом, что они всесторонне ускоряют механизмы старения, следовательно, полу-

ченные результаты более объективны, чем результаты однофакторных испытаний.

Планы многофакторных испытаний строятся в соответствии с положениями теории планирования эксперимента.

Пусть $\mathbf{P}_\xi = (\xi_{ji})$ — матрица плана испытаний, $i = \overline{1,\ N},\ j = \overline{1,\ k}$.

Воздействующий фактор $\xi_j,\ j = \overline{1,\ k}$ может принимать различные значения. Тогда план и результаты испытаний можно записать в виде

$$\begin{matrix} \xi_1 \dots \xi_k \\ \left[\begin{matrix} \xi_{11} \dots \xi_{k1} \\ \xi_{12} \dots \xi_{k2} \\ \cdot \\ \xi_{1N} \dots \xi_{kN} \end{matrix}\right] \end{matrix} \begin{matrix} \\ \rightarrow T_{\text{ср}1} \\ \rightarrow T_{\text{ср}2} \\ \cdot\ \cdot\ \cdot \\ \rightarrow T_{\text{ср}N}. \end{matrix} \tag{12.42}$$

Планы испытаний могут быть как первого, так и второго порядка. Как и при экстремальной оптимизации, порядок плана определяется порядком модели, описывающей изменение работоспособности изделия (или показателей надежности) в зависимости от воздействующих форсированных факторов.

Нетрудно видеть, что в случае (12.42) модель $T_{\text{ср}} = f(\xi)$ строится по известному алгоритму МНК. Например, если воздействующих факторов два $(\xi_{\phi 1}$ и $\xi_{\phi 2})$, а модель первого порядка

$$T_{\text{ср}}(\xi_\phi) = b_0 + b_1 \xi_1 + b_2 \xi_2 + b_{12} \xi_1 \xi_2 \tag{12.43}$$

строится по результатам испытаний согласно плану первого порядка

$$\mathbf{P}_{\xi\phi} = \begin{matrix} \left[\begin{matrix} \xi_{\phi 11}\ \xi_{\phi 21} \\ \xi_{\phi 12}\ \xi_{\phi 22} \\ \xi_{\phi 13}\ \xi_{\phi 23} \\ \xi_{\phi 14}\ \xi_{\phi 24} \end{matrix}\right] \end{matrix} \begin{matrix} \rightarrow T_{\text{ср}1} \\ \rightarrow T_{\text{ср}2} \\ \rightarrow T_{\text{ср}3} \\ \rightarrow T_{\text{ср}4}, \end{matrix}$$

то коэффициенты модели вычисляют с помощью выражения

$$\mathbf{B} = (\mathbf{P}_\phi^T \mathbf{P}_\phi)^{-1} (\mathbf{P}_\phi^T \mathbf{T}_{\text{ср}}).$$

Коэффициент ускорения (12.41) для любого варианта сочетаний множества форсированных факторов определяют из отношения

$$K_{\text{у}}(\xi_\phi) = \frac{\widehat{T}_{\text{ср}}(\xi_0)}{\widehat{T}_{\text{ср}}(\xi_\phi)}, \tag{12.44}$$

где $\widehat{T}_{ср}(\xi_0)$, $\widehat{T}_{ср}(\xi_ф)$ — среднее время безотказной работы, найденное соответственно для вариантов воздействующих факторов ξ_0 и $\xi_ф$.

Многие изделия имеют сроки службы до нескольких десятков тысяч часов. В связи с этим даже самые жесткие форсированные режимы не всегда позволяют сократить производственные испытания до приемлемых сроков. Поэтому целесообразно применять комбинированный метод сокращения испытаний, основанный на совместном использовании форсированных испытаний и прогнозирования. В общем случае алгоритм метода следующий:

1) выбирают воздействующие факторы, которые ускоряют процессы старения в изделиях испытываемых партий;

2) устанавливают на основе знания физики процессов старения и априорных испытаний уровни воздействующих факторов (режимы форсирования). При этом необходимо, чтобы предельные уровни или совокупность форсированных уровней, воздействующих на изделия, не искажали существующих механизмов старения при номинальных режимах;

3) выбирают модель описания форсированных испытаний первого или второго порядка ;

4) уточняют план форсированных испытаний, порядок которого зависит от порядка модели;

5) для каждой точки плана (условий проведения испытаний) определяют партию изделий и проводят форсированные испытания до момента времени $T_ф$ (рис. 12.7). Значение $T_ф$ устанавливают исходя из требований сокращения производственных испытаний;

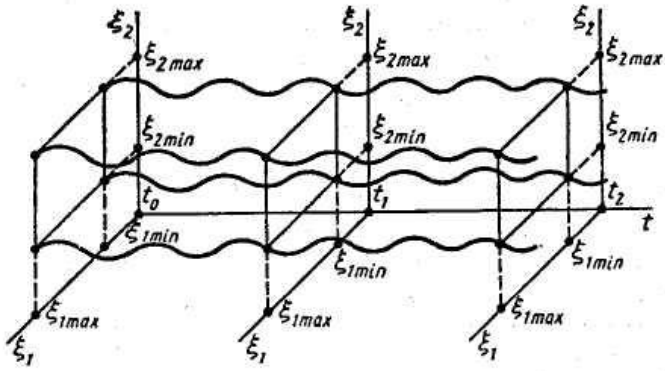


Рис. 12.7

6) по данным контроля параметра изделий *y (t)* на отрезке времени $[t_0 — T_ф]$ строят модель экстраполяции *W (y, t);*

7) осуществляют экстраполяцию изменения параметров *y(t)* с помощью модели *W(y, t*) до момента, когда их значения достигают допустимых границ *y**;

8) по полученным предсказанным значениям сроков отказов $t_j^*, (j = \overline{1, n})$ для каждой из *N* партий вычисляют среднее время безотказной работы $T_{c\,pi}, i = \overline{1, N}$;

9) строят модель $T_{ср}=t(\xi_ф)$ согласно (12.43) и рассчитывают коэффициент ускорения (12.44).

В результате применения подобного алгоритма удается сократить длительность производственных испытаний в несколько десятков раз. Рассмотренные методы можно представить в виде классификационной схемы (рис. 12.8).

Рис. 12.8

12.3. Регрессионно – временные модели

Регрессионно-временные модели (РВМ) отражают зависимость исследуемого параметра изделия *y* от множества воздействующих факторов ξ и от времени *t*. Иногда их называют пространственно-временными моделями. Достоинством подобных моделей является возможность оценки поведения параметра при любом сочетании воздействующих факторов (для выбранного факторного пространства), а также при прогнозировании параметра для определенного момента времени.

При миниимзации продолжительности производственных испытаний РВМ позволяют выбрать необходимое сочетание воздействующих факторов, сокращающее испытания в требуемое число раз. РВМ строят на стадии обучения модели по результатам предварительных испытаний.

Введение фактора времени t в многофакторную регрессионную модель влияет на методы построения подобных моделей и на алгоритмы определения их коэффициентов. Специфика построения РВМ заключается в том, что время является необратимым и, следовательно, не поддается рандомизации. Кроме того, изменение во времени параметра (отклика) Δy для современных изделий значительно меньше, чем его изменение от варьируемых воздействующих факторов $\Delta\xi$. Поэтому нужны достаточно большие интервалы Δt для получения заметного изменения Δy (при отсутствии воздействующего фактора ξ), что усложняет эксперимент и построение модели. Для оценки временного изменения функции отклика необходимо определить, каким образом она изменяется во времени и соответственно как, и ввести в модель слагаемые, показывающие зависимость y от t.

Это следует учитывать при выборе функции отклика, воздействующих факторов ξ, вида РВМ, плана испытаний, а также при вычислении коэффициентов модели и анализе ее адекватности.

Выбор функции отклика y для ряда изделий часто очевиден — это выходные параметры изделий, характеризующие его техническое состояние, или показатели надежности (интенсивность отказов, среднее время безотказной работы и т. п.).

Воздействующими варьируемыми факторами могут являться климатические, механические и электрические (нагрузочные) воздействия, среди которых можно выделить температуру, влажность, давление, вибрацию и др. Возможны также циклические воздействия указанных факторов.

Регрессионно-временная модель может быть первого и второго порядка; при этом введение фактора времени может осуществляться разными путями. Это зависит от вида влияния времени t на функцию отклика y.

Можно выделить три вида влияния фактора времени на зависимость $y = f(\xi, t)$:

1) поверхность отклика смещается во времени в факторном пространстве без «деформации», т. е. изменяется только свободный член модели b_0, остальные постоянны. Этот случай можно рассматривать как невзаимодействие фактора времени с факторами, воздействующими на изделие в процессе испытаний. Подобное

изменение состояния изделия получило название *аддитивного дрейфа:*

$$\widehat{y} = b_0(t) + \sum_{j=1}^{k} b_j \xi_j. \tag{12.45}$$

Это соответствует случаю, когда состояние изделия изменяется в результате процессов старения, которые не зависят от воздействующих факторов;

2) поверхность отклика искажается во времени, не смещаясь в факторном пространстве, т. е. влияние факторов на функцию отклика меняется во времени. Это означает, что состояние изделия под воздействием только фактора времени не меняется, т. е. старения изделия не происходит. Подобное возможно для высоконадежных изделий на относительно небольшом отрезке времени. Модель состояния изделия в этом случае имеет вид

$$\widehat{y} = b_0 + \sum_{j=1}^{k} b_j(t) \xi_j; \tag{12.46}$$

3) поверхность отклика, смещаясь в факторном пространстве, искажается со временем (фактор времени взаимодействует с воздействующими варьируемыми факторами). Такое изменение состояния получило название *неаддитивного дрейфа:*

$$\widehat{y} = b_0(t) + \sum_{j=1}^{k} b_j(t) \xi_j. \tag{12.47}$$

Методы построения математических моделей испытаний часто оказываются различными для объектов с аддитивным и неаддитивным дрейфом. Следует, однако, отметить, что процессы старения, происходящие с течением времени, могут зависеть от совокупности воздействующих факторов и от значений их уровней, т. е. модели, описывающие изменение состояния изделий, как правило, имеют вид (12.47).

Рассмотрим алгоритм построения модели (12.47) при оптимизации производственных испытаний изделий электронной техники. Для построения зависимости работоспособности от воздействующих факторов необходимо провести испытания по плану типа (12.42), а для оценки зависимости $\overline{y} = f(t)$ следует составить план испытаний во времени. Подобным планом может служить план

$$\mathbf{P}_t = \begin{bmatrix} t_0 t_1 \dots t_\mu \\ r_0 r_1 \dots r_\mu \end{bmatrix}. \tag{12.48}$$

где t_s, $s = \overline{0, \mu}$ - моменты контроля; r_s, $s = \overline{0, \mu}$ — частота контроля.

Общий план испытаний

$$\mathbf{P}_{\text{п}} = \{\mathbf{P}_{\xi} \times \mathbf{P}_{t}\}, \tag{12.49}$$

где знак «×» означает совместное применение планов.

План испытаний можно раскрыть с учетом (12.42) и (12.48):

$$\mathbf{P}_{\text{п}} = \left\{ \begin{bmatrix} \xi_{11} \dots \xi_{k1} \\ \xi_{12} \dots \xi_{k2} \\ \cdot \quad \cdot \quad \cdot \\ \xi_{1N} \dots \xi_{kN} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} r_{01} \; r_{11} \dots r_{\mu 1} \\ r_{02} \; r_{12} \dots r_{\mu 2} \\ \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \\ r_{0N} \, r_{1N} \dots r_{\mu N} \end{bmatrix} \right\}. \tag{12.50}$$

Подобная запись плана предполагает следующий порядок построения модели—сначала строят многофакторные модели, отражающие зависимость y от ξ для каждого момента времени t_s, $s = \overline{0, \mu}$, затем по полученным временным функциям $b_i = f_i(t)$ ищут f_i для каждого коэффициента. В общем случае это полиномиальная регрессионная модель, коэффициенты которой **A** определяют методом наименьших квадратов:

$$\mathbf{A} = (\mathbf{t}^T \mathbf{t})^{-1} (\mathbf{t}^T \mathbf{B}), \tag{12.51}$$

где

$$\mathbf{t} = \begin{bmatrix} t_0 \, t_1 \; t^2 \dots \\ 1 \; t_1 \; t_1^2 \\ 1 \; t_2 \; t_2^2 \\ \cdot \quad \cdot \quad \cdot \\ 1 \; t_N \; t_N^2 \end{bmatrix}. \tag{12.52}$$

Последовательность построения модели может быть изменена. Тогда (12.49) можно представить в виде

$$\mathbf{P}_{\text{п}} = \{\mathbf{P}_{t} \times \mathbf{P}_{\xi}\}. \tag{12.53}$$

Рассмотрим построение модели работоспособности электрического изделия на основе проведения производственных испытаний по плану (12.53).

В качестве наиболее информативных параметров электрических изделий, т. е. наиболее полно характеризующих их работоспособность, контролировались: напряжение запирания $U_э$, т. е. напряжение на модуляторе, при котором ток катода равен 1 мкА (для этого параметра установлен двусторонний граничный предел: —55 В $\leq U_э \leq$ —25В), яркость свечения экрана L, измеряемая при заданной силе тока катода

и заданных напряжениях на электродах — она характеризует качество экрана (L = 25 кд/м^2), ток катода $I_к$ при напряжении модуляции $U_M = 0{,}2U_э$ ($I_к \geq 100$ мкА).

Таким образом, необходимо построить регрессионно-временные модели при воздействии нагрузочных электрических факторов, которые позволяют минимизировать продолжительность производственных испытаний.

Выберем факторы, которые, воздействуя на изделие, ускоряют процессы старения. Поскольку основным элементом изделия, определяющим ее надежность, является оксидный катод, первым форсирующим фактором является напряжение накала U_H. В качестве второго воздействующего фактора выберем ток луча $I_л$. Увеличение тока луча способствует ускорению старения, так как при этом увеличивается плотность тока эмиссии, а следовательно, скорость процесса старения катода. Кроме того, возрастает яркость свечения люминофора экрана, приводящая к его ускоренному старению. Третьим воздействующим фактором возьмем коэффициент производственного запаса по току пятого анода γ. Этот показатель во многом определяет срок службы изделия:

$$\gamma = (I_{a5} \cdot 0{,}1U_э)/I_{a5ном},$$

где I_{a5}, $I_{a5ном}$ — соответственно фактический и номинальный ток пятого анода. Этот фактор следует рассматривать как пассивный, представляющий собой индивидуальную характеристику изделия, которую желательно иметь в модели.

В результате общая модель работоспособности изделия будет представлена моделями трех упомянутых параметров, зависящих от выбранных воздействующих факторов и времени: $y = f(U_п, I_л, \gamma, t)$

Предварительные (обучающие) испытания для построения моделей проводились по плану первого порядка, по полуреплике 2^{3-1}, состоящей из четырех опытов. В табл. 12.7 приведены интервалы варьирования воздействующих факторов, причем нижние уровни y факторов $U_п$ и $I_л$ равны номинальному значению, а уровни задаются подбором соответствующих приборов.

Таблица 12.7

Факторы	Интервал варьирования	Нулевой уровень	Нижний уровень	Верхний уровень
$U_н$, В	0,3	6,6	6,3	6,9
$I_л$, мкА	3,2	6,8	3,6	10
γ, В	0,75	8,25	7,5	9

План условий испытаний каждой выборки приведен в табл. 12.8.

Таблица 12.8

№ испытаний	$U_н$, В	$I_л$, мкА	γ, В
1	6,3	3,6	9
2	6,9	3,6	7,5
3	6,3	10	7,5
4	6,9	10	9

В соответствии с выбранным планом были проведены испытания отдельных выборок изделий. Результаты измерения тока катода $I_к$ приведены в табл. 12.9, тока спирали $I_{сп}$ - в табл. 12.10, яркости L — в табл. 12.11.

Таблица 12.9

№ испытаний	Время наработки, ч							
	0	100	200	300	400	500	700	1000
1	285	267	250	240	235	223	200	183
2	272	248	235	220	205	199	175	143
3	295	270	258	235	225	214	198	168
4	320	291	273	252	228	215	195	159

Таблица 12.10

№ испытаний	Время наработки, ч							
	0	100	200	300	400	500	700	1000
1	30,1	29,3	28,5	27,4	26,3	25,7	23,1	22,0
2	32,2	31,5	29,0	27,1	27,1	26,2	24,9	21,1
3	31,2	30,2	29,9	28,8	28,1	27,3	25,7	23,5
4	30,7	28,6	26,9	25,8	24,5	23,5	19,1	17,1

Таблица 12.11

№ испытаний	Время наработки, ч							
	0	100	200	300	400	500	700	1000
1	59,6	53,7	51,4	51,5	49,5	48,2	48,5	47,2
2	55,8	49,4	45,3	45,1	43,7	40,9	40,0	38,1
3	56,1	50,1	48,4	47,9	45,7	44,2	43,1	41,0
4	59,4	50,7	47,6	47,4	44,6	44,5	40,6	39,5

Так как общий алгоритм построения модели выбран по плану (12.53). то сначала следует построить временные модели $I_к$, $I_{сп}$, $L=f(t)$, подбирая по экспериментальным данным соответствующий их вид В результате диализа были выбраны модели

$$I_к = b_{0к} \exp[-b_{1к} t];$$
$$I_{сп} = b_{0сп} + b_{1сп} t;$$
$$L = \frac{b_{0L}}{1 + b_{1L} t}.$$

где b_i — неизвестные коэффициенты, вычисленные после окончания испытаний (табл. 12.12)

Таблица 12.12

Параметр	№ испытаний	Оценки коэффициентов моделей	
		b_0	$b_1 \cdot 10^{-4}$
$I_к$	1	284,07	—5,637
	2	268,19	—8,211
	3	291,13	—7,019
	4	325,78	—9,913
$I_{сп}$	1	29,50	—80,12
	2	32,22	—110,25
	3	30,51	—90,37
	4	29,69	—130,56
L	1	54,87	—3,135
	2	51,19	—7,924
	3	52,90	—6,124
	4	53,89	—8,076

Таким образом, каждый коэффициент зависит от условий проведения испытаний, т. е. от воздействующих факторов $U_п$, $I_л$ и γ.

Поскольку был выбран план первого порядка, то и модель можно построить только первого порядка:

$$b_j = a_0 + a_1 U_н + a_2 I_л + a_3 \gamma. \qquad (12.55)$$

Ускорение процессов старения в основном характеризуется значением коэффициентов b_1. Поэтому зависимость (12.55) построим только для b_1, а значение b_0 возьмем усредненным по всем четырем опытам.

Таким образом, для b_1 имеем:

$$b_{1к} = 0{,}00239 - 4{,}56 \cdot 10^{-4} U_н + 2{,}5 \cdot 10^{-6} I_л - 1{,}067 \cdot 10^{-5} \gamma;$$
$$b_{1сп} = 0{,}0314 - 58{,}3 \cdot 10^{-4} U_н + 7{,}8 \cdot 10^{-6} I_л - 33 \cdot 10^{-5} \gamma;$$
$$b_{1L} = 0{,}0025 - 5{,}63 \cdot 10^{-4} U_н - 2{,}4 \cdot 10^{-5} I_л + 9{,}4 \cdot 10^{-5} \gamma.$$

Модели выбранных параметров имеют вид:

$$I_к = 292{,}3 \exp\left(0{,}0024 - 4{,}56 \cdot 10^{-4} U_н + 2{,}56 \cdot 10^{-6} I_л - 1{,}07 \cdot 10^{-5} \gamma\right) t;$$
$$I_{сп} = 30{,}48 + \left(0{,}0314 - 58{,}3 \cdot 10^{-4} U_н + 7{,}8 \cdot 10^{-6} I_л - 33 \cdot 10^{-5} \gamma\right) t;$$
$$L = \frac{53{,}216}{1 + \left(0{,}0025 - 5{,}63 \cdot 10^{-4} U_н - 2{,}4 \cdot 10^{-5} I_л + 9{,}4 \cdot 10^{-5} \gamma\right) t}.$$

Полученные составные части общей регрессионно-временной модели работоспособности изделия позволяют оценить его состояние в любой момент времени и для различных воздействующих и форсирующих режимов. Кроме того, можно вычислить срок службы изделия для заданных режимов. Таким образом, можно выбрать и воздействующие режимы, которые сокращают производственные испытания до требуемой продолжительности.

13. Примеры решения задач оптимизации при планировании эксперимента и классификация экспериментальных планов

Навыки в планировании и проведении эксперимента приходят не сразу, они приходят с жизненным опытом после решения нескольких конкретных задач. В этом разделе мы ограничимся разбором двух из таких задач — задачи экстракционного разделения циркония и гафния трибутилфосфатом и задачи оптимизации свойств многокомпонентного материала.

На первой задаче мы последовательно рассмотрим все логические и вычислительные операции, характерные для процедуры оптимизации..

13.1 Пример оптимизации параметров экстракционного разделения циркония и графия трибутилфосфатом

13.1.1. Предпланирование эксперимента

Задача получения циркония с низким содержанием гафния возникла в связи с использованием циркония и его сплавов как конструкционного материала для ядерных реакторов. Конструкционные материалы должны иметь хорошие механические свойства и быть коррозионно стойкими к действию теплоносителей. Так как мощность реакторов

пропорциональна количеству имеющихся в них нейтронов, поглощение нейтронов конструкционными материалами должно быть небольшим. Цирконий и его сплавы являются чуть ли не единственными материалами, удовлетворяющими этим требованиям. Гафний, обладая близкими с цирконием химическими свойствами, довольно сильно поглощает нейтроны.

Циркониевые руды содержат 1—3% гафния, однако содержание гафния в цирконии, используемого как конструкционный материал, не должно превышать сотых долей процента .

Экстракционные методы разделения циркония и гафния нашли широкое применение в технологии получения этих металлов. По одному из наиболее распространенных вариантов технологии экстракция проводится раствором трибутилфосфата (ТБФ) в инертном разбавителе из азотнокислых растворов. Однако условия процесса, предлагаемые различными авторами для статической экстракции и одностадийного разделения, в большой степени различаются. Не удивительно поэтому, что величина параметра оптимизации, характеризующего процесс разделения — коэффициента разделения металлов, лежит в диапазоне от 4 до 21 .

Выбор параметра оптимизации. Рассмотрим теперь вопрос о параметре оптимизации для данной задачи. В этом случае, как и всегда, сначала обсуждается все множество откликов, известное по литературным данным и из опыта экспериментатора. Затем делается попытка построить единственный параметр оптимизации, а если это не удается, то приходится использовать некоторое обобщение.

Экстракция относится к классу разделительных процессов, а для них предложено несколько десятков параметров — технологических, термодинамических, экономических, статистических и т. д. Общими и существенными характеристиками разделительных процессов являются полнота извлечения ценного компонента, производительность по готовому продукту и качество продукта. Рост любой из них приводит к падению других характеристик.

В настоящем исследовании мы также имеем дело с количеством (полнота извлечения) и качеством (низкое содержание гафния) продукта. В схеме классификации параметров оптимизации характеристики количества и качества продукта отнесены к группе технико-технологических параметров. Если только ограничиться параметрами этой группы, то следует учитывать, что они недостаточно универсальны, не учитывают экономику процесса. Но их использование вполне допустимо при решении конкретных задач типа оптимизации отдельных стадий, основных операций и т. д. Параметры

оптимизации этой группы просты, легко вычисляемы и имеют ясный физический смысл.

Из группы технико-технологических параметров оптимизации для процессов экстракции, реализуемых в лабораторном масштабе, широко распространены коэффициент распределения, фактор извлечения и коэффициент разделения.

Коэффициент распределения D равен отношению общей концентрации вещества в органической фазе к его концентрации в водной фазе.

Фактор извлечения R (процент экстракции) — доля или процент от общего количества вещества, экстрагируемого в органическую фазу при данных условиях.

Коэффициент разделения двух металлов равен отношению коэффициентов распределения.

Как следует из этих определений, между коэффициентом распределения и фактором извлечения при равенстве объемов фаз существует связь: $R = 100D/(D+1)$. Еще предлагалось характеризовать разделение двух металлов фактором обогащения, равным отношению факторов извлечения .

Для систем с высокой разделяющей способностью использовался параметр оптимизации, равный сумме извлечений одного из металлов в органическую фазу, а другого — в водную фазу .

В качестве параметра оптимизации выбираем коэффициент разделения. При этом учтем, что в нескольких предварительных опытах было достигнуто значение коэффициента разделения циркония и гафния, близкое к десяти, а извлечение суммы металлов в органическую фазу составило 30—40%. Легко установить, что извлечение гафния в органическую фазу невелико, всего несколько процентов. Для сокращения сроков исследования на первых этапах решения задачи, по-видимому, можно ограничиться одним параметром оптимизации — *коэффициентом разделения*. Но на последующих этапах очевидно следует вводить характеристики процесса, связанные с полнотой извлечения, например извлечение суммы металлов в органическую фазу. Тогда же целесообразно будет обратиться к обобщенному параметру оптимизации.

Последовательный подход к выбору параметров оптимизации не должен вызывать возражений. Некоторым примером может служить шахматная игра, когда конечная цель достигается последовательным выполнением иных задач: максимального развития своих фигур, достижения материального перевеса и т. д. .

Здесь естественно ставить задачу получения максимальных значений коэффициента разделения, так как при эффективном разделении металлов сокращаются расходы экстрагента и упрощается аппаратурная схема процесса.

Еще одно обстоятельство в пользу выбора коэффициента разделения. Представляет интерес сравнение результатов планируемых опытов с данными классических однофакторных экспериментов, известных из литературы.

Таким образом, в этой задаче решено использовать коэффициент разделения. Нужно, однако, иметь в виду, что коэффициент разделения может иметь большую величину и при плохом разделении (например, $D_1=10^3$, $D_2=10$) . Следовательно, когда извлечение сразу двух металлов в органическую фазу велико, применение этого критерия нецелесообразно.

К моменту начала эксперимента в предварительных опытах наилучшие значения коэффициента разделения равнялись 10, а в литературе встречались значения около 20. Если бы в результате оптимизации удалось получить значения, превосходящие 20, то работу можно было бы считать успешной.

Из априорных данных известна примерная оценка дисперсии воспроизводимости: $s^2_{(y)} = 1{,}0$.

Выбор факторов. Ранее мы отмечали, что следует включать в рассмотрение все существенные факторы, которые могут влиять на процесс. Необходимо пояснить, что значит существенные факторы.

Принципиально на любой объект исследования влияет неограниченно большое число факторов. Какие из них являются существенными, а какие нет, определяется постановкой задачи, условиями проведения эксперимента, состоянием теоретических представлений в этой области. Например, достижение в производственных условиях требуемого по количеству и качеству продукта варьированием небольшого числа факторов удешевляет процесс, в то время как во многих лабораторных исследованиях экономика может отступать на задний план, а первостепенное значение приобретает содержательная информация о механизме процесса, получаемая при варьировании многих факторов. Имеет смысл на первых этапах исследования включать в рассмотрение большое число факторов (хотя бы по сравнению с аналогичными задачами, выполняемыми с помощью однофакторных экспериментов). Экспериментальная оценка «силы влияния» позволит выделить наиболее существенные факторы.

Обсудим вопрос о выборе факторов. Для данной экстракционной системы с целью отбора факторов были использованы методы

априорного ранжирования и случайного баланса. Эти методы выделения наиболее влияющих факторы наиболее эффективны. Они интересны еще и потому, что здесь возможно предложить последовательную схему оптимизации многофакторных процессов методами планирования эксперимента: *метод априорного ранжирования факторов — метод случайного баланса — метод крутого восхождения — планирование второго порядка* .

Возвращаясь к нашей задаче, ограничимся кратким замечанием: из двенадцати «подозреваемых» факторов было выделено четыре: концентрации суммы металлов и азотной кислоты в исходном водном растворе, концентрация реагента ТБФ в разбавителе и соотношение объемов фаз. Эти результаты не противоречат существующим теоретическим представлениям о роли различных факторов в подобных экстракционных системах .

Итак, варьируемые факторы: $\tilde{x}_1$ — концентрация металлов на сумму двуокисей циркония и гафния {$\Sigma Zr(Hf)O_2$} в исходном водном растворе, *г/л;* $\tilde{x}_2$ — концентрация азотной кислоты в исходном водном растворе, *мол/л;* $\tilde{x}_3$— концентрация ТБФ в *о*-ксилоле, объемные *%;* $\tilde{x}_4$ — соотношение объемов фаз, органической к водной.

Методика эксперимента. Для приготовления исходных растворов применяли оксинитрат циркония, содержащий 1,5—2,1% гафния по отношению к сумме двуокисей. Исходные азотнокислые растворы оксинитрата с различной концентрацией соли и кислоты получались разбавлением концентрированного водного раствора соли. Экстрагентом служил ТБФ, разбавленный *о*-ксилолом. Опыты проводили в статических условиях. Экстрагент предварительно насыщался азотной кислотой. Раствор и экстрагент (по 20 *мл)* перемешивали в делительных воронках в течение 15 *мин* на вибрационном аппарате. Реэкстракция осуществлялась двукратным встряхиванием органической фазы с равными объемами дистиллированной воды. Водную фазу после экстракции и реэкстракции анализировали на содержание суммы окислов циркония и гафния гравиметрическим методом. Содержание гафния определялось спектральным методом. Концентрация азотной кислоты устанавливалась титрованием по метиловому красному.

13.1.2. Выбор, условий проведения опытов

Выбор области определения факторов. Вначале рассмотрим выбор области для первого фактора—концентрации металла. Здесь, как это часто бывает, приходится сталкиваться с противодействующими тенденциями. С одной стороны, выгодно повышать концентрацию

суммы металлов, так как при этом усиливается процесс подавления экстракции гафния цирконием, и коэффициент разделения растет. С другой стороны, повышению концентрации металлов препятствуют трудности приготовления исходных растворов и образование еще одной, третьей фазы, что снижает разделение.

По данным разных авторов, концентрация суммы металлов (это и есть первый фактор) изменяется от 35 до 120 *г/л.* Если «классический» эксперимент, с помощью которого получены эти цифры, можно сравнить с выстрелом по цели из ружья, то метод крутого восхождения — это уже выстрел из пушки. Имеет смысл выбрать «площадь поражения» побольше, а потому — область определения для концентрации суммы металлов установлена от 20 до 150 *г/л.*

Второй фактор — концентрация азотной кислоты. При концентрации менее 3 *мол/л* цирконий и гафний экстрагируются слабо. С ростом концентрации увеличивается и извлечение металлов в органическую фазу. При концентрации кислоты выше 5 *мол/л* гафний хорошо извлекается в органическую фазу, разделение падает. Здесь «рассогласование» литературных данных гораздо меньше, чем по концентрации металла: диапазон всего от 5 до 6 *мол/л.* Здесь выбрана область определения от 3 до 8 *мол/л.*

Перейдем к концентрации реагента в разбавителе и соотношению объемов фаз. Литературные рекомендации (полученные однофакторным экспериментом) сводятся к таким цифрам:

$$\tilde{x}_3 = 50\text{-}60 \text{ об. \%}, \quad \tilde{x}_4 = 1{:}1\text{-}2{:}1.$$

Целесообразно уменьшать концентрацию ТБФ в разбавителе в надежде улучшить экономические показатели процесса. Повышению концентрации реагента препятствует высокая вязкость растворов. Поэтому растворы концентрации выше 70% обычно не используются. Для ТБФ выбрана область 20—70 об.%.

Предварительными экспериментами установлено слабое извлечение металлов при соотношении объемов фаз менее 1:1. Верхняя граница определяется экономическими соображениями. Здесь задана область определения для соотношения объемов фаз от 1:1 до 4:1. Сведения об областях определения факторов, точности поддержания уровней и области, в которой по литературным данным и результатам предварительных экспериментов оптимизация наиболее целесообразна (область интереса), представлены в табл. 13.1.

Теперь перейдем к выбору основного уровня факторов.

Таблица 13.1

Характеристики факторов*

Фактор	Область определения	Область интереса
Концентрация металлов на сумму двуокисей в исходном водном растворе, *г/л*	20—150	20—60
Концентрация азотной кислоты в исходном водном растворе, *мол/л*	3—8	3—7
Концентрация трибутилфосфата в разбавителе, об.%	20—70	20—50
Соотношение фаз (органическая к водной)	1 : 1—4 : 1	1 : 1—2 : 1

* Точность (коэффициент вариации) для всех факторов не более 3%.

Принятие решений при выборе основного уровня факторов.

Уже отмечалось ранее, что оптимизации новых многофакторных процессов методами планирования эксперимента обычно предшествуют некоторые (будем их называть предварительными) опыты, из которых мы узнаем, что процесс «идет», опыты воспроизводятся и т. д. Несколько подобных опытов в подобласти $\tilde{x}_1=20-40$ *г/л*; $\tilde{x}_2=3-5$ *мол/л*; $\tilde{x}_3=20-40$ об.%; $\tilde{x}_4=1:1-2:1$ были проделаны и в рассматриваемом случае. Здесь процесс экстракционного разделения протекал без трудностей: расслаивание водной и органической фаз достигалось достаточно быстро, не образовывалась третья фаза и т. д. Правда, значения коэффициента разделения в предварительных опытах не превышали десяти. Будем считать, что в отмеченной подобласти процесс разделения протекал достаточно хорошо. Данной ситуации соответствуют два эквивалентных решения: выбор центра подобласти и выбор случайной точки в подобласти. Остановимся на первом решении. Таким образом, основной уровень факторов равен:

$$\tilde{x}_1=30 \ г/л, \ \tilde{x}_2=4 \ мол/л, \ \tilde{x}_3=30 \ об.\%, \ \tilde{x}_4=1{,}5:1.$$

Как видим, пока что процедуры выбора параметров оптимизации, факторов и их основного уровня проходят «гладко». Но впереди возникают трудности в виде принятия решений при выборе интервалов варьирования факторов.

Принятие решений при выборе интервалов варьирования факторов. Согласно сделанным ранее рекомендациям, при выборе интервалов варьирования факторов следует учитывать точность фиксирования значений факторов, информацию о кривизне поверхности отклика и диапазоне изменения параметра оптимизации. Погрешности в фиксировании факторов не превышают 3 %, что было подтверждено несколькими специально поставленными опытами. По приближенной классификации — это средняя точность. Диапазон

изменения параметра оптимизации может быть признан широким, так как в предварительных опытах разброс значений параметра оптимизации существенно превышал ошибку воспроизводимости. Осталось рассмотреть вопрос о кривизне поверхности отклика. По факторам $\tilde{x}_2$, $\tilde{x}_3$ и $\tilde{x}_4$ кажется разумным предположение об отсутствии информации по кривизне, поверхности отклика. Только по фактору $\tilde{x}_1$ можно полагать наличие нелинейной зависимости, в связи со значительным расхождением приводимых рекомендаций (35—123 *г/л).*

Для выбора интервалов обращаемся к схеме принятия решений при средней точности фиксирования факторов. Напомним, что ситуации обозначены номерами в кружочках, признаки ситуации определяются стрелками, направленными к данному кружочку, стрелка, выходящая из него, указывает решение. Выбранные признаки в рассматриваемой задаче для факторов $\tilde{x}_2$, $\tilde{x}_3$ и $\tilde{x}_4$ соответствуют ситуации 16 и принимаемое решение — средний интервал варьирования. Что же касается фактора $\tilde{x}_1$, то здесь имеет место ситуация 13 схемы и другое решение — узкий интервал варьирования.

Условия первой серии опытов приведены в табл. 13.2. Интервал варьирования по первому фактору составляет примерно 4% от области определения, по второму и третьему факторам — 20%, по четвертому фактору — 17%. Если интервал составляет не более 10% от области определения, то его можно отнести к узким, если не более 30% — к средним. В нашем примере эти условия соблюдены, поэтому можно считать, выбор решения соответствующим схеме. В этой экспериментальной области существует возможность установления факторов на любых уровнях и заданные значения уровней остаются постоянными в течение опыта.

Таблица 13.2

Уровни и интервалы варьирования факторов
(первая серия)

Уровни	Факторы			
	$\tilde{x}_1$	$\tilde{x}_2$	$\tilde{x}_3$	$\tilde{x}_4$
Основной	30	4	30	1,5
Интервал варьирования	5	1	10	0,5
Верхний	35	5	40	2
Нижний	25	3	20	1

13.1.3. Выбор и реализация плана

(первая серия)

Ранее был изложен шаговый принцип поиска оптимума, связанный с реализацией коротких серий опытов, позволяющих строить модели для оценки градиента. Будем предполагать, что в выбранной области первой серии опытов линейная модель окажется адекватной.

Выбор плана. При выборе плана прежде всего следует учитывать критерии оптимальности и число опытов. В нашем случае ясно, что искомый план должен быть двухуровневым, так как нас интересует линейная модель, ортогональным и ротатабельным.

Ортогональность позволяет двигаться по градиенту пропорционально коэффициентам линейной модели и независимо интерпретировать эффекты. Ротатабельность обеспечивает гарантированное равенство дисперсий предсказания при движении в любом направлении от центра эксперимента. Всем этим требованиям удовлетворяет факторный эксперимент 2^4. Однако если принять во внимание стремление к минимизации опытов, то целесообразно применить полуреплику, которая относительно линейной модели сохраняет оптимальные свойства полного факторного эксперимента.

Существуют альтернативные планы, такие, как симплекс-планирование Плакетта—Бермана и др., рассмотренные ранее, однако они не удовлетворяют одновременно всем сформулированным требованиям. Эффективность дробной реплики определяется системой смешивания. Здесь нет каких-либо специальных соображений о большей значимости тройных взаимодействий по сравнению с парными взаимодействиями, поэтому нет смысла выбирать полуреплику 2^{4-1} с разрешающей способностью III**.** Так как было намечено движение по градиенту, целесообразно получить линейные эффекты, свободные от парных эффектов взаимодействия. Такие оценки позволяют получать главные полуреплики от полного факторного эксперимента 2^4, планы с разрешающей способностью IV. Выбрана полуреплика с генерирующим соотношением $x_4=x_1x_2x_3$.

Матрица планирования приведена в табл. 13.3. При выборе такого типа планирования получаем следующую систему смешивания оценок:

$$b_0 \to \beta_0, \quad b_3 \to \beta_3, \quad b_{13} \to \beta_{13} + \beta_{24},$$
$$b_1 \to \beta_1, \quad b_4 \to \beta_4, \quad b_{14} \to \beta_{14} + \beta_{23},$$
$$b_2 \to \beta_2, \quad b_{12} \to \beta_{12} + \beta_{34},$$

Таблица 13.3

Матрица планирования опытов

(первая серия)

Номер опыта	x_1	x_2	x_3	x_4	Номер опыта	x_1	x_2	x_3	x_4
1	−1	−1	−1	−1	5	+1	+1	−1	−1
2	+1	−1	+1	−1	6	+1	−1	−1	+1
3	−1	−1	+1	+1	7	−1	+1	+1	−1
4	−1	+1	−1	+1	8	+1	+1	+1	+1

Условия проведения первой серии опытов в натуральных переменных представлены в табл. 13.4.

Таблица 13.4

Условия проведения опытов

(первая серия)

Номер опыта	Номер параллельного опыта	$\tilde{x}_1$	$\tilde{x}_2$	$\tilde{x}_3$	$\tilde{x}_4$	Номер опыта	Номер параллельного опыта	$\tilde{x}_1$	$\tilde{x}_2$	$\tilde{x}_3$	$\tilde{x}_4$
1	9	25	3	20	1	5	13	35	5	20	1
2	10	35	3	40	1	6	14	35	3	20	2
3	11	25	3	40	2	7	15	25	5	40	1
4	12	25	5	20	2	8	16	35	5	40	2

Переход от натуральных значений факторов к кодированным значениям задается формулами:

$$x_1 = \frac{\tilde{x}_1 - 30}{5}, \quad x_2 = \frac{\tilde{x}_2 - 4}{1}, \quad x_3 = \frac{\tilde{x}_3 - 30}{10}, \quad x_4 = \frac{\tilde{x}_4 - 1{,}5}{0{,}5}.$$

Еще один важный вопрос для обсуждения — выбор числа параллельных опытов. Они нужны для исключения грубых наблюдений, оценки дисперсии воспроизводимости.

Заметим, что если не проводятся параллельные опыты, то возможное неверное установление значения параметра оптимизации хотя бы в одном опыте изменит оценки всех коэффициентов регрессии. Реализация хотя бы двух параллельных опытов позволяет избежать этой ошибки. В нашем случае предварительная оценка дисперсии воспроизводимости ($s^2_{(y)}$) = 1,0) казалось установленной достаточно надежно, поэтому было выбрано минимальное число параллельных опытов — два. Номера параллельных опытов приведены в табл. 13.4.

Последняя операция перед проведением эксперимента — рандомизация опытов, заключающаяся в выборе случайной

последовательности при постановке опытов, для исключения влияния систематических ошибок, вызванных внешними условиями.

Общее число проводимых опытов — шестнадцать. С помощью таблицы случайных чисел получена последовательность: 15, 13, 10, 5, 14, 4, 6, 1, 7, 8, 3, 2, 9, 12, 11, 16. В табл. 13.5 приведены порядок выполнения, матрица планирования и результаты первой серии опытов (здесь y' и y'' — результаты параллельных опытов, $\overline{y}$ — их среднее значение).

Таблица 13.5.

Порядок проведения и результаты опытов, матрица планирования

(первая серия)

Номер опыта	Порядок проведения двух повторных опытов	x_0	x_1	x_2	x_3	x_4	y'	y''	ϑ
1	8;13	+1	−1	−1	−1	−1	2,40	1,46	1,93
2	3;12	+1	+1	−1	+1	−1	3,58	2,78	3,18
3	11;15	+1	−1	−1	+1	+1	6,10	4,50	5,30
4	6;14	+1	−1	+1	−1	+1	4,76	3,12	3,94
5	2;4	+1	+1	+1	−1	−1	5,35	4,15	4,75
6	5;7	+1	+1	−1	−1	+1	4,10	2,70	3,40
7	1;9	+1	−1	+1	+1	−1	5,42	4,00	4,71
8	10;16	+1	+1	+1	+1	+1	15,41	12,99	14,20

13.1.4. Обработка результатов эксперимента

Обработку результатов проводим по схеме с равномерным дублированием опытов в следующей последовательности:

1. Оценка дисперсий среднего арифметического в каждой строке матрицы.
2. Проверка однородности дисперсий с помощью критерия Кохрена.
3. Если дисперсии однородны, то проводится расчет оценки дисперсии воспроизводимости.
4. Определение коэффициентов регрессии.
5. Проверка адекватности модели.
6. Проверка значимости коэффициентов регрессии.

Запишем формулы, по которым будем проводить расчеты (по дисперсиям средних, а не по индивидуальным):

$$1)\ s_i^2 = \frac{\sum_{i}^{n} (y_{iq} - \bar{y}_i)^2}{n(n-1)};$$

$$2)\quad G = \frac{s_{\max}^2}{\sum_{1}^{N} s_i^2};$$

$$3)\ s_{\{\bar{y}\}}^2 = \frac{\sum_{1}^{N}\sum_{1}^{n} (y_{iq} - \bar{y}_i)^2}{Nn(n-1)};$$

$$4)\ b_j = \frac{\sum_{i=1}^{N} \bar{y}_i x_{ji}}{N}, \qquad b_{uj} = \frac{\sum_{i=1}^{N} \bar{y}_i x_{ui} x_{ji}}{N};$$

$$5)\ s_{ад}^2 = \sum_{i=1}^{N} (\bar{y}_i - \hat{y}_i)^2/f, \qquad f = N - (k+1), \quad F = s_{ад}^2/s_{\{\bar{y}\}}^2;$$

$$6)\ s_{\{b_j\}}^2 = s_{\{\bar{y}\}}^2/N, \qquad \Delta b_j = \pm t s_{\{b_j\}}.$$

Значения дисперсий среднего арифметического каждого опыта приведены в табл. 13.6.

Таблица 13.6

Дисперсии среднего арифметического
(первая серия опытов)

Номер опыта	s_i^2	Номер опыта	s_i^2	Номер опыта	s_i^2	Номер опыта	s_i^2
1	0,220	3	0,640	5	0,360	7	0,504
2	0,160	4	0,672	6	0,490	8	1,464

Критерий Кохрена равен: G=1,464/4,510=0,324. Табличное значение критерия для восьми разных опытов и числа степеней свободы n—1=1 равно 0,679 (уровень значимости 0,05). Экспериментальная величина G-критерия не превышает табличного значения, гипотеза об однородности дисперсиймпринимается. Дисперсия воспроизводимости равна

$$s_{\{\bar{y}\}}^2 = \sum_{i=1}^{N} s_i^2/8 = 0{,}564$$

Число степеней свободы этой дисперсии

$$N(n-1) = 8.$$

Составим расчетную матрицу (табл. 13.7).

Таблица 13.7

Расчетная матрица и результаты опытов
(первая серия)

Номер опыта	x_0	x_1	x_2	x_3	x_4	$x_1x_2 = x_3x_4$	$x_1x_3 = x_2x_4$	$x_1x_4 = x_2x_3$	y
1	+1	−1	−1	−1	−1	+1	+1	+1	1,93
2	+1	+1	−1	+1	−1	−1	+1	−1	3,18
3	+1	−1	−1	+1	+1	+1	−1	−1	5,30
4	+1	−1	+1	−1	+1	−1	+1	−1	3,94
5	+1	+1	+1	−1	−1	+1	−1	−1	4,75
6	+1	+1	−1	−1	+1	−1	−1	+1	3,40
7	+1	−1	+1	+1	−1	−1	−1	+1	4,71
8	+1	+1	+1	+1	+1	+1	+1	+1	14,20

Оценки коэффициентов регрессии и дисперсий в их определении:

$$b_0 = 5{,}1762; \quad b_3 = 1{,}6712; \quad b_{13} = 0{,}6362;$$
$$b_1 = 1{,}2062; \quad b_4 = 1{,}5337; \quad b_{14} = 0{,}8837;$$
$$b_2 = 1{,}7237; \quad b_{12} = 1{,}3687; \quad s^2_{\{b_j\}} = 0{,}564/8 = 0{,}0705.$$

Результаты расчета остаточной суммы квадратов при проверке адекватности линейной модели приведены в табл. 13.8.

Таблица 13.8

Расчет остаточной суммы квадратов
(первая серия опытов)

Номер опыта	y	$\hat{y}$	$\Delta y = \hat{y} - y$	$(\Delta y)^2$	Номер опыта	y	$\hat{y}$	$\Delta y = \hat{y} - y$	$(\Delta y)^2$
1	1,93	−0,9587	−2,8887	8,344	5	4,75	4,9012	0,1512	0,023
2	3,18	4,7962	1,6162	2,612	6	3,40	4,5212	1,1212	1,257
3	5,30	5,4512	0,1512	0,023	7	4,71	5,8312	1,1212	1,257
4	3,94	5,5562	1,6162	2,612	8	14,20	11,3112	−2,8887	8,344

В этой таблице $\overline{y}$ — средние из двух параллельных значений экспериментальных величин параметра оптимизации, $\overline{y}$ — рассчитанные по уравнению регрессии. Дисперсия адекватности $s^2_{ад}$ =24,46/3=8,15. Число степеней свободы дисперсии адекватности f=8— (4+1)=3. Критерий для проверки гипотезы адекватности модели F=8,15/0,564=14,4. Табличное значение критерия Фишера для числа

степеней свободы числителя 3 и знаменателя 8 равно 4,1. Экспериментальная величина F-критерия превышает табличное значение, гипотеза об адекватности модели отвергается. Этот вывод мы могли сделать и принимая во внимание значимость эффектов взаимодействия факторов, что собственно является другим критерием неадекватности линейной модели.

Осталось оценить значимость коэффициентов регрессии. Величина *t*-критерия для уровня значимости 0,05 и числа степеней свободы, с которыми определялась $s^2_{\{y\}}$, равна 2,306. Доверительный интервал $\Delta b_j = \pm 2{,}306 \cdot 0{,}266 = 0{,}613$. Абсолютные величины коэффициентов регрессии больше доверительного интервала, гипотеза о незначимости коэффициентов регрессии отвергается.

13.1.5. Интерпретация результатов. Принятие решений после построения модели (первая оерия)

Начнем этот раздел с интерпретации результатов, — перевода модели на язык экспериментатора. Так как линейная модель неадекватна, при интерпретации необходимо учитывать парные эффекты взаимодействия факторов. Здесь ледует помнить, что эффекты взаимодействия первого порядка попарно смешаны. Линейные коэффициенты регрессии примерно одинаково влияют на параметр оптимизации. Характер их влияния также одинаков: с увеличением значений факторов растет и величина параметра оптимизации. Если же еще учесть, что коэффициенты эффектов взаимодействия положительны, то можно считать, что увеличение концентраций металла, кислоты и реагента, а также соотношения фаз приводят к росту коэффициента разделения. Это не противоречит литературным данным, предполагавшим существование наилучших значений коэффициента разделения циркония и гафния в области более высоких значений факторов. Величина коэффициента разделения, полученная в последнем опыте (см. табл. 13.7), близка к некоторым литературным данным.

Теперь займемся принятием решений. Условия наилучшего опыта (опыт № 8, табл. 13.7), по-видимому, лежат в области, близкой к оптимуму. В схеме принятия решений в задаче определения оптимальных условий, линейная модель неадекватна, этой ситуации соответствуют два возможных решения: реализация плана второго порядка и окончание исследования. Принимать последнее решение у нас нет оснований — мы еще не можем считать задачу решенной. Поэтому останавливаемся на другом решении — реализация плана второго порядка.

Здесь следует сказать о различных возможностях перехода к планированию второго порядка. Наиболее распространенные на практике планы второго порядка для четырех факторов, ортогональные, ротатабельные, *D*-оптимальные и некоторые другие, содержат от 24 до 31 опытов. «Ядро» таких планов составляет полный факторный эксперимент 2^4. Возможно выполнение сразу всех опытов или другой путь — последовательное композиционное «достраивание» плана. Сначала реализуется полуреплика от полного факторного эксперимента, проверяется гипотеза адекватности линейной модели. Если модель адекватна, то можно переходить к движению по градиенту. При неадекватной модели следует «достраивать» полуреплику либо до плана второго порядка, либо до полного факторного эксперимента.

В последнем случае снова проверяется гипотеза адекватности линейной модели и т. д.

Второй путь — последовательная реализация плана, кажется предпочтительным с точки зрения экономии опытов. Он действительно весьма распространен на практике.

Таким образом, мы пришли к решению: перенос центра плана в условия наилучшего опыта первой серии и последовательное построение плана второго порядка.

Теперь остается принять решение о выборе интервалов варьирования факторов во второй серии опытов. Снова обращаемся к схеме принятия решений при средней точности фиксирования факторов. В отличие от процедуры принятия решений в первой серии опытов, сейчас появилась информация о нелинейности поверхности отклика. Широкий диапазон изменения параметра оптимизации вместе с установленной характеристикой поверхности отклика приводит к единственному решению — узкому интервалу варьирования факторов.

13.1.6. Реализация плана (вторая серия)

Условия, матрица планирования и результаты второй серии опытов представлены в табл. 13.9.

Интервалы варьирования факторов уменьшены в два раза по сравнению с первой серией опытов и составляют не более 10% от области определения факторов. В этой серии снова реализована полуреплика от полного факторного эксперимента 2^4 с генерирующим соотношением $x_4=x_1x_2x_3$ и двумя параллельными опытами. Кроме того, был добавлен еще один опыт в центре плана для оценки значимости уммы коэффициентов регрессии при квадратичных членах ($\sum\beta_{jj}$). В этом опыте получены следующие значения параметра оптимизации:

$$y' = 13{,}37; \quad y'' = 14{,}83; \quad \overline{y} = 14{,}10.$$

Таблица 13.9

Условия, матрица планирования и результаты опытов
(вторая серия)

Уровни	Факторы				Уровни	Факторы			
	$\tilde{x}_1$	$\tilde{x}_2$	$\tilde{x}_3$	$\tilde{x}_4$		$\tilde{x}_1$	$\tilde{x}_2$	$\tilde{x}_3$	$\tilde{x}_4$
Основной	35	5,0	40	2	Верхний	37,5	5,5	45	2,25
интервал варьирования	2,5	0,5	5,0	0,25	Нижний	32,5	4,5	35	1,75

Опыты	Порядок проведения двух повторных опытов	Кодированные значения факторов							
		x_0	x_1	x_2	x_3	x_4	y'	y''	y
1	4; 11	+1	−1	−1	−1	−1	12,15	10,85	11,50
2	8; 9	+1	+1	−1	+1	−1	8,70	7,70	8,20
3	3; 14	+1	−1	−1	+1	+1	9,84	7,16	8,50
4	10; 15	+1	−1	+1	−1	+1	15,21	12,79	14,00
5	2; 12	+1	+1	+1	−1	−1	12,10	13,30	12,70
6	1; 13	+1	+1	−1	−1	+1	9,25	10,75	10,00
7	5; 7	+1	−1	+1	+1	−1	13,20	11,80	12,50
8	6; 16	+1	+1	+1	+1	+1	12,85	14,15	13,50

Обработку результатов проводим по той же схеме. Значения дисперсий среднего арифметического каждого опыта второй серии приведены в табл. 13.10. В этой серии учтена информация о параллельных опытах в центре плана. Критерий Кохрена G=1,795/6,300=0,28. Табличное значение критерия для девяти опытов и одной степени свободы равно 0,638; гипотеза об однородности дисперсий не отвергается. Дисперсия воспроизводимости равна 0,700, для нее число степеней свободы девять.

Таблица 13.10

Дисперсии среднего арифметического (вторая серия опытов)

Номер опыта	s_i^2	Номер опыта	s_i^2	Номер опыта	s_i^2
1	0,422	4	1,464	7	0,490
2	0,250	5	0,360	8	0,422
3	1,795	6	0,562	9	0,533

Оценки коэффициентов регрессии и дисперсии в их определении:

$$b_0 = 11{,}3625; \quad b_4 = 0{,}1375;$$
$$b_1 = -0{,}2625; \quad b_{12} = 0{,}1875; \quad s^2_{\{b_j\}} = 0{,}0875;$$
$$b_2 = 1{,}8125; \quad b_{13} = 0{,}4375;$$
$$b_3 = -0{,}6875; \quad b_{14} = 0{,}5125; \quad s_{\{b_j\}} = 0{,}296.$$

Результаты расчета остаточной суммы квадратов при проверке адекватности линейной модели во второй серии опытов представлены в табл. 13.11.

Таблица 13.11

Расчет остаточной суммы квадратов (вторая серия опытов)

Номер опыта	y	$\hat{y}$	$\Delta y = \hat{y} - y$	$(\Delta y)^2$
1	11,50	10,3625	—1,1375	1,2939
2	8,20	8,4625	0,2625	0,0689
3	8,50	9,2625	0,7625	0,5814
4	14,00	14,2625	0,2625	0,0689
5	12,70	13,4625	0,7625	0,5814
6	10,00	10,1125	0,1125	0,0126
7	12,50	12,6125	0,1125	0,0126
8	13,50	12,3625	—1,1374	1,2937
			$\sum_{i=1}^{N} \Delta y_i^2 = 3,913$	

Дисперсия адекватности и критерий Фишера равны $s^2_{ад}$=3,912/3=1,304; F=1,304/0,700=1,86. Табличное значение F-критерия для трех и девяти степеней свободы равно 3,9; нет оснований отбрасывать гипотезу адекватности линейной модели.

Величина доверительного интервала для коэффициентов регрессии Δb_i=0,296·2,26=0,669. Оказалось, что два линейных коэффициента регрессии (b_1 и b_4), а также все эффекты взаимодействия первого порядка незначимы, что могло быть результатом сужения интервалов варьирования.

Ранее отмечалось, что кроме величины F-критерия, формальными признаками, по которым можно установить неадекватность линейной модели, являются:

1) значимость хотя бы одного из эффектов взаимодействий;

2) значимость суммы коэффициентов регрессии при квадратичных членах $\sum\beta_{jj}$. Первый признак подтвердил гипотезу адекватности. Оценкой суммы коэффициентов регрессии служит разность между b_0 и значением зависимой переменной в центре плана y_0. В нашем случае y_0—b_0=14,10—11,36=2,74; эта величина значительно превосходит ошибку опыта $s_{\{\bar{y}\}}=0,84$ и поэтому гипотеза о незначимости коэффициентов при квадратичных членах не может быть принята.

Во введении мы отмечали, что даже простая процедура планирования эксперимента может оказаться весьма неоднозначной. Этот пример — подтверждение тому. Наличие квадратичных эффектов указывает на кривизну поверхности отклика, что приводит к плану второго порядка. Сужение же интервалов варьирования факторов привело к тому, что гипотеза адекватности линейной модели не была отвергнута.

13.1.7. Интерпретация результатов. Принятие решений после построения модели (вторая серия)

Среднее значение b_0 во второй серии опытов оказалось примерно в два раза выше, чем в первой серии. Это еще один аргумент в пользу гипотезы о близости области оптимума. В этой области факторного пространства влияние концентрации кислоты выше, чем влияние концентрации экстрагента. Обратим внимание на изменение знака коэффициента b_3 по сравнению с первой серией опытов. Изменение знака указывает, что область оптимальных значений по концентрации экстрагента «где-то рядом».

Теперь приходится снова принимать решение. Перенос центра эксперимента в лучшую точку можно рассматривать как некоторый способ поиска оптимальных условий. И поскольку этот прием оказался эффективным, обратимся к схеме принятия решений после крутого восхождения, крутое восхождение эффективно. Здесь, как и при принятии решений после первой серии опытов, те же два варианта при близости области оптимума: окончание исследования и план второго порядка для описания области оптимума. Будем выполнять намеченный ранее план — достраивание полуреплики до плана второго порядка. Это решение потребовало выполнения еще 16 опытов. Затем было рассчитано уравнение регрессии второго порядка. С его помощью найдены условия опытов, для которых величина параметра оптимизации оказалась близкой к 30.

13.2. Пример оптимизации свойств многокомпонентного материала

Рассмотрим решение одной из основных задач оптимизации в электронном приборостроении на примере исследования смеси эпоксидный компаунд—серебро—отвердитель и оптимизации состава токопроводящего клея (контактола) на ее основе.

Постановка задачи и выбор области исследования. Необходимо синтезировать контактол с прочностью на разрыв σ>30кг/см^2 при отвердевании в диапазоне температур 20—80° С. В качестве органической связки был выбран компаунд К-139, представляющий собой эпоксидную смолу, модифицированную полиэфиром и

каучуком. Композиция на основе компаунда К-139, наполненная мелкодисперсным порошком серебра, отвердевалась с помощью отвердителя аминофенольного типа (АФ-2).

Опыт разработки токопроводящих клеев позволяет предположить, что требуемые свойства могут быть получены внутри следующих интервалов:

$$0{,}03 \leqslant x_1\,(\text{АФ-2}) \leqslant 0{,}0065;$$

$$0{,}1 \leqslant x_2\,(\text{К-139}) \leqslant 0{,}2;\ \ 0{,}75 \leqslant x_3\,(\text{Ag}) \leqslant 0{,}85.$$

Вследствие ограничений на изменение концентраций компонентов область экспериментирования имеет вид многогранника. Построение вершин многогранника производилось согласно алгоритму, рассмотренному ранее. Результаты построения представлены в табл. 13.12.

Таблица 13.12

Построение вершин многогранника			
№ опыта	Содержание компонентов		
	x_1	x_2	x_3
1	—	0,075	0,75
2	—	0,075	0,9
3	—	0,2155	0,75
4	—	0,2125	0,9
5	0,025	—	0,75
6	0,025	—	0,9
7	0,0875	—	0,75
8	0,0875	—	0,9
9	0,025	0,075	—
10	0,025	0,2125	—
11	0,0875	0,075	—
12	0,0875	0,2125	—

В опыте (точке) 1, для того чтобы выполнялось условие

$$\sum_{i=1}^{3} = 1,$$

необходимо добавить количество компонента, равное 1—0,825= 0,125. Но так как на x_1 (АФ-2) наложено ограничение $0{,}03 \leq x_1 \leq 0{,}065$, а значение $x_1 = 0{,}175$ лежит за пределами данного интервала, то точка *1* не может быть вершиной многогранника. Аналогичная ситуация наблюдается в точках *5, 8, 12*. В точке *4* сумма компонентов

$x_2 + x_3 = 0{,}2125 + 0{,}9 = 1{,}1125$, т. е. больше единицы, следовательно, эта точка также не может быть вершиной многогранника. Точки *2, 6, 9* имеют одинаковые координаты. Таким образом имеется всего 5 вершин многогранника. Точки *2, 3, 7* выбирают в качестве вершин симплекса (табл. 13.13).

Таблица 13.13

Координаты вершин симплекса		
x_1	x_2	x_3
0,025	0,075	0,9
0,0375	0,2125	0,75
0,0875	0,1625	0,75

Выбор плана эксперимента и перевод его на локальный участок. При выборе плана эксперимента была принята гипотеза о том, что зависимость величины прочности может быть описана полиномом второго порядка. В связи с этим выбирается план второго порядка, который на полном симплексе имеет вид, приведенный в табл. 13.14.

Таблица 13.14

№ опыта	z_1	z_2	z_3	x_1	x_2	x_3	$\bar{\sigma}$, кг/см²
1	1	0	0	0,025	0,075	0,9	0,19
2	0	1	0	0,0375	0,2125	0,75	31,17
3	0	0	1	0,0875	0,1625	0,75	12,91
4	0,5	0,5	0	0,03125	0,14375	0,825	27,4
5	0,5	0	0,5	0,05625	0,11875	0,825	19,72
6	0	0,5	0,5	0,0625	0,1875	0,750	57,94
7	0,333	0,333	0,333	0,05	0,15	0,8	47,96

План эксперимента включает в себя вершины и середины ребер симплекса.

Каждый опыт состоял в приготовлении смеси заданного планом состава, при этом он трижды дублировался и для каждого состава изготавливали образец для отвердевания при температуре 20° С. Каждый образец испытывался на разрыв. По результатам трех параллельных опытов определялось среднее значение прочности на

разрыв $\bar{\sigma}$. Поскольку величины $\bar{\sigma}$ имели различный порядок, сочли целесообразным пользоваться величиной $\lg \bar{\sigma}$.

В качестве проверочной точки в план эксперимента включили точку, соответствующую центру тяжести симплекса, которая в дальнейшем будет использоваться для проверки адекватности модели (табл. 14.14).

Построение математической модели. В псевдокоординатах полином второй степени для $y \equiv \lg\sigma$ имеет вид

$$y = \beta_1 z_1 + \beta_2 z_2 + \beta_3 z_3 + \beta_{12} z_1 z_2 + \beta_{13} z_1 z_3 + \beta_{23} z_2 z_3,$$

где z_j — псевдокоординаты, j=1,2,3.

Подставляя последовательно в это уравнение координаты всех шести точек матрицы планирования (табл. 13.14), получим значения коэффициентов β. Точка z_1 имеет координаты (1,0, 0), $\lg \bar{\sigma}$ в этой точке имеет значение, равное — 0,3. Подставляя эти значения в уравнение для $\lg \bar{\sigma}$, получим — 03 = $\beta_1 \cdot 1$, т. е. β_1 = — 0,3. Точка z_4 имеет координаты (0,5; 0,5; 0). Подставляя координаты и соответствующее значение $\lg \bar{\sigma}$ в уравнение, найдем значение коэффициента β_{12}:

$$1{,}438 = 0{,}5\beta_1 + 0{,}5\beta_2 + 0{,}25\beta_{12};$$
$$1{,}438 = -0{,}15 + 0{,}7965 + 0{,}25\beta_{12};$$
$$\beta_{12} = 3{,}116.$$

Аналогично определим значения для всех коэффициентов β_i: β_2= 1,593; β_3= 1,111; β_{13} = 3,558; β_{23} = 1,644. Таким образом, модель для $\lg \bar{\sigma}$ примет вид

$$\lg \bar{\sigma} = -0{,}3z_1 + 1{,}593z_2 + 1{,}111z_3 + 3{,}166z_1 z_2 + 3{,}558z_1 z_3 + 1{,}644z_2 z_3. \quad (13.1)$$

Переведем полученную модель в исходную систему координат. Для этого полученное уравнение в псевдокоординатах нужно записать в исходной системе координат. Используя формулы перевода координат из одной аффинной системы в другую, для вершины z_1 запишем

$$0{,}025z_1^1 + 0{,}075z_1^2 + 0{,}9z_1^3 = 1;$$
$$0{,}0375z_1^1 + 0{,}2125z_1^2 + 0{,}75z_1^3 = 0;$$
$$0{,}0875z_1^1 + 0{,}1625z_1^2 + 0{,}75z_1^3 = 0.$$

Систему уравнений решаем методом определителей:

$$\Delta = \begin{vmatrix} 0{,}025 & 0{,}075 & 0{,}9 \\ 0{,}0375 & 0{,}2125 & 0{,}75 \\ 0{,}0875 & 0{,}1625 & 0{,}75 \end{vmatrix} = 0{,}025 \begin{vmatrix} 0{,}2125 & 0{,}75 \\ 0{,}1625 & 0{,}75 \end{vmatrix} -$$

$$- 0{,}0375 \begin{vmatrix} 0{,}075 & 0{,}9 \\ 0{,}1625 & 0{,}75 \end{vmatrix} + 0{,}0875 \begin{vmatrix} 0{,}075 & 0{,}9 \\ 0{,}2125 & 0{,}75 \end{vmatrix} =$$

$$= 0{,}025\,(0{,}2125 \cdot 0{,}75 - 0{,}1625 \cdot 0{,}75) - 0{,}0375 \times$$

$$\times (0{,}075 \cdot 0{,}75 - 0{,}1625 \cdot 0{,}9) + 0{,}0875\,(0{,}075 \cdot 0{,}75 -$$

$$- 0{,}2125 \cdot 0{,}9) = -0{,}0075;$$

$$\Delta z_1^1 = \begin{vmatrix} 1 & 0{,}075 & 0{,}9 \\ 0 & 0{,}2125 & 0{,}75 \\ 0 & 0{,}1625 & 0{,}75 \end{vmatrix} = 1 \cdot \begin{vmatrix} 0{,}2125 & 0{,}75 \\ 0{,}1625 & 0{,}75 \end{vmatrix} = 0{,}0375;$$

$$\Delta z_1^2 = \begin{vmatrix} 0{,}025 & 1 & 0{,}9 \\ 0{,}0375 & 0 & 0{,}75 \\ 0{,}0875 & 0 & 0{,}75 \end{vmatrix} = -1 \cdot \begin{vmatrix} 0{,}0375 & 0{,}75 \\ 0{,}0875 & 0{,}75 \end{vmatrix} = 0{,}0375;$$

$$\Delta z_1^3 = \begin{vmatrix} 0{,}025 & 0{,}075 & 1 \\ 0{,}0375 & 0{,}2125 & 0 \\ 0{,}0875 & 0{,}1625 & 0 \end{vmatrix} = -0{,}0125;$$

$$z_1^1 = \Delta z_1^2 / \Delta = -0{,}0375 / 0{,}0075 = -5;$$

$$z_1^2 = \Delta z_1^2 / \Delta = 0{,}0375 / -0{,}0075 = -5;$$

$$z_1^3 = \Delta z_1^3 / \Delta = -0{,}0125 / -0{,}0075 = 1{,}667.$$

$$\Delta = \begin{vmatrix} 0{,}025 & 0{,}075 & 0{,}9 \\ 0{,}0375 & 0{,}2125 & 0{,}75 \\ 0{,}0875 & 0{,}1625 & 0{,}75 \end{vmatrix} = 0{,}025 \begin{vmatrix} 0{,}2125 & 0{,}75 \\ 0{,}1625 & 0{,}75 \end{vmatrix} -$$

$$- 0{,}0375 \begin{vmatrix} 0{,}075 & 0{,}9 \\ 0{,}1625 & 0{,}75 \end{vmatrix} + 0{,}0875 \begin{vmatrix} 0{,}075 & 0{,}9 \\ 0{,}2125 & 0{,}75 \end{vmatrix} =$$

$$= 0{,}025\,(0{,}2125 \cdot 0{,}75 - 0{,}1625 \cdot 0{,}75) - 0{,}0375 \times$$

$$\times (0{,}075 \cdot 0{,}75 - 0{,}1625 \cdot 0{,}9) + 0{,}0875\,(0{,}075 \cdot 0{,}75 -$$

$$- 0{,}2125 \cdot 0{,}9) = -0{,}0075;$$

$$\Delta z_1^1 = \begin{vmatrix} 1 & 0{,}075 & 0{,}9 \\ 0 & 0{,}2125 & 0{,}75 \\ 0 & 0{,}1625 & 0{,}75 \end{vmatrix} = 1 \cdot \begin{vmatrix} 0{,}2125 & 0{,}75 \\ 0{,}1625 & 0{,}75 \end{vmatrix} = 0{,}0375;$$

$$\Delta z_1^2 = \begin{vmatrix} 0{,}025 & 1 & 0{,}9 \\ 0{,}0375 & 0 & 0{,}75 \\ 0{,}0875 & 0 & 0{,}75 \end{vmatrix} = -1 \cdot \begin{vmatrix} 0{,}0375 & 0{,}75 \\ 0{,}0875 & 0{,}75 \end{vmatrix} = 0{,}0375;$$

$$\Delta z_1^3 = \begin{vmatrix} 0{,}025 & 0{,}075 & 1 \\ 0{,}0375 & 0{,}2125 & 0 \\ 0{,}0875 & 0{,}1625 & 0 \end{vmatrix} = -0{,}0125;$$

$$z_1^1 = \Delta z_1^2 / \Delta = -0{,}0375 / 0{,}0075 = -5;$$

$$z_1^2 = \Delta z_1^2 / \Delta = 0{,}0375 / -0{,}0075 = -5;$$

$$z_1^3 = \Delta z_1^3 / \Delta = -0{,}0125 / -0{,}0075 = 1{,}667.$$

Для вершины z_2 система имеет вид

$$0{,}025 z_2^1 + 0{,}075 z_2^2 + 0{,}9 z_2^3 = 0;$$

$$0{,}0375 z_2^1 + 0{,}2125 z_2^2 + 0{,}75 z_2^3 = 1;$$

$$0{,}0875 z_2^1 + 0{,}1625 z_2^2 + 0{,}75 z_2^3 = 0.$$

Решая эту систему аналогичным способом, получаем z^1_2 =—12; z^2_2 = 8; z^3_2 =— 0,333. Для вершины z_3 система примет вид

$$0{,}025 z_3^1 + 0{,}075 z_3^2 + 0{,}9 z_3^3 = 0;$$

$$0{,}0375 z_3^2 + 0{,}2125 z_3^2 + 0{,}75 z_3^3 = 0;$$

$$0{,}0875 z_3^3 + 0{,}1625 z_3^2 + 0{,}75 z_3^3 = 1.$$

Решая эту систему таким же образом, находим z^1_3=18; z^2_3 = — 2;

z^3_3=—0,333. Используя полученные результаты, выразим псевдокоординаты z через исходные координаты *x:*

$$z_1 = -5 + 6{,}667x_3;$$
$$z_2 = -12 + 20x_2 + 11{,}667x_3;$$
$$z_3 = 18 - 20x_2 - 18{,}333x_3.$$

Подставляя в уравнение регрессии z_1, z_2, z_3, получим выражение для $\lg \bar{\sigma}$ через исходные координаты *x:*

$$\lg \bar{\sigma} = -0{,}3(-5 + 6{,}667x_3) + 1{,}593(-12 + 20x_2 + 12{,}333x_3) + 1{,}111(18 - 20x_2 - 18{,}333x_3) + 3{,}166 \times (-5 + 6{,}667x_3)(-12 + 20x_2 + 12{,}333x_3) + 3{,}558 \times (-5 + 6{,}667x_3)(18 - 20x_2 - 18{,}333x_3) + 1{,}644 \times (-12 + 20x_2 + 11{,}667x_3)(18 - 20x_2 - 18{,}333x_3) =$$
$$= -482{,}982x_1 + 1035{,}24x_2 + 1018{,}284x_3 - 1038{,}67x_2x_3 - 657{,}6x_2^2 - 540{,}253x_3^2.$$

Осуществим проверку модели на адекватность. Возьмем точку на симплексе, не участвующую в построении симплекс-решетчатого плана, например, (0,333; 0,333; 0,333) в псевдокоординатах z. В исходных координатах *x* ей соответствует точка с координатами (0,05; 0,15; 0,8). Подставляя эти координаты в модель, получаем

$$\lg \bar{\sigma} = -482{,}982 + 1035{,}21 \cdot 0{,}15 + 1018{,}284 \cdot 0{,}8 - 1038{,}67 \cdot 0{,}15 \cdot 0{,}8 - 657{,}6 \cdot 0{,}15^2 - 540{,}253 \cdot 0{,}8^2 = 1{,}733.$$

Экспериментальное значение $\lg \bar{\sigma}$ в данной точке равно 1,68.

Для проверки адекватности модели используем критерий Стьюдента:

$$t = \frac{\Delta y \sqrt{n}}{s_y^2 \sqrt{1 + \xi}}; \quad \Delta y = 1{,}733 - 1{,}68 = 0{,}053.$$

При этом n=3, так как каждый из шести опытов плана трижды дублировался. Оценка дисперсии воспроизводимости рассчитана по результатам дублирования опытов: s^2_y=0,0365. Число степеней свободы $f_b = N(m - 1) = 6 \cdot (3-1) = 12$. Значение ξ взято из справочной литературы.

Таким образом,

$$t = \frac{0{,}053 \cdot 17{,}32}{0{,}365 \cdot 1{,}273} = 1{,}98$$

Табличное значение при уровне значимости p = 0,05 t = 2,18. Так как $t_{эксп} < t_т$ (1,98<2,18), то модель адекватна.

Построение диаграммы состав — свойство и поиск оптимального состава. С помощью полученного уравнения регрессии были построены проекции линий равных значений σ на симплекс; оптимальные составы найдены по диаграммам состав — свойство.

Уравнение регрессии имеет вид

$$y = \lg \bar{\sigma} = -482{,}982 + 1035{,}24x_2 + 1018{,}284x_3 - \\ - 1038{,}67x_2x_3 - 657{,}6x_2^2 - 540{,}253x_3^2. \qquad (13.2)$$

Приведем (13.2) к каноническому виду:

$$y - y_s = \lambda_{22}x_2^2 + \lambda_{33}x_3^2,$$

где y_s — значение выхода в центре поверхности; x_2, x_3— канонические переменные, являющиеся линейными функциями факторов x_2, x_3; λ_{22}, λ_{33} — коэффициенты канонической формы. Первый этап канонического преобразования — перенос начала координат в особую точку поверхности отклика (центр поверхности).

Координаты центра *s* определяют из решения системы уравнений

$$\frac{\partial y}{\partial x_2} = 0; \quad \frac{\partial y}{\partial x_3} = 0;$$

или

$$\frac{\partial y}{\partial x_2} = 1315{,}2x_2 + 1038{,}67x_3 - 1035{,}24 = 0;$$

$$\frac{\partial y}{\partial x_3} = 1038{,}67x_2 + 1080{,}506x_3 - 1018{,}284 = 0.$$

Решая эту систему уравнений, получим координаты центра: x_{2s}=0,178; x_{3s}= 0,771. Подставив координаты центра в уравнение (13.2), определим значение $\lg \bar{\sigma}$ в точке s=y_s; $\lg \bar{\sigma}$ =1,86. Перенесем начало координат в точку *s* с координатами (1,86; 0,178; 0,771). Старые координаты x_1,x_2, y связаны с новыми x'_1, x'_2, y' следующим образом:

$$x_2 = x_{2s} + x'_2 = 0{,}178 + x'_2;$$
$$x_3 = x_{3s} + x'_3 = 0{,}771 + x'_3;$$
$$y = y_s + y' = 1{,}86 + y'.$$

В новой системе координат уравнение (13.2) имеет вид

$$y - y_s = -1038{,}67x'_2x'_3 - 657{,}6x'^2_2 - 540{,}253x'^2_3.$$

При повороте осей координат эффект взаимодействия исчезает. Для этого необходимо повернуть оси координат на такой угол α, чтобы $\operatorname{ctg} 2\alpha = (b_{22} - b_{33})/b_{23}$, где b_{22} — коэффициент при x'^2_2; b_{33} — коэффициент при при x'^2_3; b_{23}— коэффициент при $x'_2x'_3$.

Подставляя значения этих коэффициентов в уравнение (13.1), определим угол α: α = 41° 44'. В новой системе координат x_1, x_2, y уравнение регрессии имеет канонический вид:

$$y - y_s = \lambda_{22} x_2^2 + \lambda_{33} x_3^2. \qquad (13.3)$$

Для определения коэффициентов λ_{22} и λ_{33} необходимо найти корни характеристического полинома $p_k(\lambda)$ матрицы **B**:

$$p_h(\lambda) = |\mathbf{B} - \lambda_{\mathbf{E}}|,$$

где **B** — квадратная матрица, составленная из коэффициентов уравнения регрессии, полученного по эксперименту; **E** — единичная матрица.

Таким образом,

$$p_k \lambda = \begin{vmatrix} -657{,}6 - \lambda & -519{,}335 \\ -519{,}335 & -540{,}253 - \lambda \end{vmatrix} = 0;$$

$$\lambda^2 + 1197{,}853\lambda + 85561{,}53 = 0;$$

$$\lambda_{22} = -76{,}426; \quad \lambda_{33} = -1121{,}426.$$

Полученные коэффициенты канонической формы имеют одинаковые знаки, следовательно, данная поверхность — эллиптический параболлоид. Так как $\lambda<0$, то в центре поверхности находится максимум. Поскольку в центре эллипсов находится максимум, координаты центра соответствуют оптимальным концентрациям компонентов смеси (табл. 13.15).

Таблица 13.15

Оптимальный состав контактола при температуре отверждения 20 °С			tg $\tilde{\sigma}$	$\tilde{\sigma}$, кг/см²
x_1	x_2	x_3		
0,051	0,178	0,771	1,86	72,4

Таким образом, образцы, изготовленные из смеси данного состава, должны обладать прочностью на разрыв $\bar{\sigma} \approx 72{,}4$ кг/см^2, что и было подтверждено экспериментально.

13.3. О классификации экспериментальных планов

Мы рассмотрели подробно две задачи планирования эксперимента. В действительности экспериментатор сталкивается с огромным разнообразием постановок задач и, соответственно, экспериментальных планов.

В зависимостях от задачи исследования, свойств объекта, выполнения математических предпосылок, наличия априорной информации и т. д. можно выбрать тот или иной класс планов для получения необходимой информации .

Создание единой системы классификации экспериментальных планов представляет собой сложную задачу. Оно связано с выявлением и отбором признаков, позволяющих проводить однозначную классификацию всего множества известных планов. Ниже будет рассмотрен метод построения классификации экспериментальных планов, предложенный Ю.П.Адлером, Е.В.Марковой, Ю.В.Грановским.

В качестве предварительной классификации предлагается система, которая включает в себя следующие классы планов:

1) планы дисперсионного анализа;
2) планы отсеивающего эксперимента;
3) планы многофакторного анализа;
4) планы для изучения поверхности отклика;
5) планы для динамических задач планирования;
6) планы для изучения механизма явлений;
7) планы для построения диаграмм состав—свойство, состав—состояние.

Такая классификация предлагается в литературе по планированию эксперимента при изложении различных разделов этой теории. Разбиение планов на указанные группы проведено в основном по задачам исследования и методам планирования эксперимента, используемых для их решения. Естественно, что такая классификация довольно условна, но тем не менее может быть использована в качестве предварительной, чтобы помочь экспериментатору ориентироваться в различных разделах планирования эксперимента.

По методу анализа и виду математической модели, используемым при представлении результатов многофакторного эксперимента, все перечисленные классы планов можно объединить в три группы:

1) планы дисперсионного анализа,
2) планы регрессионного анализа;
3) планы ковариационного анализа.

Следуя Г. Шеффе, основные предпосылки указанных методов анализа при представлении результатов многофакторного эксперимента из N опытов можно записать в следующей форме: вектор выхода $y^{(N\times 1)}$ имеет распределение

$y^{N\times 1} \to N(\mathbf{x}^T\beta^{p\times 1};\ \sigma^2 I)$ — в случае дисперсионного анализа;

$y^{N\times 1} \to N(\mathbf{z}^T\gamma^{k\times 1},\ \sigma^2 I)$ — в случае регрессионного анализа;

$y^{N\times 1} \to N(\mathbf{x}^T\beta^{p\times 1} + \mathbf{z}^T\gamma^{k\times 1};\ \sigma^2 I)$ — в случае ковариационного анализа.

Здесь $\mathbf{x}^{\mathrm{T}}$ — транспонированная матрица независимых переменных x_{ij}, которые могут быть как количественными, так и качественными в задаче дисперсионного анализа; $\mathbf{z}^{\mathrm{T}}$—транспонированная матрица количественных переменных z_{ij}, пробегающих непрерывный ряд значений в задаче регрессионного анализа, а также матрица количественных и качественных неуправляемых переменных в задаче ковариационного анализа; $\beta^{(p\times 1)}$ — вектор эффектов (главные эффекты, эффекты взаимодействия, эффекты блоков и другие эффекты, например, эффекты порядка варьирования факторов, остаточные эффекты), подлежащих оценке по результатам эксперимента в задачах дисперсионного и ковариационного анализов; $\gamma^{(k\times 1)}$ — вектор коэффициентов регрессии в задачах регрессионного и ковариационного анализов; α^2 — дисперсия ошибки эксперимента; I — единичная матрица; N — индекс нормального распределения.

В алгебраической форме уравнение модели, например для ковариационного анализа, имеет вид:

$$y = \sum_{i=0}^{p} b_i x_i + \sum_{j=1}^{k} \gamma_j z_j + \varepsilon,$$

где ε — случайная ошибка, относительно которой обычно постулируют $M(\varepsilon_i)=0;\ M(\varepsilon_i\varepsilon_j)=0,$ т. е. ошибки некоррелированы и однородны.

Задача любого вида анализа заключается в установлении существенности эффектов исследуемых переменных на фоне этой ошибки.

Следует отметить, что хотя границы между перечисленными видами анализа не являются очень точными и общепринятыми, тем не менее для общности рассмотрение всех классов планов в рамках этих видов анализа полезно и целесообразно. Ниже дается характеристика каждого класса планов с указанием назначения планов, методов их построения, а также сведений о математической модели представления результатов эксперимента и ее анализе.

13.3.1. Планы дисперсионного анализа

Дисперсионный анализ — это статистический метод, с помощью которого производится разложение суммарной дисперсии на составляющие. В зависимости от числа источников дисперсии различают однофакторный и многофакторный дисперсионные анализы.

Если при постановке опытов реализуются все возможные совокупности условий, задаваемые выбранной схемой эксперимента, говорят о полных классификациях дисперсионного анализа. Если же реализуются не все возможные совокупности условий, а некоторая их часть, т. е. производится сокращение перебора вариантов, — речь идет о неполных классификациях дисперсионного анализа.

Сокращение перебора вариантов может производиться случайным образом или в соответствии с некоторыми строгими правилами. В первом случае это неполные классификации дисперсионного анализа без ограничения на рандомизацию, во втором случае — с ограничением на рандомизацию.

Полные классификации дисперсионного анализа применяются для исследования сравнительно небольшого числа факторов (обычно не более пяти), так как полный перебор вариантов требует постановки большого числа опытов, например, при варьировании пяти факторов на трех уровнях необходимо поставить 243 опыта. Число уровней может быть одинаковым для всех факторов (эксперимент типа n^m), но может быть и различным (эксперимент $n^m k^L \ldots$).

Модель, с помощью которой представляются экспериментальные данные, имеет вид

$$y_{ijk} = \mu + \alpha_i + \beta_j + \gamma_k + \ldots + \alpha_i\beta_j + \alpha_i\gamma_k + \beta_j\gamma_k + \ldots$$
$$\ldots + \alpha_i\beta_j\gamma_k + \ldots + \varepsilon_{ijk},$$

где y_{ijk} — результат эксперимента, полученный на i-м уровне первого фактора; j-м уровне второго фактора и k-м уровне третьего фактора;
μ — среднее по всему множеству опытов; α_i — эффект i-го уровня первого фактора; β_j — эффект j-го уровня второго фактора; γ_k—эффект k-го уровня третьего фактора; $\alpha_i\beta_j$ — эффект взаимодействия i-го уровня первого фактора с j-м уровнем второго; $\alpha_i\gamma_k$ — эффект взаимодействия i-го уровня первого фактора с k-м уровнем третьего и т. д.; ε_{ijk} — остаточный член, с помощью которого оценивается ошибка эксперимента.

Среди **неполных классификаций дисперсионного анализа** с ограничением на рандомизацию наиболее популярными в планировании эксперимента являются неполноблочные планы (блок-схемы) и латинские планы. Различают полностью сбалансированные и частично сбалансированные блок-схемы.

Блок-схема, в которой пары элементов появляются определенное число раз, носит название сбалансированной неполной блок-схемы (BIB-схемы) (от английского Balanced Incomplete Block) со следующими параметрами: v — число элементов; b — число блоков; k — число единиц в блоке; r — число блоков, которым принадлежит один и тот же элемент; λ — число повторений каждой пары элементов. Чтобы блок-схема была сбалансированной, требуется выполнение следующих условий:

1) каждый блок B содержит одинаковое число κ элементов;

2) каждый элемент α_i принадлежит одному и тому же числу r блоков;

3) для каждой неупорядоченной пары α_i, α_j различных элементов число блоков, содержащих эту пару, равно λ.

Сбалансированное неполноблочное планирование может быть найдено для любого числа элементов v и любого размера блока k. Однако большинство BIB-схем не представляет интереса для планирования эксперимента, так как r велико. Обычно в планировании не применяются BIB-схемы с $r > 10$.

Частично сбалансированный план (частично сбалансированная блок-схема, сокращенно PBIB-схема) (от английского Partially Balanced Imcomplete Block) это план, в котором каждый блок содержит одно и то же число элементов и каждый элемент принадлежит одному и тому же числу блоков, но некоторые пары элементов принадлежат одному числу блоков λ_1, в то время как другие пары — другому числу блоков λ_2. В общем λ_1 и λ_2 могут быть любыми различными целыми числами, включая нуль. PBIB-схемы с параметрами λ_1 и λ_2 имеют два ассоциативных класса и сокращенно обозначаются PB1B(2)-схемы. В общем случае число классов равно m.

Цепные блок-схемы являются специальным видом блок-схем. Простейшие цепные блок-схемы построены таким образом, что пара элементов в двух соседних блоках одинакова и является связующим звеном. Такое связывание блоков является основным свойством цепных блок-схем. Связывающие звенья образуются из элементов первой группы, которые повторяются в плане два или большее число раз. Элементы второй группы встречаются в плане только один раз.

Цепные блок-схемы целесообразно применять в следующих ситуациях:

1) размер блока ограничен и число элементов значительно превышает этот объем;

2) сравнение элементов внутри блоков проводится с такой точностью, что достаточно одного или двух повторений;

3) все элементы можно разбить на две группы.

Элементы первой группы являются наиболее важными, и сравнение пар этих элементов желательно проводить достаточно точно. Поэтому они повторяются минимум два раза. Элементы второй группы считаются дополнительными и встречаются в плане по одному разу.

Цепные блок-схемы используются в экспериментальных исследованиях, проводимых с высокой точностью, например в физике.

Специфическим типом неполноблочных планов являются решетчатые планы. Они могут быть полностью или частично сбалансированы и иметь форму квадрата, прямоугольника, куба или параллелепипеда. Решетчатые планы различаются также по числу величин, которые балансируются. Так, например, план в форме квадрата может быть сбалансирован по одному фактору. В этом случае он имеет одно ограничение и носит название квадратной решетки. Но план в форме квадрата может быть сбалансирован и по двум факторам. Тогда он имеет два ограничения и называется решетчатым квадратом.

В m-мерных сбалансированных решетках, имеющих квадратную форму, число элементов равно k^m, где k есть простое целое число. Параметры этих планов связаны следующими соотношениями:

$$v = k^2,\ r = k + 1,\ b = k(k + 1).$$

Модель, с помощью которой представляются экспериментальные данные для планов, не разбитых на реплики, имеет вид

$$y_{ij} = \mu + \alpha_i + \beta_j + \varepsilon_{ij},$$

а для планов, разбитых на реплики, —

$$y_{ijq} = \mu + \alpha_i + \beta_{jq} + \gamma_q + \varepsilon_{ijq}.$$

К латинским планам мы относим латинские и гипер-греко-латинские квадраты, кубы, прямоугольники, параллелепипеды, а также сложные планы, построенные на базе латинских планов. Латинские прямоугольники, к одной из разновидностей которых относятся квадраты Юдена, имеют «двойное подчинение»: по методу построения они связаны с латинскими квадратами (их можно построить вычеркиванием определенных строк или столбцов латинских квадратов, поэтому они еще называются неполными латинскими квадратами), а по свойствам и по методам статистического анализа они близки к блок-схемам.

Напомним, что латинским квадратом называется квадратная таблица из элементов (чисел или букв), такая, что каждый элемент встречается один и только один раз в каждой строке и в каждом столбце. При планировании эксперимента строчки и столбцы квадрата употребляются для обозначения уровней двух факторов, образующих факторный эксперимент типа n^2. На него накладывается $n \times n$ латинский квадрат. Латинский квадрат является частью плана, однако в планировании эксперимента весь план принято называть латинским квадратом (рис. 13.1).

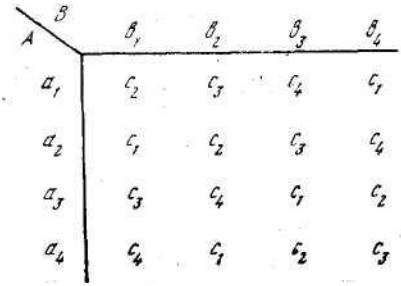


Рис. 13.1. Латинский квадрат 4x4

Результаты эксперимента представляются в виде линейной модели

$$y_{ijk} = \mu + \alpha_i + \beta_j + \varepsilon_{ijk}.$$

Главными эффектами являются α_i и β_i. Они «элиминируются» группировкой элементов квадрата (γ_k).

Латинский квадрат не является обычной моделью с предположением нормальности, по которой ошибки независимы и их дисперсии равны. Статистический анализ существенно опирается на предположение аддитивности и может быть ошибочным, когда есть взаимодействия.

Два латинских квадрата называются ортогональными, если при наложение одного квадрата на другой каждая пара одинаковых элементов встречается один и только один раз. Комбинация двух ортогональных квадратов носит название латинского квадрата второго порядка. Если элементы первого квадрата обозначить латинскими буквами, а второго — греческими, то такой квадрат называется греко-латинским. Модель эксперимента имеет вид

$$y_{ijk0} = \mu + \alpha_i + \beta_j + \gamma_k + \delta_0 + \varepsilon_{ijk0}.$$

Три ортогональных латинских квадрата образуют латинский квадрат третьего порядка или гипер-греко-латинский квадрат.

Модель эксперимента

$$y_{ijk0p} = \mu + \alpha_i + \beta_j + \gamma_k + \delta_0 + \zeta_p + \varepsilon_{ijk0p}.$$

Если имеется k ортогональных латинских квадратов, то они образуют латинский квадрат k-го порядка. Пусть дано множество S из n элементов. Латинским прямоугольником, основанном на n-множестве S, называется такая прямоугольная $r \times s$-таблица, в которой каждая строка является s-перестановкой элементов S, а каждый столбец — r-перестановкой элементов S при $r \le n$, $s \le n$.

Квадратами Юдена называются такие латинские прямоугольники, для которых выполняются следующие соотношения: $v = b$, $k = r$. Модель эксперимента

$$y_{ijk} = \mu + \alpha_i + \beta_j + \gamma_k + \varepsilon_{ijk}.$$

Латинским кубом первого порядка размера n называют кубическую таблицу из n элементов, расположенных в n^3 позициях, такую, что каждый элемент входит в таблицу n^2 раз и встречается в каждой из n плоскостей, параллельных координатным плоскостям X_1OX_2, X_1OX_3 и X_2OX_3 одинаковое для всех элементов число раз, равное n.

Если некоторый латинский куб размера n первого порядка можно наложить на другой латинский куб размера n первого порядка так, что каждый элемент одного куба встретится точно n раз с каждым элементом другого куба, то такие два куба, называют ортогональными. Два ортогональных куба, наложенных друг на друга, образуют греко-латинский куб первого порядка.

Латинский куб 2-го порядка представляет собой разноуровневый план: часть факторов имеет n уровней, а один фактор — n^2 уровней. Все линейные эффекты факторов, установленных на n уровнях, определяются с одинаковой и максимальной для данного числа N точностью, а эффект фактора на n^2 уровнях определяется с точностью в n раз меньшей.

Модель эксперимента при применении латинских кубов выглядит следующим образом:

$$y_{ijk0} = \mu + \alpha_i + \beta_j + \gamma_k + \delta_0 + \varepsilon_{ijk0},$$

где α_i, β_j, γ_k являются главными эффектами и «элиминируются» группировкой латинского куба (δ_0).

Разноуровневый план, у которого все факторы имеют n уровней, а один фактор — $(n - r)$-уровней, называется латинским параллелепипедом.

Планы, построенные путем совмещения латинских квадратов или прямоугольников с факторными экспериментами типа 2^n, называются сложными совмещенными планами. При совмещении число опытов в

матрице должно равняться числу клеток квадрата или прямоугольника. Для $n = 2^k$, где $k = 1, 2, \ldots$, частью сложного плана является латинский квадрат. Если же n является нечетным числом, то частью сложного плана является латинский прямоугольник $\frac{2^k}{2} \times 2^k$. При совмещении фактор, уровни которого составляют латинский план, ортогонален $2k$ факторам, задающим полный факторный эксперимент. Все 2^k уровней этого фактора встречаются с любым из двух уровней исходных $2k$ факторов одинаковое число раз.

Сложные планы пригодны для линейных моделей, когда

$$y = F(x_1, x_2, \ldots, x_n; z_1 z_2, \ldots, z_m) + \varepsilon,$$

где x_i — количественные факторы на двух уровнях, $i = 1, 2, \ldots, n$ и z_j — качественные факторы на числе уровней $m > 2$, j — $1, 2, \ldots, m$.

Сложные планы позволяют:

1) варьировать количественные факторы только на двух уровнях, что является достаточным для получения линейной зависимости, когда справедлива гипотеза об отсутствии взаимодействий;

2) исключить нарушающее влияние качественных факторов при подсчете линейных эффектов количественных факторов;

3) совершить движение по градиенту для количественных факторов;

4) построить оптимальный перебор комбинаций уровней качественных факторов, если $n > 1$;

5) не превысить число опытов по сравнению с факторными планами типа 2^n.

Сравнительно редко употребляются перекрестные планы *(cros-over design),* построенные на базе латинских квадратов малого размера, и переменные планы *(change-over design),* имеющие черты, связывающие их с цепными блок-схемами и с перекрестными планами.

13.3.2. Планы многофакторного анализа

Планы многофакторного анализа (ПМА) используются для оценки линейных эффектов и эффектов взаимодействий многих факторов, варьируемых на одинаковом (симметричные планы) или неодинаковом (несимметричные планы) числе уровней. Общее уравнение математической модели, представляющей результаты эксперимента по таким планам, имеет вид

$$y = b_0 + \sum_{i=1}^{p} b_j x_j + \sum_{i>j} \sum^{p} b_{ju} x_j x_u + \ldots +$$

$$+ \sum_{j>u>\ldots>k} \sum \ldots \sum^{p} b_{juk} x_j x_u \ldots x_k.$$

В классе ПМА различаются следующие планы.

Симметричные двухуровневые планы типа 2^k**,** в которых каждый фактор варьируется на двух уровнях. Эти планы наиболее освоены и распространены. Полные планы, когда реализуется весь набор из 2^k комбинаций уровней факторов, позволяют оценить все эффекты модели, включая взаимодействия. Если часть эффектов (обычно это взаимодействия высших порядков) в модели отсутствует, то используют дробные факторные планы или так называемые дробные реплики, представляющие определенную часть полного эксперимента типа 2^k. Реплика называется регулярной, если она представляет $^1/_2{}^k$ часть от 2^k эксперимента, где k — целое число. Такая реплика содержит 2^{k-p} опытов и обозначается соответствующим образом. Если реализуется часть 2^k эксперимента, не кратная степени двойки, т. е. не равная $^1/_2{}^k$, то такая реплика называется нерегулярной.

Многоуровневые симметричные планы, в которых факторы варьируются на 3, 4, . . . , m уровнях и обозначаются соответственно как 3^k, 4^k, . . ., m^k планы. Эти планы также могут быть полными и дробными.

Многоуровневые несимметричные планы, в которых факторы варьируются на различных уровнях, строятся различными способами:

а) комбинированием полных и дробных планов типа 2^k, 3^k, 4^k , т. е. планы типа 3×2^k, 4×2^k, 5×2^k, 3×2^k и т. д.;

б) совмещением факторных планов типа 2^k с латинскими квадратами, прямоугольниками, кубами (особенностью этих планов является требование равенства числа опытов эксперимента степени двойки, т. е. $N = 2^k$*);*

в*)* комбинированными методами на основе РВІВ- и ВІВ-схем;

г) методом теории конечных полей;

д) методом преобразования симметричных планов в соответствующие несимметричные.

Кроме перечисленных планов следует отметить планы, обеспечивающие оценку не только исследуемых факторов и их взаимодействий, но также и эффекты последовательности воздействия факторов. При использовании планов каждый объект испытывается всеми k факторами, варьируемыми на двух уровнях (1 — наличие фактора, 0 — его отсутствие) в определенной последовательности и измерение выходного показателя производится после каждого воздействия. Получаемая модель имеет вид

$$y_{ijk}[x_1, x_2, \ldots, x_{j-1}] = m + u_{ik} + \varepsilon_{x_1,\ldots,x_{j-1}} + \zeta_{ijk},$$

где i=1, …, r — число объектов, которые подвергались воздействию только одной определенной последовательностью j = l, ..., $(p+1)$, j—

число замеров на объекте, k=1, . . ., p! —число возможных сочетаний последовательностей, m — оценка средней, u_{ik} — конечный эффект воздействия на объект факторов, приложенных в определенной k-й последовательности, ξ — эффект последовательности приложения факторов, ε — случайная ошибка измерений.

К этому же классу можно отнести также планы для оценки остаточных эффектов, перекрестные *(cross-over)* планы, планы с группировкой и планы с расщепленными делянками, которые обычно рассматриваются в группе планов дисперсионного анализа

13.3.3. Планы для изучения поверхности отклика

Этот класс планов применяется для детального изучения области оптимума и участков поверхности отклика со значительной кривизной, где линейная модель становится неадекватной. Обычно для математического описания бывает достаточно полинома второго порядка, реже третьего порядка, используя планы соответственно второго и третьего порядков.

Планы 2-го порядка (более детальная классификация планов второго порядка производится с учетом критериев оптимальности, рассмотренных нами ранее (например, *A*-оптимальность, *D*-оптимальность и т. д.)) позволяют получить математическое описание в виде полной квадратичной модели, содержащей кроме основных эффектов b_j все парные взаимодействия b_{iu} и квадратичные эффекты b_{ii}, т. е. всего

$$\frac{(k+1)(k+2)}{2}$$

эффектов;

$$y = b_0 + \sum_{j=1}^{k} b_j x_j + \sum_{\substack{j,\ u \\ j \neq u}}^{k} b_{ju} x_j x_u + \sum_{j=1}^{k} b_{jj} x_j^2.$$

По методу построения планы бывают композиционные и некомпозиционные.

Композиционные планы второго порядка получают путем добавления 2k «звездных точек» типа

$$(\pm\alpha, 0, \ldots, 0), (0, \pm\alpha, 0, \ldots, 0), \ldots, (0, 0, \ldots, \pm\alpha)$$

и некоторого числа центральных точек n_0 (0, 0, . . ., 0) к «ядру», образованному полным экспериментом типа 2^k или его репликой. Используют эти планы обычно на заключительном этапе исследования: при описании экспериментальной области в ситуациях, когда отсутствует априорная информация об объекте и его полиномиальную модель приходится подбирать последовательно,

начиная с простейшего линейного уравнения, которое затем достраивается до полной квадратичной модели. В таких случаях применение композиционных планов оказывается наиболее выгодным по числу опытов.

Выбор величины плеча α и числа точек n_0 определяется критерием оптимальности (ортогональность, ротатабельность). При построении ортогональных и ротатабельных центральных композиционных планов (ОЦКП, РЦКП) в качестве ядра используют минимально возможные регулярные реплики 2^{k-p}, которые обеспечивают независимую раздельную оценку всех основных эффектов b_j и эффектов взаимодействия b_{ju}.

Если известно априори, что часть эффектов b_i (или b_{iu}) в модели отсутствует, то используют планы Хартли, строящиеся на основе минимальных регулярных реплик 2^{k-p}, в которых должны быть не смешаны между собой только парные эффекты b_{ju} (часть или даже все эффекты b_{ju} могут быть смешаны с эффектами b_j). Планы Хартли более экономны, чем ОЦКП и РЦКП, и рекомендуются при построении интерполяционных моделей типа квадратичного полинома для объектов с малым уровнем шумов.

Для этих же целей можно использовать композиционные планы Вейстлейка с еще меньшим числом точек, построенные на основе минимально возможных нерегулярных реплик. Недостаток планов Вейстлейка — коррелированность эффектов квадратичной модели, что затрудняет их расчет и интерпретацию.

Некомпозиционные планы применяются при наличии априорной информации о существенности кривизны поверхности отклика, позволяющей начинать эксперимент сразу с реализации плана второго порядка. К их числу относятся планы типа неполного факторного эксперимента 3^k, симплексно-суммируемые планы и прочие. Первые представляют собой определенные выборки строк из матрицы 3^k. В основу их построения положен принцип комбинирования матриц 2^k по сбалансированной схеме неполных блоков.

Симплексно-суммируемые планы делятся на симметричные и несимметричные в зависимости от вида суммирования. Эти планы можно также рассматривать как композиционные, потому что они получаются на базе симплекс-планов первого порядка соответствующей достройкой.

Планы третьего порядка применяются сравнительно редко, лишь в случаях, когда квадратичная модель неадекватна. Обычно они строятся последовательно на базе планов первого и второго порядка.

Существуют также отдельные планы непоследовательного типа .

13.3.4. Планы отсеивающего эксперимента

Эти планы используются на стадии предварительных исследований для выделения существенных эффектов факторов. В этом классе различают следующие планы.

Насыщенные планы Плакетта и Бермана, представляющие собой двухуровневые планы, образованные методом циклических сдвигов. Число опытов в планах равно числу исследуемых эффектов.

Сверхнасыщенные планы случайного баланса в зависимости от числа уровней варьирования могут быть двух- и многоуровневыми. По методу построения эти планы могут быть образованы случайным образом (например, из строк факторного эксперимента типа 2^k с помощью таблиц случайных чисел). Систематически отобранные планы обеспечивают минимальные корреляции между столбцами плана (планы Бут и Кокса и др.). При случайном балансе результаты эксперимента представляются в виде модели

$$y = b_0 + \sum_{j=1}^{p} b_j x_j + \sum_{j=p+1}^{l} a_j z_j + \varepsilon,$$

где p — число значимых эффектов, l—p число отсеиваемых незначимых эффектов, ε—случайная ошибка, $N<l$ (при $p<N$) — число опытов плана.

Планы последовательного отсеивания. При последовательном отсеивании, используемом в отличие от двух вышеописанных типов планов, для задач большой размерности (число факторов около 100 и выше) все факторы на основе априорной информации делятся на группы, каждая из которых рассматривается далее как отдельный комплексный фактор. Эти группы — комплексные факторы, которые содержат только незначимые переменные, исключаются из рассмотрения после первого цикла опытов (первой проверки). Оставшиеся факторы вновь делятся на группы для проверки, и цикл опытов повторяется. Такая процедура проводится до выявления всех значимых эффектов. В процессе отсеивания комбинирование и разделение переменных по группам проводится с помощью комбинаторных планов типа BIB-PBIB-схем, латинских квадратов и др.

После каждого цикла опытов получается новая информация, позволяющая выбрать оптимальные планы для реализации очередного цикла. В простейшем случае при последовательном отсеивании используется линейная модель аддитивного типа

$$E(y_{ij}) = E(m + g_{ij} + \varepsilon) = E(m + v_{j-1,\, s_i+1} + v_{j-1,\, s_i+2} + \ldots$$
$$\ldots + v_{j-1,\, s_1+k} + \ldots + v_{j,\, s_i+e}) = m + v_{j-1 s_i} + \varepsilon,$$

где y_{ij}—результат эксперимента в j-й подгруппе и i-м цикле c-циклового эксперимента, m—общее среднее, ε—ошибка эксперимента, g_{ij}—комбинированный эффект от s_i переменных, включенных в модель. Предполагается, что только k-й из этих s_i переменных в подгруппе g_{ij} значим, т. е. имеется эффект $v_{i-1,\, s_i+k}$, который больше ошибки ε или комбинации всех остальных s_i—1 незначимых переменных. Если это так, то вся группа g_{ij}- должна быть полностью пересмотрена в следующем (i+1)-м цикле. Если $E(y_{ij}) = E(m+g_{ip}+\varepsilon)$, то подгруппа g_{ip}, содержащая незначимые переменные, исключается из рассмотрения и далее следует (i+1)-й цикл.

В более сложных случаях в модель включают эффекты взаимодействии факторов.

13.3.5. Планы для экспериментирования в условиях дрейфа

Блочные планы, ортогональные к дискретному дрейфу, представляют собой обычные планы типа ПМА, сбалансированные так, чтобы часть столбцов плана использовалась для оценки эффектов дискретного дрейфа независимо от эффектов исследуемых, факторов.

Планы, ортогональные к непрерывному дрейфу, могут быть построены на основе таблиц полиномов Чебышева. Они используются для изучения линейных эффектов управляемых количественных факторов независимо от полиномиального дрейфа любого порядка. В случае необходимости оценки также и взаимодействий управляемых факторов используют обычные планы 2^{κ}, отбирая те столбцы планов, которые имеют минимальные корреляции с эффектами дрейфа. К этим же планам относятся планы Кокса, предназначенные для изучения одной количественной или качественной переменной, варьируемой на двух, трех, четырех уровнях в условиях дрейфа второго и третьего порядков.

Комбинированные планы для совместного изучения количественных и качественных переменных в условиях непрерывного полиномиального дрейфа получают соответствующим комбинированием планов Чебышева и планов Кокса.

Планы для экспериментирования в условиях дрейфа используются для исключения влияния неоднородностей типа дискретного и непрерывного дрейфа на исследуемые эффекты и оценки этого влияния независимо от эффектов варьируемых факторов и составляют основу группы планов ковариационного анализа .

13.3.6. Планирование эксперимента на диаграммах состав—свойство

Специфика задачи состоит в том, что естественная координатная система — бариоцентрическая на симплексе. Ортогональный план построить нельзя.

Первая возможность преодоления этой трудности — преобразование системы координат в декартову размерности *k*—1, где *k*— число компонентов системы (факторов), и использование любых известных планов для описания области или оптимизации.

Вторая возможность — планирование на симплексе. Для аппроксимации гладких поверхностей полиномом заданной степени используются симплексные решетки Шеффе. Они задаются симметричной системой точек, число которых определяется степенью полинома. Свободный член и коэффициенты при степенях переменных (выше первой) нельзя оценить такой выборкой (альтернатива—использовать однородные полиномы, не содержащие оценок взаимодействий).

Если на симплекс наложены линейные ограничения, то необходимо строить план на произвольном выпуклом многограннике. Для этого предложены планы Мак-Лина—Андерсона, которые задаются множеством точек, лежащих в вершинах, серединах ребер и гранях многогранника.

Для включения в план дополнительных факторов применяются симплексно-центроидные планы. Возможно также совмещение симплексных решеток с факторными планами, латинскими квадратами и т. п., а также с репликами от этих планов.

Когда существует опасность смещения оценок из-за выбора низкой степени полинома, используются планы Дрейпера—Лоуренса, минимизирующие такое смещение.

Известны модификации планов для специальных видов аппроксимирующих полиномов, например для тригонометрических полиномов.

В случае, когда поверхность отклика определяется разрывной функцией, возможна триангуляция симплекса и планирование в каждом новом многограннике .

13.3.7. Динамические задачи планирования

Можно различить два типа задач планирования: сводимые к статистическим и несводимые к статистическим (собственно динамические).

В задачах, сводимых к статистическим, выше уровень шумов, поэтому требуется большее число параллельных опытов.

Объекты исследования классифицируют по характеру дрейфа. Объекты без дрейфа —вообще не динамические. Если параметры дрейфа не известны, то эксперимент должен их оценить, одновременно с решением основной задачи.

Особенности объектов приводят к использованию преимущественно последовательных планов.

Наиболее развиты планы для промышленных экспериментов. К ним относится прежде всего эволюционное планирование Бокса (ЭВОП), которое строится на базе регулярных реплик от факторных планов и метода крутого восхождения, но с многократными повторами плана и осторожным движением в сторону градиента. Известны многочисленные модификации ЭВОП, например, вращаемое ЭВОП, позволяющее проводить локацию факторного пространства с расширяющейся сферой обследования. В планах ЭВОП используются линейные модели.

Случай непрерывного варьирования рассмотрен только для одного и двух факторов. Предложены планы Бокса—Дженкинса, основанные на модулировании входных сигналов синусоидами, ортогональными друг к другу.

В условиях автоматического управления объектом можно использовать планы адаптационной оптимизации, основанные, например, на симплекс-процедуре (отражении симплекса относительно грани, противоположной к вершине с наихудшим результатом).

Когда неуправляемых переменных несколько и их действие нельзя интерпретировать как дрейф, возникает задача активно-пассивного эксперимента (часть факторов образует план, а часть— измеряется; обработка результатов совместная).

Иногда, обычно в очень сложных ситуациях, эффективны рандомизированные последовательности опытов, т. е. планы, основанные на методах случайного поиска.

Планы для решения динамических задач — одна из слабо разработанных областей математической теории эксперимента, поэтому пока можно говорить скорее не о классификации, а о типологии этих задач и методов их решения .

13.3.8. Планы для изучения механизма явлений

По уровню априорной информации различаются следующие ситуации. Модель известна, константы известны; требуется уточнение (не обязательно всех) констант. Планы такого уточняющего эксперимента можно синтезировать для различных критериев оптимальности (обычно для *D*-оптимальности), причем как в однократном,

так и в последовательном вариантах. Так как вид модели всякий раз новый, то и план надо строить заново.

Модель известна, требуется оценка констант. Это задача интерполяции для известной функции. Выбор критерия оптимальности обеспечивает синтез плана.

Известно несколько альтернативных моделей. Требуется сравнить их, выбрать наилучшую, в некотором смысле, и оценить ее константы. Такая задача приводит к планированию дискриминирующих экспериментов. План может быть синтезирован аналогично предыдущим случаям. Множества факторов в моделях должны пересекаться, а лучше — совпадать.

Модель не известна. Этот случай приводит к обычной задаче аппроксимации неизвестной функции полиномом. Используется любой подходящий план. На основании результатов выдвигаются, если удастся, содержательные гипотезы о механизме. Далее все, как выше.

Для одной частной задачи — задачи химической кинетики, известен план Бокса—Хантера, который, по существу, есть реплика от плана 2^P. В этом случае отклик для условий одного опыта измеряется последовательно во времени несколько раз, т. е. отклик не число, а функция. При обработке результатов могут использоваться как полиномы, так и содержательные модели (например, модели формальной кинетики для констант скорости реакции).

Последовательные планы характерны для задач этого класса .

Почти все планы 13.3.2—13.3.4 относятся к планам регрессионного анализа, а сложные планы с качественными и количественными факторами относятся к планам ковариационного анализа.

13.3.9. Становление и развитие планирования эксперимента

Возникновение современных статистических методов планирования эксперимента связано с именем Р. Фишера. С 1918 г. он начал свою известную серию работ на Рочемстедской агробиологической станции в Англии. В 1935 г. появилась его монография «Design of Experiments», давшая название всему направлению.

Среди методов планирования первым был дисперсионный анализ (Фишеру принадлежит и термин «дисперсия»). Фишер создал основы этого метода, описав полные классификации дисперсионного анализа (однофакторный и многофакторный эксперименты) и неполные классификации дисперсионного анализа без ограничения и с ограничением на рандомизацию. При этом он широко использовал латинские квадраты и блок-схемы. Вместе с Ф. Йетсом он описал их

статистические свойства. В 1942 г. А. Кишен рассмотрел планирование по латинским кубам, которое явилось дальнейшим развитием теории латинских квадратов. Затем Р. Фишер независимо опубликовал сведения об ортогональных гипер-греко-латинских кубах и гипер-кубах. Вскоре после этого (1946—1947 гг.) Р. Рао рассмотрел их комбинаторные свойства. Дальнейшему развитию теории латинских квадратов посвящены работы Х. Манна (1947—1950 гг.). Здесь следует отметить, что начиная с работ Р. Муфанга (1935 г.) развивается теория квазигрупп, т. е. множеств *E* с бинарной операцией на *E,* для которой существуют обе обратные ей операции. Теория квазигрупп имеет прямую связь с теорией латинских квадратов. Так, если область определения конечна и задана списком ее элементов, то эта операция может быть эффективно определена квадратной таблицей с двумя входами, в каждом столбце и в каждой строке которой без повторений помещены все элементы из области *E.* Такая таблица является латинским квадратом.

Первое глубокое математическое исследование блок-схем выполнено Р. Боузом в 1939 г. Вначале была разработана теория сбалансированных неполноблочных планов (ВІВ-схем). Затем Р. Боуз, К. Нер и Р. Рао обобщили эти планы и разработали теорию частично сбалансированных неполноблочных планов (РВІВ-схем). С тех пор изучению блок-схем уделяется большое внимание как со стороны специалистов по планированию эксперимента (Ф. Йетс, Г. Кокс, В. Кохрен, В. Федерер, К. Гульден, О. Кемптгорн и многие др.), так и со стороны специалистов по комбинаторному анализу (Боуз, Ф. Шимамото, В. Клатсворси, С. Шрикханде, А. Гоффман и др.). Их усилия были направлены на разработку способов построения блок-схем, составления каталогов планов и на решение вопроса классификации РВІВ-схем по ассоциативным схемам.

Исследования Р. Фишера, проводившиеся в связи с работами по агробиологии, знаменуют начало первого этапа развития методов планирования эксперимента. Фишер разработал метод факторного планирования. Йетс предложил для этого метода простую вычислительную схему. Факторное планирование получило широкое распространение. Особенностью полного факторного эксперимента является необходимость ставить сразу большое число опытов. Это вполне пригодно в агробиологии, но связано со значительными трудностями в технических приложениях.

В 1945 г. Д. Финни ввел дробные реплики от факторного эксперимента. Это позволило резко сократить число опытов и открыло дорогу техническим приложениям планирования. Другая возможность

сокращения необходимого числа опытов была показана в 1946 г. Р. Плакеттом и Д. Берманом, которые ввели насыщенные факторные планы.

Г. Хотеллинг в 1941 г. обратил внимание на то, что многие практические, особенно технические, задачи можно рассматривать как экстремальные. Он предложил находить экстремум по экспериментальным данным с использованием степенных разложений и градиента (подробно для случая одной независимой переменной). Проблемы, поставленные второй мировой войной, привели к интенсификации исследований в этом направлении.

Следующим важным этапом было введение принципа последовательного шагового экспериментирования. Этот принцип, высказанный в 1947 г. М. Фридманом и Л. Сэвиджем, позволил распространить на экспериментальное определение экстремума известный в математике прием — итерацию. Идейно их работа примыкает к работам А. Вальда по последовательному анализу, сформировавшемуся в 1943—1950 гг.

Чтобы построить современную теорию планирования эксперимента, не хватало одного звена — ***формализации объекта исследования***. Это звено появилось в 1947 г. после создания Н. Винером ***теории кибернетики.*** Кибернетическое понятие «черный ящик» играет в планировании важную роль. Кроме того, кибернетика стимулировала развитие вычислительной техники, дав в руки исследователей инструмент, позволяющий быстро решать возникающие при планировании математические задачи .

В 1951 г. работой американских ученых Дж. Бокса и К. Уилсона начался новый этап развития планирования эксперимента. Эта работа подытожила предыдущие. В ней ясно сформулирована и доведена до практических рекомендаций идея последовательного экспериментального определения оптимальных условий проведения процессов с использованием оценки коэффициентов степенных разложений методом наименьших квадратов, движения по градиенту и отыскания интерполяционного полинома (степенного ряда) в области экстремума функции отклика («почти стационарной» области).

В 1954—1955 гг. Дж. Бокс, а затем Дж. Бокс и П. Юл показали, что планирование эксперимента можно использовать при исследовании физико-химических механизмов процессов, если априори высказаны одна или несколько возможных гипотез. Здесь планирование эксперимента пересекалось с исследованиями по химической кинетике. Следует отметить, что ***кинетику можно рассматривать как метод описания процесса с помощью дифференциальных уравнений,***

традиции которого восходят к И. Ньютону. ***Описание процесса дифференциальными уравнениями, называемое детерминистическим, нередко противопоставляется статистическим моделям***. Указанные работы наметили конкретный путь сближения этих подходов. Если кинетическая модель уже известна, возникает вопрос о планировании эксперимента для уточнения полученных ранее констант. Это направление также получило развитие, в частности в работах Н. П. Клепикова и С. Н. Соколова, а затем В. В. Федорова в связи с задачами ядерной физики.

Если для ***первого этапа развития планирования эксперимента характерны полевые и лабораторные агробиологические исследования, то второй этап — это этап лабораторных, главным образом химических, исследований. Хотя развитие этого направления еще не закончено, но уже можно говорить о третьем этапе — этапе промышленных экспериментов.*** Он начался в 1957 г., когда Бокс модифицировал свой метод, приспособив его для использования в промышленности. Этот метод стал называться ***«эволюционным планированием».***

Почти одновременно с эволюционным планированием Бокс и Дж. Хантер сформулировали принцип ротатабельности для описания «почти стационарной» области, развившуюся в важную ветвь теории планирования эксперимента. В той же работе показана возможность планирования с разбиением на ортогональные блоки, указанная ранее независимо де Бауном. Дальнейшим развитием этой идеи было планирование, ортогональное к неконтролируемому временному дрейфу, которое следует рассматривать как важное открытие в экспериментальной технике — значительное увеличение возможностей экспериментатора.

Слабым местом было отсутствие метода оценки риска, связанного с тем, что в рассмотрение не включен какой-либо важный фактор. Для преодоления этой трудности в 1957—1959 гг. Ф. Сатерзвайтом был развит метод ***«случайного баланса»*** . Этот метод возник не в связи с общим ходом развития статистических идей, а скорее как прием формализации психо-физиологических методов решения сложных задач человеком. Поэтому он вызвал острую дискуссию.

В 1958 г. Г. Шеффе предложил новый метод планирования эксперимента для изучения физико-химических диаграмм состав—свойство. В этом методе, названном методом ***«симплексной решетки»,*** используется то обстоятельство, что состав многокомпонентной системы дается точкой в правильном симплексе.

Здесь произошло пересечение с ***химической топологией***, созданной Н. С. Курнаковым.

Симплексы оказались пригодными и для построения ротатабельных планов, что было показано в 1960 г. Дж. Боксом и Д. Бенкиным. С. Адельманом в 1961 г. обобщена идея Финни о дробных репликах. Им построены нерегулярные дробные реплики, которые в ряде случаев позволяют существенно сократить число опытов,

С развитием средств автоматизации и вычислительной техники возник вопрос о возможности использования какого-либо алгоритма планирования при автоматическом управлении процессом с помощью вычислительной машины. Этот вопрос был теоретически решен в 1962 г. В. Спендлейем, Дж. Хекстом и Ф. Химсворстом, Боксом и Дж. Дженкинсом, создавшими ***основы теории адаптационной оптимизации***, в которой ***сочетаются идеи планирования и теория случайных функций.***

Следует отметить, что ряд научных концепций, развивающихся параллельно с планированием эксперимента, оказывает влияние на его развитие: к их числу, кроме уже упоминавшихся, относятся ***теория консалтинга, теория принятия решений, теория игр, линейное, нелинейное и динамическое программирование, правдоподобные рассуждения***, введенные Д. Пойа. ***Планирование эксперимента входит как составная часть в более общие концепции: общую теорию систем, исследование операций и системотехнику, теорию управляющих систем и др..***

Отметим, что наиболее характерной чертой, является объединение подхода Дж. Бокса с подходом американского математика Д ж. Кифера, рассматривавшего формальные аспекты теории планирования.

Растут возможности методов планирования эксперимента, расширяется сфера их приложения. Надо полагать, что развитие уже достигло такого состояния, когда можно писать с большой буквы — «Математическая теория эксперимента», когда накоплен значительный практический опыт.

14. Оптимальные планы выполнения эксперимента

14.1. Логика понятия эффективного эксперимента

В этом разделе будет рассмотрен подход, предложенный В.В. Налимовым и Т.И. Голиковой, позволяющий разрабатывать оптимальные планы выполнения эксперимента.

Задача настоящего раздела—рассказать о тех логических предпосылках, на которых базируется планирование эксперимента, опуская почти все, что непосредственно связано с практикой его применения. Уже накоплен большой опыт применения планирования эксперимента в самых различных областях деятельности — в научных и научно-технических исследованиях, в практике промышленного эксперимента, осуществляемого непосредственно в заводских цехах, в сельском хозяйстве, в биологии и медицине. Этот опыт нашел отражение в журнальных публикациях, общее число которых достигает нескольких тысяч. В то же время общетеоретические основания планирования эксперимента до сих пор остаются недостаточно разъясненными. Пока еще, на взгляд атора настоящей работы, никому не удалось написать хорошего руководства по планированию эксперимента ни в нашей стране, ни за рубежом. В популярных руководствах, предназначенных для широкого круга читателей, рассматриваются вопросы о том, как применять какие-либо планы в тех или иных конкретных ситуациях, как обрабатывать результаты таких экспериментов и как их интерпретировать. В книгах теоретической направленности рассматриваются специальные математические проблемы, возникающие при построении планов, отвечающих тем или иным критериям оптимальности. При этом сама идеология планирования эксперимента оказывается опущенной в книгах как того, так и другого типа.

Это отставание теоретического осмысливания метода от его практического применения объясняется особенностями его исторического развития. За более чем 80 лет существования идеология планирования эксперимента претерпела существенную эволюцию. Развитие основных идей шло, несколькими, почти не-пересекающимися направлениями. В каждом из них формулировались свои задачи, излагаемые в свойственной этим задачам терминологии. Впоследствии, однако, обнаружилась общность во многих, казалось бы существенно различных по своей постановке задачах. Появилась возможность осмысливания всего многообразия методов в рамках

неких более или менее единых представлений. Развитие теоретических представлений позволило не только построить новые планы эксперимента, но и сделать нечто гораздо большее — дало возможность четко сформулировать *логику понимания того, что есть* ***эффективный эксперимент.***

Внешне планирование эксперимента выглядит как математическая дисциплина — его высказывания формулируются на ***языке математики.*** Однако его логическая структура отлична от построений чистой математики. ***Характерной особенностью математики является четкий аксиоматически-дедуктивный метод построения суждений.*** Но система постулатов в математике — это отнюдь не пестрая мозаика отдельных исходных высказываний. Особенностью чистой математики является то, что система постулатов образует своеобразные концепции — ***математические структуры***, богатые теми логическими следствиями, которые из них могут быть выведены. Согласно взглядам Бурбаки, наличие таких структур, в которых имплицировано все содержание математики, и есть та основная черта, которая отличает ее от других областей знаний. В планировании эксперимента, как и в других разделах прикладной математики, исчезают из поля зрения целостные математические структуры. Они заменились в одном случае пестрой мозаикой критериев— для этой мозаичной структуры потеряла смысл сама постановка вопроса о непротиворечивости, играющая столь большую роль в структурах чистой математики, в других случаях на математическом языке стали записываться некоторые высказывания, основанные на не очень ясных интуитивных соображениях, и тогда вообще *исчезла* ***цепочка силлогизмов****, которая является одним из обязательных внешних признаков традиционных математических построений*.

Как известно, ***аксиомой называется предложение, принимаемое без доказательств и рассматриваемое как исходное при построении той или иной математической теории***. В планировании эксперимента ***роль аксиом*** играют ***критерии оптимальности эксперимента***. ***Они принимаются без доказательств — их правомерность основывается на интуитивном представлении о том, что есть эффективный эксперимент. Будучи сформулированными на математическом языке, критерии оптимальности становятся теми исходными высказываниями, на которых строится вся дальнейшая теория***. Критерии оптимальности в планировании эксперимента легко разбиваются на две группы. Одна из них — группа статических критериев. Здесь речь идет о высказываниях, формулирующих

требования, которым должно удовлетворять некоторое, задаваемое планом эксперимента расположение экспериментальных точек в пространстве факторов (независимых переменных), подлежащих варьированию. ***Роль теорем здесь играют высказывания о свойствах планов.***

Под теоремами будем понимать, как принято в логике, высказывания, для которых существуют доказательства. Доказательством называем логическое действие, в процессе которого обосновывается истинность какого-либо утверждения . Истинность высказываний, т. е. соответствие их заранее высказанным утверждениям об оптимальности, проверяется путем доказательств. Вся система суждений здесь носит чисто конструктивный характер—необходимо найти способ построения плана, оптимального в том или ином смысле. Конструктивной деятельности здесь обычно предшествует необходимость доказательства ряда предварительных теорем. Критерии оптимальности планов образуют в общем случае мозаику взаимно несовместимых высказываний, хотя некоторые обобщения здесь возможны; можно, соблюдая некоторые условия, выделить более сильные — иерархически вышестоящие критерии.

В целом, однако, все представление об оптимальности планов не может быть имплицировано в единой системе взаимно непротиворечивых высказываний. И здесь создается новая, не свойственная традиционной математике ситуация — ***возникает необходимость в сопоставлении друг с другом планов, порожденных разными критериями.*** Численными методами можно определить, в какой степени план, порожденный одним критерием, оценивается с позиций других критериев. В практической работе исследователь-экспериментатор не всегда может отдать четкое предпочтение одному из возможных критериев оптимальности. Часто целесообразно остановиться на компромиссном решении, и для этого необходимо иметь сравнительные числовые оценки параметров планов.

Ко второй группе критериев оптимальности относят ***динамические критерии.***

Термин «динамические» употребляется здесь в некотором общенаучном смысле для характеристики состояния движения или изменения какого-либо явления под влиянием действующих на него факторов. Такое понимание этого термина отличается от того специфического смысла, который вкладывается в него в теории оптимальною управления.

Здесь речь идет о проблеме выбора оптимальной стратегии в последовательно проводимой серии опытов. Нужны критерии, скажем, для того, чтобы решить, как надо действовать в заводских условиях, когда, варьируя управляемые переменные непосредственно в цехе, мы хотим непрерывно следить за дрейфом экстремума технологического процесса; или другой пример, как надо действовать, когда мы хотим создать программу исследования для изучения биологической активности очень большого числа препаратов, в условиях, когда наложены серьезные ограничения на возможное число опытов.

Во всех случаях речь идет об оптимальности всей последовательности действий, образующей стратегию эксперимента, а не об оптимальности отдельной серии опытов, как это было в первой группе критериев. При формулировке критериев оптимальности здесь на математическом языке записываются те высказывания, которые нам представляются правомерными на уровне наших интуитивных представлений. В этом случае дело с отчетливостью логических построений обстоит еще хуже, чем в предыдущем. При обсуждении проблемы выбора оптимальной стратегии часто даже не удается провести отчетливого разграничения между тем, что здесь является аксиомами и что логическими следствиями из них — теоремами. Записанное на математическом языке высказывание об оптимальности той или иной стратегии можно рассматривать как аксиому. Но остается не ясным, что считать здесь теоремами. Теряется глубина логических построений. Все сводится к тому, что строится алгоритм, соответствующий исходному высказыванию, удобный для конкретного практического применения. Множество основополагающих утверждений о возможных стратегиях поведения образует мозаику высказываний, а не математическую структуру в смысле Бурбаки.

Здесь снова возникает проблема сопоставления эффективности стратегий, порожденных разными высказываниями. Но в отличие от предыдущего случая, эта задача оказывается неразрешимой даже на уровне численного сопоставления. В предыдущем случае задача численного сопоставления различных планов хотя бы частично решалась, поскольку она сводилась к сопоставлению отдельных параметров, характеризующих структуру матрицы планирования эксперимента или как-то зависящих от структуры матрицы. В случае с решением задач, направленных на поиск оптимальных стратегий, нельзя выделить параметры для численного сопоставления. Единственное, что можно здесь сделать — ***это попытаться построить некую метатеорию, сформулировав аксиомы сравнения стратегий***. Но таких аксиом

можно придумать достаточно много и они опять-таки будут образовывать только мозаику высказываний. Можно пойти дальше и построить метатеорию для сравнения аксиом сравнения, но вряд ли это имеет смысл.

Предложенная В.В. Налимовым и Т.И. Голиковой и изложенная здесь бинарная система классификации, естественно, не охватывает всего многообразия задач. В некоторых случаях, например при постановке так называемых отсеивающих экспериментов, экспериментаторы сталкиваются с задачами смешанного типа, когда, с одной стороны, нужно оценить параметры модели — это статическая составляющая задачи, а с другой стороны, необходимо выполнить некоторые процедуры движения, скажем, уменьшить размерность пространства независимых переменных.

В задачах смешанного типа экспериментаторы сталкиваются с трудностями, свойственными задачам обоих типов.

Изложенное показывает те принципиальные трудности, с которыми приходится сталкиваться при попытках построения ***теории оптимального эксперимента***. Конечно, здесь построена теория в достаточно полном смысле этого слова. И действительно, здесь невозможно построение теории как некоего исчисления.

Принято считать, что исчисление задается конечным алфавитом его знаков, из которых составляются строчки или «слова в алфавите», и правилами, позволяющими выводить слова из начальных или уже ранее выведенных слов. Начальные слова могут задаваться непосредственно— списком или формулами, в которые могут входить и содержательные переменные, на место которых можно подставлять слова в алфавите.

Всё содержание теории нельзя получить как логический вывод из некоторых начальных утверждений, образующих единую, внутренне непротиворечивую структуру. Единственно, что можно сделать — это провести некоторую умственную атаку («мозговой штурм») на проблему, рассмотрев ее в различных мысленно возможных ракурсах. Такая атака требует существенной формализации наших представлений об эксперименте, хотя весьма очевидно, что ***все наши представления об эксперименте формализовать нельзя, поскольку любой эксперимент связан в какой-то степени с эвристической деятельностью. Формализуемую часть наших представлений об эксперименте целесообразно осмысливать на языке математики. Математика служит здесь для усиления логики наших суждений об эксперименте***. И когда мы говорим о ***математической теории эксперимента,*** то это не означает, что здесь строится новая

математическая дисциплина. Речь идет о ***создании формально-логического подхода к изучению проблемы эксперимента, формулируемого на языке математики***. Нечто аналогичное имеет место, скажем, в квантовой механике, которая несмотря на всю ее насыщенность математикой, не есть математическая дисциплина. Вслед за работами Фреге, Рёссела и Уайтхеда ***можно рассматривать математику как часть формальной логики.***

Планирование эксперимента имеет свое собственное идейное содержание, связанное с особенностями физического представления об эксперименте; ***планирование экстремальных экспериментов— это не просто поиск экстремума, а нечто гораздо большее — это поиск эффективного эксперимента для решения экстремальной задачи***.

Несмотря на все трудности, связанные с пониманием того, что есть научный эксперимент, не трудно привести примеры как хорошо поставленных (эффективных) экспериментов, так и экспериментов в каком-то смысле явно плохих (неэффективных). Эти примеры сразу покажут, что проблема логического анализа структуры эксперимента существует реально и что она может быть сформулирована на некотором весьма абстрактном уровне вне зависимости от того конкретного содержательного значения, которое тот или иной эксперимент имеет в каждом отдельном его использовании.

Рассмотрим простой и многократно описанный пример — взвешивания трех объектов *a, b, c* на аналитических весах. Традиционно экспериментатор стал бы взвешивать эти объекты по схеме, приведенной в табл. 14.1.

Вначале он делает холостое взвешивание, определяя нулевую точку весов, затем по очереди взвешивает каждый из объектов. Это пример традиционно используемого однофакторного эксперимента. Здесь исследователь изучает поведение каждого фактора в отдельности. Масса каждого объекта оценивается только по результатам двух опытов: того опыта, в котором на весы был положен изучаемый объект, и холостого опыта. Например, масса объекта *a* равна

$$A = y_1 - y_0.$$

Дисперсия результатов взвешивания запишется в виде:

$$\sigma^2\{A\} = \sigma^2\{y_1 - y_0\} = 2\sigma^2\{y\},$$

где $\sigma\{y\}$ — ошибка взвешивания.

Таблица 14.1

Традиционная схема взвешивания трех объектов[1]

Номер опыта	*a*	*b*	*c*	Результат взвешивания
1	−1	−1	−1	y_0
2	+1	−1	−1	y_1
3	−1	+1	−1	y_2
4	−1	−1	+1	y_3

[1] Здесь и в табл. 14.1 обозначение «+1» указывает, что объект взвешивания положен на весы, обозначение «−1» указывает на отсутствие объекта на весах.

Проведем теперь тот же эксперимент по несколько иной схеме, задаваемой матрицей планирования, приведенной в табл. 14.2.

Таблица 14. 2

Планирование эксперимента при взвешивании трех объектов

Номер опыта	*a*	*b*	*c*	Результат взвешивания
1	+1	−1	−1	y_1
2	−1	+1	−1	y_2
3	−1	−1	+1	y_3
4	+1	+1	+1	y_4

Здесь, как и в предыдущем случае, каждая строка задает условия проведения одного опыта.

В первых трех опытах последовательно взвешиваются объекты *a, b, c;* в последнем опыте взвешиваются все три объекта вместе — «холостое» взвешивание не производится. Легко видеть, что масса каждого объекта будетзадаваться формулами:

$$A = \frac{y_1 - y_2 - y_3 + y_4}{2}, \qquad B = \frac{-y_1 + y_2 - y_3 + y_4}{2},$$

$$C = \frac{-y_1 - y_2 + y_3 + y_4}{2}.$$

Здесь числители получены путем умножения элементов последнего столбца на элементы столбцов *a, b, c.* Мы видим, что при вычислении массы объекта *a* она входит в числитель два раза, и потому в знаменателе стоит число 2. Масса объекта *a,* вычисленная по приведенной выше формуле, оказывается не искаженной массами объектов *b* и *c,* так как масса каждого из них входит в формулу для массы *a* дважды и с разными знаками.

Найдем теперь дисперсию, связанную с ошибкой взвешивания при новой схеме постановки экспериментов. Она равна

$$\sigma^2\{A\} = \sigma^2\left\{\frac{y_1 - y_2 - y_3 + y_4}{2}\right\} = \frac{4\sigma^2\{y\}}{4} = \sigma^2\{y\}.$$

Аналогичным образом находим

$$\sigma^2\{B\} = \sigma^2\{y\} \text{ и } \sigma^2\{C\} = \sigma^2\{y\}.$$

Мы видим, что при новой схеме дисперсия взвешивания получается вдвое меньше, чем при традиционном методе, хотя в обоих случаях на взвешивание трех объектов затрачивалось по четыре опыта. При традиционном взвешивании мы должны будем все четыре опыта повторить дважды, для того чтобы получить результаты с такой же точностью, как и в первом опыте. В результате чего происходит увеличение точности эксперимента в два раза? В первом случае эксперимент был поставлен так, что каждую массу мы получали лишь из двух опытов. При новой схеме эксперимента каждая масса вычислялась уже из результатов всех четырех опытов. Вторую схему эксперимента можно назвать ***многофакторной***. Здесь оперируют всеми факторами (объектами взвешивания) так, чтобы каждая масса вычислялась то результатам всех опытов, проведенных в данной серии экспериментов. Рассмотренная задача взвешивания решается с помощью слишком простой процедуры, и вряд ли здесь нужно применять сложные схемы планирования эксперимента.

Пример со взвешиванием показывает, что даже в простых задачах можно с достаточной отчетливостью противопоставить неэффективный эксперимент эффективному.

Преимущество многофакторного эксперимента можно продемонстрировать и на более сложных задачах. Пусть, например, нам априори известно, что выход некоторого продукта y линейно зависит от трех переменных (факторов) x_1, x_2, x_3. В частном случае это может быть температура, давление и содержание некоторого компонента. Нам нужно оценить значения коэффициентов регрессии линейного уравнения

$$E\{y\} = \eta = \theta_0 + \theta_1 x_1 + \theta_2 x_2 + \theta_3 x_3,$$

где E — знак математического ожидания.

Каждую из переменных будем варьировать только на двух уровнях и обозначать эти уровни знаками «—1» и «+1». Если температура в наших опытах принимает два значения, скажем, 100 и 120°С, то нижний уровень температуры обозначим через «—1», а верхний через «+1». Воспользуемся для постановки опытов матрицей планирования, приведенной в табл. 14.3. Здесь мы имеем дело с так называемой матрицей Адамара. Матрицы Адамара **H** — это квадратные матрицы, размера $N \times N$ (в нашем случае N — число опытов), состоящие из элементов +1 и —1, удовлетворяющие условию $\mathbf{H}^T\mathbf{H} = N\mathbf{I}$, где **I** — единичная матрица, ^{T} — знак транспонирования. Матрицы Адамара можно построить только для N=2 и далее для N, кратного четырем.

В этом примере та же схема планирования, что и в табл. 14.2, только факторы a, b, c заменены независимыми переменными x_1, x_2, x_3 и добавлен столбец «фиктивной» переменной для оценки свободного члена θ_0.

В соответствии с этой таблицей, эксперименты выполняются следующим образом: в первом опыте переменные x_2 и x_3 находятся на нижних уровнях, x_1 — на верхнем уровне; во втором опыте переменная x_2 находится на верхнем уровне, а переменные x_1 и x_3 на нижних уровнях и т. д. Здесь мы имеем дело с насыщенным планом, число наблюдений равно числу оцениваемых параметров. Обозначим через $\hat{\theta}$ вектор оценок параметров θ.

План, приведенный в табл. 14. 3, обладает следующими свойствами:

$$\sum_{u=1}^{N} x_{iu} = 0, \qquad \sum_{u=1}^{N} x_{iu}^2 = N, \qquad \sum_{u=1}^{N} x_{iu} x_{ju} = 0. \quad (i \neq j)$$

Таблица 14. 3

Планирование эксперимента для линейной модели с тремя независимыми переменными

Номер опыта	Матрица коэффициентов X, план эксперимента				Результаты эксперимента
	x_0	x_1	x_2	x_3	
1	+1	+1	−1	−1	y_1
2	+1	−1	+1	−1	y_2
3	+1	−1	−1	+1	y_3
4	+1	+1	+1	+1	y_4

Первое из этих условий—условие ортогональности к столбцу из единиц, второе—условие нормировки, третье— условие попарной ортогональности столбцов (скалярные произведения всех векторов-столбцов равны нулю). Это значит, что матрица независимых переменных **X**, называемая также матрицей коэффициентов (см. табл. 14.3), устроена так, что матрица ковариаций $(\mathbf{X}^{\mathrm{T}}\mathbf{X})^{-1}$ для вектора параметров уравнения регрессии оказывается диагональной, т. е. все ковариации $\mathrm{cov}\{\hat{\theta}_i\ \hat{\theta}_j\}$ равны нулю и, следовательно, все коэффициенты регрессии определяются независимо друг от друга.

Напомним здесь, что в матричных обозначениях вектор-столбец коэффициентов регрессии задается соотношением

$$\hat{\theta} = (\mathbf{X}^{\mathrm{T}}\mathbf{X})^{-1}\mathbf{X}^{\mathrm{T}}\mathbf{Y},$$

причем

$$\sigma^2\left\{\hat{\theta}_i\right\} = c_{ii}\sigma^2\left\{y\right\},\quad \mathrm{cov}\left\{\hat{\theta}_i\hat{\theta}_j\right\} = c_{ij}\sigma^2\left\{y\right\}$$

и коэффициент корреляции

$$\rho\left\{\hat{\theta}_i, \hat{\theta}_j\right\} = \frac{c_{ij}}{\sqrt{c_{ii}c_{jj}}}.$$

Здесь c_{ii} и c_{ij} — диагональные и соответственно внедиагональные элементы матрицы $(\mathbf{X}^{\mathrm{T}}\mathbf{X})^{-1}$, поэтому последняя называется ковариационной матрицей уравнения регрессии или просто матрицей ошибок; матрица $\mathbf{X}^{\mathrm{T}}\mathbf{X}$ называется информационной матрицей.

Из второго условия следует, что все диагональные элементы матрицы $(\mathbf{X}^{\mathrm{T}}\mathbf{X})^{-1}$ равны $1/N$. Система нормальных уравнений рас-

падается на n+1 независимых уравнений. В этом случае коэффициенты регрессии определяются формулами:

$$\hat{\theta}_i = \frac{\sum_{u=1}^{N} x_{iu} y_u}{N} \quad (i = 0, \ldots, n)$$

с дисперсией

$$\sigma^2\{\hat{\theta}_i\} = \frac{\sigma^2\{y\}}{N}.$$

Из этих двух формул следует, что коэффициенты регрессии оцениваются по всем N опытам и соответственно в N раз уменьшается дисперсия в их оценке по сравнению с дисперсией единичного опыта. Последнее обстоятельство является весьма примечательным. Представим себе, что мы имеем дело с последовательностью N независимых наблюдений $y_1, y_2,..., y_N$, тогда среднее арифметическое этого ряда наблюдений $\bar{y}$ будет оцениваться с дисперсией $\sigma^2\{y\}/N$. В рассмотренном выше случае все N коэффициентов регрессии оцениваются по N опытам с дисперсией $\sigma^2\{y\}/N$. Отсюда становится очевидным, хотя бы на интуитивном уровне, что нельзя придумать такого расположения точек (внутри области, ограниченной единичным кубом), которое дало бы возможность получить лучшие по точности оценки коэффициентов регрессии. Это утверждение может быть и строго доказано.

Интересующие нас четыре коэффициента регрессии можно было бы оценить и с помощью традиционного однофакторного эксперимента. В этом случае мы действовали бы следующим образом: один эксперимент поставили бы так, чтобы все независимые переменные были на нижнем уровне, а дальше следовали бы три опыта, в каждом из которых одна переменная на верхнем уровне, а две другие на нижнем. Всего было бы опять поставлено четыре опыта. Но каждый коэффициент регрессии определялся бы только по двум опытам как тангенс угла циклона прямой, проведенной через точки, абсциссы когорт соответственно равны —1 и +1.

В этом случае

$$\hat{\theta}_i = \frac{y_i - y_0}{2},$$

$$\sigma^2\{\hat{\theta}_i\} = \frac{\sigma^2\{y\}}{2}.$$

В нашем случае с тремя независимыми переменными, ставя многофакторный опыт, мы выигрываем в дисперсии в два раза. Если бы нашей целью было, скажем, определение 15 коэффициентов регрессии, то, поставив эксперименты по схеме, аналогичной приведенной в табл. 14.3, мы получили бы выигрыш уже в 8 раз! Однофакторный эксперимент оказывается явно неэффективным, хотя в этом случае мы имеем дело с созданием условий для изучения явления, не осложненного другими физическими явлениями, именно такое действие должно соответствовать представлению о физическом эксперименте.

Можно показать, что эксперимент, проведенный по схеме, заданной в табл. 14.3, обладает и еще рядом свойств, одно из которых называется ***ротатабельностью***. Оно означает, что ***получаемое с помощью этого плана уравнение регрессии обладает тем свойством, что дисперсия оценки модели зависит только от длины радиуса, проведенного из центра эксперимента, но не от угла, под которым этот радиус проведен.***

Это свойство следует из того, что все коэффициенты регрессии оцениваются с одной и той же дисперсией, равной $\sigma^2\{y\}/N$. Применяя закон накопления ошибок к уравнению регрессии

$$\hat{\eta} = \hat{\theta}_0 + \hat{\theta}_1 x_1 + \ldots + \hat{\theta}_n x_n,$$

получаем

$$\sigma^2\{\hat{\eta}\} = \frac{\sigma^2\{y\}}{N}(1 + r^2),$$

где

$$r^2 = x_1^2 + x_2^2 + \ldots + x_n^2.$$

Если принять за меру информации величину $1/\sigma^2\{\hat{\eta}\}$, то можно утверждать, что информация, содержащаяся в уравнении регрессии, полученном для ротатабельного плана, равномерно «размазана» по сфере (в общем случае гиперсфере) с радиусом r. Исследователь не знает заранее той области факторного пространства, где находится интересующий его участок, поэтому представляется вполне разумным стремиться к такому планированию эксперимента, при котором ***количество информации, содержащейся в уравнении регрессии, одинаково для всех эквидистантных точек***.

Другое положительное свойство эксперимента, заданного табл. 14.3,

это упоминавшееся уже свойство ортогональности. В этом случае коэффициенты регрессии оцениваются независимо друг от друга. Тогда независимыми друг от друга оказываются и доверительные границы для оценок коэффициентов регрессии. Это обстоятельство имеет очень важное значение при представлении, хранении и интерпретации результатов исследования. Чтобы пояснить эту мысль, рассмотрим трудности, связанные с интерпретацией неортогонального эксперимента, т. е. такого эксперимента, для которого векторы-столбцы матрицы независимых переменных не ортогональны друг другу и, следовательно, $\mathrm{cov}\{\hat{\theta}_i\ \hat{\theta}_j\}\neq 0$. В этом случае при представлении результатов исследования приходится строить совместную доверительную область для всех коэффициентов регрессии, задаваемую многомерным эллипсоидом рассеяния. В простейшем случае, когда мы имеем дело с уравнением регрессии для одной независимой переменной и оцениваем, следовательно, два коэффициента регрессии θ_0 и θ_1 совместная доверительная область будет задаваться эллипсом рассеяния. Допустим теперь, что мы хотим для θ_0 выбрать не значение $\hat{\theta}_0$, оцененное методом наименьших квадратов, а какое-то другое, близкое к нему, т. е. попадающее в область доверительных границ, заданных эллипсоидом. Тогда этот выбор немедленно определит и доверительные границы для второго параметра. Легко представить себе, насколько эта процедура усложняется в многомерном случае. Представим себе теперь еще, что мы хотим данные, полученные по многопараметрической задаче, занести в память ЭВМ. Как это сделать — заносить туда параметры многомерного эллипсоида рассеяния? Можно, конечно, вокруг эллипсоида описать параллелепипед. Тогда запись доверительных границ упростится, но они будут далеки от реальных границ, к тому же с ростом размерности резко увеличивается грубость такой аппроксимации.

Рассмотрим еще одну трудность, связанную с неортогональностью планов. Допустим, что один исследователь построил модель кинетики химического процесса, отразив в ней какое-то множество гипотетически возможных промежуточных реакций, а другой построил для описания того же процесса несколько отличную модель, введя в нее иные, также гипотетически возможные реакции. Тогда оценки параметров, сделанные по неортогональным планам, дадут несовпадающие результаты для параметров и тех основных реакций, которые оставались неизменными в обеих моделях. Таким образом, если в наших представлениях о механизме реакции изменяются хотя бы какие-то, может быть, и не очень существенные детали, то

немедленно должны будут измениться и оценки параметров, задающих основные составляющие химического процесса.

Каждый раз, когда мы рассматриваем ту или иную математическую модель, параметры которой оценены по экспериментальным данным методом наименьших квадратов, нам надо иметь перед собой и ***ковариационную матрицу*** $(\mathbf{X}^{\mathbf{T}}\ \mathbf{X})^{-1}$. Без нее понимание модели будет неполным, а порой просто неверным. При этом коррелированность параметров в модели, доставляющая столь много неприятностей при интерпретации результатов исследования, это не свойство, присущее самому изучаемому процессу, а только следствие того, как устроена матрица **X**. ***Коррелированность параметров определяется, с одной стороны, структурой выбранной модели (а модели для описания одного и того же процесса можно выбирать по-разному) и, с другой стороны, расположением экспериментальных точек.***

Математическая статистика позволяет не только оценить некоторым наилучшим, в каком-то смысле, образом параметры модели, но и получить некоторые ***метапредставления о качестве оценок***. Из этих метапредставлений и рождается, как это детально будет показано дальше, возможность планирования, т. е. улучшения эксперимента.

И наконец, последнее. Представим себе, что исследователь ставил эксперимент так, что не очень нарушал естественно текущий ход событий в лаборатории. Тогда может оказаться что наряду с независимыми переменными $x_1, ..., x_n$ на результат эксперимента могут оказать влияние еще не регистрируемые, но спонтанно изменяющиеся переменные $z_1, ..., z_p$. При этом переменные z могут оказаться сильно закоррелированы с переменными x, и тогда все оценки (если даже они сделаны по методу наименьших квадратов) окажутся смещенными. Чаще всего с такими неприятностями приходится сталкиваться в биологических исследованиях. Представьте себе, что исследователь изучает действие некоторых условий на поведение крыс. При этом опыты ставятся так, что ежедневно некоторое количество крыс подвергается воздействию одних и тех же условий; условия воздействия меняются только при переходе от одного дня к другому. В результате такого исследования обнаружено, что один из способов воздействия необычайно эффективен — средний результат для всех крыс, испытанных за этот день, во много раз превосходит квадратичную ошибку, которой характеризуется разброс испытаний по отдельным крысам. Исследователь приходит к заключению, что он обнаружил некий бесспорный биологический феномене Но затем, много времени спустя, кто-то вдруг вздумал повторить этот опыт и ничего похожего не получил. Одно из возможных объяснений такое: в

тот злополучный день, когда был получен высокий эффект, лаборантка поссорилась дома с мужем и, придя на работу, выместила свою обиду на крысах—существах очень нервных.

Такого смещения в оценках не происходит, если эксперимент рандамизирован относительно неконтролированных условий. В рассматриваемом случае надо было бы все способы воздействия испытывать на разных крысах в течение каждого дня. Но технически это совсем не просто осуществить — удобнее в течение одного дня поставить все испытания в одних и тех же условиях. Иногда возникает здесь еще и дополнительная трудность: объектов, предназначенных для ежедневного испытания, может быть меньше, чем вариантов испытаний, И тогда возникает другая задача — ***рандомизация с наложенными ограничениями.***

Планирование эксперимента и возникло в 20—30-х годах прошлого века из потребности устранить или хотя бы уменьшить систематические ошибки в сельскохозяйственных исследованиях путем рандомизации условий проведения эксперимента. И сейчас многие книги, особенно издаваемые за рубежом, излагают представления о планировании эксперимента исходя из концепции рандомизации.

Рандомизация условий проведения эксперимента — это основное требование при постановке всякого грамотного исследования не только в биологии, но и в любой другой области знаний.

И в химических или металлургических лабораториях мы можем столкнуться с тем, что отсутствие надлежащим образом проведенной рандомизации может привести к смещенным оценкам из-за неучтенной неоднородности исходного материала или из-за неконтролируемого изменения во времени экспериментальных установок и тех или иных реагентов. Известен случай, когда в весьма высококвалифицированном собрании диссертанту при защите диссертации был задан недоуменный вопрос: как могло получиться, что при оценке параметров по двум сериям испытаний, одна из которых проводилась с планированием эксперимента, а другая без него, расхождение получилось столь большим, что вероятность его появления должна быть оценена примерно в 10^{-5}. Ответ здесь простой: процедура планирования оказалась направленной не только на уменьшение дисперсии оцениваемых параметров, но также и на рандомизацию относительно сопутствующих, спонтанно изменяющихся и неконтролируемых переменных. В результате удалось избавиться от смещения в оценках.

Рассмотрим здесь еще пример, заимствованный из практики работы

одного металлургического завода. В мартеновском процессе очень важно, чтобы содержание углерода в момент расплавления колебалось в достаточно узких пределах. Естественным было бы стремление организовать процесс плавки так, чтобы содержание углерода в момент расплавления стало регулируемой величиной. Статистический анализ результатов наблюдений показал, что содержание углерода в момент расплавления линейно зависит от основности шлака

$$v = \frac{CaO}{SiO_2}.$$

Если бы мы захотели воспользоваться этой связью для интерполяции, определяя, скажем, содержание углерода по основности, то все было бы хорошо. Но попытка воспользоваться таким соотношением для регулирования технологического процесса, оказалась неудачной. Причину этого легко удалось объяснить. Как содержание углерода (в момент расплавления), так и основность определяются одной и той же причиной—содержанием чугуна в завалке. Но эта переменная не поддается непосредственному измерению, и поэтому она не включается в уравнение регрессии. В результате в линейном уравнении, связывающем содержание углерода с основностью, коэффициент регрессии оказывается смещенным. Используя это линейное уравнение для интерполяции, мы не нарушаем внутренних связей в системе, и поэтому, несмотря на смещенную оценку, получаем правильные результаты. Однако как только будет сделана попытка использовать наше уравнение для управления процессом, так сразу же будут нарушены внутренние связи между измеряемыми и неизмеряемыми переменными в системе, и смещенность оценки приведет к бессмысленным результатам.

Особенностью рассмотренного выше примера является то, что здесь мы имеем дело с ситуацией, где действует скрытая переменная. Она не входит в матрицу независимых переменных **X** и анализ ковариационной матрицы $(\mathbf{X}^T\mathbf{X})^{-1}$ не дает никаких оснований для беспокойства. Дефектность данной модели остается скрытой. ***Такого рода ситуации являются типичными при изучении сложных систем — большая часть действующих там факторов (независимых переменных) остается недоступной для непосредственного наблюдения.*** Постановка любого активного эксперимента неизбежно нарушает в той или иной степени внутренние связи в системе и таким образом спасает исследователей в какой-то мере от смещенных оценок. Но именно поэтому активный эксперимент и труден — отсюда и понятно стремление исследователя наблюдать пассивно за некоторым установившимся процессом, а не экспериментировать активно. Рандомизированный эксперимент, если

процедура рандомизации хорошо продумана, должен полностью избавить результаты исследования от влияния скрытых переменных.

Здесь необходимо рассмотреть вопрос о логических основаниях планирования эксперимента не только с позиции рандомизации, а во всей доступной исследователю полноте.

14.2. Формализация эффективного эксперимента.

Несмотря на невозможность дать четкого определения, что есть научный эксперимент, мы все же можем достаточно четко, хотя бы на отдельных примерах, провести разграничение между эффективно и неэффективно поставленными экспериментами. И если идти дальше — необходимо попытаться формализовать наши представления об эффективном эксперименте.

Разобьем все мысленно возможные эксперименты на две группы. К одной из них отнесем те задачи, в которых нужно решить вопрос о том, как наилучшим образом ***расположить экспериментальные точки в пространстве независимых переменных***. Такие задачи будем несколько условно называть ***пространственно локализованными***, или ***статическими***.

К ***динамическим*** отнесем те задачи, в которых приходится заботиться о стратегии исследования в целом, полагая, что в этом случае исследование распадается на ***серию последовательно проводимых локальных экспериментов.***

Начнем изложение с попытки формализовать представления об эффективном статическом эксперименте. Чтобы сделать это, ***необходимо иметь возможность рассмотреть в некотором достаточно общем виде свойства всех возможных матриц планирования эксперимента в некоторой заранее заданной области пространства независимых переменных. Этому должно предшествовать задание той модели, ради оценки параметров которой ставится эксперимент.***

Таким образом, формализация наших представлений об эффективном эксперименте начинается с ***записи модели***. Ранее мы записали модель в виде полинома первой степени для трех независимых переменных и предложили для оценки ее параметров матрицу планирования эксперимента, представленную в табл. 14.3. Запишем теперь модель в виде неполного полинома второй степени для двух независимых переменных

$$\eta = \theta_0 + \theta_1 x_1 + \theta_2 x_2 + \theta_{12} x_1 x_2.$$

Для оценки параметров здесь можно предложить план эксперимента, представленный в табл. 14.4.

Таблица 14.4

Планирование эксперимента для модели с двумя независимыми переменными, включающей эффект взаимодействия между переменными

Номер опыта	Матрица коэффициентов				Результаты эксперимента
	x_0	x_1	x_2	$x_1 x_2$	
1	+1	+1	−1	−1	y_1
2	+1	−1	+1	−1	y_2
3	+1	−1	−1	+1	y_3
4	+1	+1	+1	+1	y_4

Сама матрица здесь выглядит так же, как и матрица, приведенная в табл. 14.3: по строчкам и столбцам в одном и том же порядке расставлены одни и те же элементы. Но во втором случае над последним столбцом указано, что он относится к произведению x_1x_2, т. е. служит для оценки параметра θ_{12}. Если же мы пользуемся первой моделью в случае, когда коэффициенты регрессии для эффектов взаимодействия не равны нулю, то оценки $\hat{\theta}_1$, $\hat{\theta}_2$, $\hat{\theta}_3$, полученные методом наименьших квадратов, должны будут интерпретироваться так:

$$\hat{\theta}_1 \to \theta_1 + \theta_{23}, \qquad \hat{\theta}_2 \to \theta_2 + \hat{\theta}_{13}, \qquad \hat{\theta}_3 \to \theta_3 + \theta_{12},$$

т. е. они являются оценками для сумм некоторых параметров. Здесь мы имеем дело уже со смешанными оценками: четыре опыта не дают нам возможности сделать чего-то большего, чем оценить раздельно четыре коэффициента регрессии: $\theta_0, \theta_1, \theta_2, \theta_3$. Таким образом, матрица **X** приобретает истолкование в терминах эксперимента тогда, когда она связывается с какой-либо моделью.

Выше мы рассмотрели план эффективного эксперимента для взвешивания трех объектов *a, b, c,* не приводя притом модели. На самом деле такой план можно было построить, только имея, хотя бы в уме, модель процесса взвешивания. Она в данном случае должна была бы быть записана так:

$$\eta = \theta_0 + \theta_1 x_1 + \theta_2 x_2 + \theta_3 x_3,$$

где x_i — переменные, принимающие только два значения «+1» и

«—1» в зависимости от того, помещен или не помещен взвешиваемый объект на весы. Смысл этой записи заключается в том, что признается аддитивность процедуры взвешивания, не допуская в ней существования эффектов взаимодействия. При интерпретации этой модели принимается, что

$$\theta_1 \to \frac{A}{2}, \quad \theta_2 \to \frac{B}{2}, \quad \theta_3 \to \frac{C}{2},$$

$$\theta_0 \to \frac{A+B+C}{2} + \mu_0,$$

где μ_0 — возможное смещение нулевой точки. Коэффициент θ_0 при процедуре взвешивания практически вычислять не нужно (в матрице, приведенной в табл. 14.2, даже не записан столбец, состоящий только из «+1», но в модели коэффициент θ_0 должен быть записан, чтобы она адекватно отражала результаты взвешивания по каждой строке.

Естественно было бы записать модель взвешивания трех объектов следующим образом:

$$\eta = \mu_0 + A x_1 + B x_2 + C x_3,$$

полагая, что x_i могут принимать только значения 0 (когда на весы i-тый предмет не положен) и +1, когда на весы положен соответствующий объект. Такого рода модели используются в том разделе планирования эксперимента, который называется «Планы взвешивания» (подробнее см. об этом ниже).

Теперь допустим, что мы имеем дело с моделью, нелинейной по параметрам, скажем, с экспонентой или суммой экспонент. В общем виде запишем модели такого типа следующим образом:

$$\eta=\varphi(\mathbf{x}, \boldsymbol{\theta}),$$

где **x** — вектор независимых переменных;

θ —вектор параметров модели.

Если мы хотим оценить методом наименьших квадратов параметры θ по результатам наблюдений, то нам надо будет линеаризовать нелинейную по параметрам функцию, разлагая ее в ряд Тейлора в окрестности некоторой точки $\hat{\boldsymbol{\theta}}_0$. В результате мы приходим к рассмотрению информационной матрицы $\mathbf{X}^T\mathbf{X}$, полученной из матрицы независимых переменных **X** размера $N \times k$:

$$\mathbf{X} = \{ x_{ru} \},$$

где элемент матрицы

$$x_{ru} = \left[\frac{\partial \varphi (x_u, \theta)}{\partial \theta_r} \right]_{\theta=\hat{\theta}_0}$$

есть частная производная по параметру θ_r в точке $\theta = \hat{\theta}_0$ при значениях x_{1u}, x_{2u}, ..., x_{nu}, соответствующих условиям некоторого *u*-того опыта.

Мы видим, что если модель задана нелинейно, то для оценки ее параметров нам надо опять находить матрицу $(\mathbf{X}^T\mathbf{X})^{-1}$. Однако это возможно сделать только в том случае, если известен не только вид функции, но еще и какие-то, хотя бы очень грубые оценки ее параметров. Оценки параметров в процессе эксперимента улучшаются, и в соответствии с этим должен изменяться оптимальный план эксперимента. ***В этой ситуации исследование разбивается на ряд последовательных шагов***. На каждом шаге ставится некоторое число опытов и после этого происходит переоценка коэффициентов и изменение плана. Такая стратегия планирования называется ***последовательной***.

Итак, мы видим, что при заданной модели изучаемого явления и плана, появляется возможность написать матрицу независимых переменных **X**, а затем и ковариационную матрицу $(\mathbf{X}^T\mathbf{X})^{-1}$. Последняя позволяет высказывать суждения о качестве оценок параметров изучаемой модели по результатам эксперимента. Если необходимо изменить в том или ином направлении качество оценок параметров или модели в целом, следует каким-то образом задавать матрицу **X**.

Теперь можно ответить на вопрос о том, когда возможно планирование эксперимента. ***Планирование локального эксперимента возможно во всех тех случаях, когда еще перед началом исследования можно сформулировать предварительные знания в виде математической модели.*** Практически это возможно сделать во всех случаях, когда исследователь изучает что-то, о чем он имеет хотя бы весьма смутное представление общетеоретического характера. Даже работы вспомогательного, чисто препараторского характера, требующие прежде всего определенного искусства от исследователя, могут быть представлены моделями хотя бы такого типа, как рассмотренная выше модель взвешивания. ***Для этого надо уметь выделить те факторы, которыми исследователь реально может управлять, и записать предполагаемые взаимоотношения***. Конечно, явно невозможно запилить модели для открытий, скажем, для открытия такого типа каким было открытие радиоактивности, сделанное Беккерелем. Но это открытие и появилось как нечто неожиданное и непредвиденное, а не как результат некоторого сознательного поиска.

Таким образом, мы видим, что логически продуманная постановка исследования включает в себя выбор модели, с одной стороны, и

выбор плана эксперимента, оптимального в каком-то смысле для этой модели, с другой стороны.

Решение первой из этих задач связано с глубоким знанием объекта исследования; решение второй задачи совершенно не зависит от объекта исследования.

Запись изучаемой проблемы в виде математической модели позволяет достигнуть такого уровня формализации, при котором мы можем полностью абстрагироваться от физического содержания задачи. ***К миру физической реальности исследователь должен возвращаться только на последнем этапе своего исследования — при интерпретации модели.***

Мы будем рассматривать только вторую из поставленных выше двух задач. Это позволит вести изложение в достаточно абстрактном плане, отвлекаясь почти полностью от обсуждения физического смысла при постановке задач в той или иной конкретной области знания.

Вопрос о том, как выбирать математические модели и как интерпретировать полученные с их помощью результаты исследования, надо рассматривать в книгах настоящей работы, посвященных отдельным отраслям знаний. Задача этого раздела работы — ***рассмотреть логику планирования эксперимента на том его этапе, который уже доведен до формулировки модели.***

Допустим, что дана модель изучаемого явления. Задача построения оптимальных планов эксперимента сводится к тому, что нужно (сначала на чисто логическом уровне) ***рассмотреть те требования, которыми может характеризоваться «эффективная оценка модели»; далее необходимо связать эти требования со свойствами ковариационной матрицы или информационной матрицы и в соответствии с этим найти отвечающую этим требованиям матрицу плана эксперимента. При этом заранее должна быть задана та область пространства независимых переменных, где будет ставиться эксперимент. Это может быть многомерный куб, шар, правильный симплекс или какая-нибудь совсем несимметричная область.***

Во многих случаях задача сводится просто к заданию свойств матриц некоторыми скалярными характеристиками и попытке найти связь между этими характеристиками и статистическими свойствами моделей. Так, например, естественно потребовать минимизации объема эллипсоида рассеяния оценок параметров уравнения регрессии.

Это требование, как и некоторые другие, является естественным обобщением критерия совместных эффектных оценок, введенных в математическую статистику еще Р. Фишером. Если раньше требо-

валось построить алгоритм для вычисления параметров уравнения регрессии так (см. ниже), чтобы при заданном плане эллипсоид рассеяния оценок параметров был минимальным, то теперь подобное требование предъявляется к построению плана при заданном способе обработки результатов наблюдений.

Это требование будет выполнено, если мы найдем на множестве планов с заданным числом измерений план с такой матрицей независимых переменных **X**, что детерминант матрицы $(\mathbf{X}^T\mathbf{X})$ будет максимален или, что то же—минимален детерминант ковариационной матрицы $(\mathbf{X}^T\mathbf{X})^{-1}$. ***Такие планы называются D-оптимальными.***

Таким образом, ***одно из важнейших статистических свойств модели задается всего одним числом — детерминантом матрицы.*** Однако оно полностью не определяет поведения рассеяния оценок коэффициентов регрессии —объем эллипсоида рассеяния может быть минимален, но сам эллипсоид может оказаться слишком вытянутым по одной из своих осей. ***Если исследователь хочет минимизировать максимальную ось эллипсоида рассеяния, то он должен суметь построить такую матрицу плана, которой бы соответствовала ковариационная матрица с минимальным значением максимального характеристического числа. Это будет так называемый E-оптимальный план.*** Исследователь может потребовать, чтобы ***минимальной была средняя дисперсия оценок коэффициентов регрессии. Этому требованию соответствуют эллипсоиды рассеяния с наименьшей суммой квадратов длин осей. Соответствующие планы называются A-оптимальными; им соответствуют ковариационные матрицы, с наименьшим значением следа.***

Здесь не будут перечисляться все те требования, которые можно предъявить к планам эксперимента, отвечающим нашим представлениям о том, что такое эффективный эксперимент. Подробно об этом будет рассказано в следующем разделе. Здесь важно отметить только то , что, как правило (за исключением некоторых очень простых моделей), нельзя предложить плана, который бы отвечал одновременно всем или хотя бы важнейшим критериям оптимальности. ***Нужно искать компромиссное решение.*** В этом состоит важнейшая задача планирования эксперимента. Чтобы выполнить ее, приходится, пользуясь численными методами, строить планы, соответствующие какому-нибудь одному критерию, а затем оценивать для этих планов численные характеристики, соответствующие другим критериям, и в завершение — выбирать на множестве всех планов наилучшее компромиссное решение.

Эту задачу возможно решить только частично. Трудность здесь состоит в том, что не все желательные свойства планов можно хорошо оценить численно. Если мы, например, имеем дело с *D*-оптимальностью, то здесь все обстоит вполне благополучно. Достаточно найти для некоторых заданных условий *D*-оптимальный план и тогда для любого другого плана, построенного в той же области значений независимых переменных, мы можем оценить отклонение от *D*-оптимальности (отклонение от минимального значения определителя $|(\mathbf{X}^{\mathrm{T}}\mathbf{X})^{-1}N|$), и эта оценка даст вполне четкое представление о том, насколько увеличился объем эллипсоида рассеяния. Таким образом, появляется возможность оценивать с позиций оптимальности планы, построенные в соответствии с какими-нибудь другими требованиями.

Ничего подобного нельзя сделать с ***критерием ортогональности***. Для ортогонального плана можно задать четкую числовую меру: отношение $\Pi c_{ii}/|\mathbf{X}^{\mathrm{T}}\mathbf{X})^{-1}|$, где c_{ii} — диагональные элементы матрицы $(\mathbf{X}^{\mathrm{T}}\mathbf{X})^{-1}$ должно быть равно единице. Но вот отклонение значения этого отношения от единицы для неортогональных планов мало что говорит, ибо здесь одно и то же числовое значение отклонения может характеризовать планы, в которых один раз какой-нибудь один коэффициент регрессии (скажем $\hat{\theta}_0$) будет сильно закоррелирован только со всеми коэффициентами типа $\hat{\theta}_{ii}$, в другой раз — план, в котором все коэффициенты регрессии, хотя и в меньшей степени, будут закоррелированы друг с другом.

Ясно, что при интерпретации модели мы будем иметь дело с существенно различными ситуациями. Не удается придумать такую компактную меру неортогональности, которая бы отчетливо характеризовала степень коррелированности различных параметров в модели.

Выше уже говорилось о том, что ***матрица независимых переменных X появляется только после того, как оказывается заданной модель***. Ясно, что для описания одного и того же явления можно задать несколько моделей, но не для всех моделей, описывающих одинаково хорошо одно и то же явление, можно построить планы, дающие достаточно слабую коррелированность параметров. Рассмотрим в качестве примера хорошо известное уравнение Аррениуса

$$k = k_0 e^{-\frac{E}{RT}},$$

где k — зависимая переменная — константа скорости реакции;
R — универсальная газовая постоянная;
T — температура;
K_0 и E — параметры модели, подлежащие оценке из экспериментальных данных.

Поскольку обычно переменная T изменяется не более чем на 10—15% от среднего, в интервале возможного изменения информационная матрица для линеаризованной модели всегда оказывается близкой к вырожденной. Это многократно отмечается в ряде работ. Вырожденный, или точнее почти вырожденный, характер матрицы $\mathbf{X}^T\mathbf{X}$ приводит к овражному характеру поверхности для сумм квадратов отклонений, что значительно осложняет поиск оценок параметров. Числовые значения коэффициентов корреляции оценок этих параметров могут доходить до 0,97 и 0,98. Возникающие при этом трудности в интерпретации модели уже рассматривались выше.

В этом случае рекомендуется репараметризация, т. е. переход к новой модели:

$$k = k_0\left(\tilde{T}\right) e^{-\frac{E}{R}\left(\frac{1}{T}-\frac{1}{\tilde{T}}\right)},$$

где $\tilde{T}$ — некоторое среднее значение температуры;
$k_0(\tilde{T})$—«средняя» константа, т. е. новый параметр

$$k_0(\tilde{T}) = k_0 e^{-\frac{E}{RT}},$$

Параметры $k_0(\tilde{T})$ и E оказываются закоррелированными слабее, коэффициент корреляции при подходящем выборе плана удается снизить до 0,5 и в соответствии с этим резко сужаются совместные доверительные границы. Но экспериментаторам часто все же не нравится введение новой непривычной константы — это затрудняет привычную интерпретацию, и, кроме того, новые результаты оказываются несовместимыми со старыми.

Таким образом, даже при ***изучении одного и того же явления возможности построения хорошего плана эксперимента определяются выбором модели***.

Планирование эксперимента само по себе не может улучшить физический смысл модели, оно улучшает только ее статистические свойства.

Если, скажем, исследователь при изучении кинетики химического процесса неверно записал промежуточные, непосредственно не измеряемые реакции, то планирование даст ему только возможность

оценить некоторым наилучшим образом параметры этой неверно записанной модели. Эта модель может даже оказаться в статическом смысле очень эффективной, если ее использовать для целей интерполяции. Дефектность ее может выявиться только при экстраполяции. Но во многих случаях ***модели строятся для того, чтобы знать то направление в пространстве независимых, переменных, куда нужно двигаться дальше, чтобы получить наиболее благоприятные результаты.***

Планирование эксперимента может использоваться и для дискриминации конкурирующих гипотез, т. е. для выбора лучшей из нескольких, предложенных априори. И здесь, если даже и говорится о том, что ведется поиск модели, задающей механизм явления, на самом деле с помощью планирования эксперимента отбирается только та модель, которая обладает наилучшей интерполяционной силой в области, отведенной для исследования (подробнее о критериях в дискриминирующих экспериментах будет сказано ниже). Формализация наших представлений об эксперименте и введение в обиход таких понятий, как «эффективность плана», «выбор оптимальной модели», не должны затуманивать реального физического смысла того, что мы при этом имеем в виду.

Рассмотрим вопрос об общей постановке задачи при втором подходе, когда речь идет о стратегии в целом. Здесь затруднительно сформулировать какие-либо достаточно общие высказывания. При первой постановке задачи, когда мы рассматривали статические оптимальные планы, все было достаточно ясно: перед нами была модель — цель нашего исследования, и мы могли составить матрицы $\mathbf{X}$ и соответственно $(\mathbf{X}^{\mathrm{T}}\mathbf{X})/N$ и $(\mathbf{X}^{\mathrm{T}}\mathbf{X})^{-1}N$. После этого сразу становилось ясно, в каких терминах можно вести разговор о том, что есть эффективный эксперимент. Высказывания сразу приобрели достаточно общий характер. Когда же речь идет о динамических задачах — о стратегии всего исследования, таких возможностей у нас нет. Приходится каждый раз придумывать какую-то свою, подходящую для данного конкретного случая систему действий, записывать ее на математическом языке. Но существует достаточно много хорошо продуманных высказываний о стратегиях исследования в широкой постановке задачи, идейное содержание которых изложено в последующих разделах.

14.3. Критерий оптимальности планов

14.3.1. Основные определения

Допустим, что наши знания об изучаемом явлении оказалось возможным формализовать в такой степени, что мы смогли записать математическую модель. ***Задача эксперимента, как об этом говорилось выше, тогда сведется к оценке параметров модели.*** Эксперимент надо поставить так, чтобы параметры можно было оценить некоторым наилучшим способом. Мы хотим получить «эффективную» модель в статистическом смысле этого слова. Свойство модели быть эффективной нельзя задать одним требованием. Ниже мы рассмотрим все то многообразие требований, которое можно предъявить к эффективной модели. Эти требования будем называть ***критериями оптимальности плана***. Изложение материала дальше будет идти на математическом языке; здесь в более строгой форме мы формулируем и то, о чем говорилось выше. При этом мы должны будем ввести ряд новых понятий, на которых строится эта область знаний.

Предположим, что связь между измеряемой величиной $y(\mathbf{x})$ и контролируемыми переменными x_i (факторами) может быть записана в виде функции

$$E\{y(\mathbf{x})\} = \eta(\mathbf{x}, \theta), \tag{14.1}$$

где $E\{y(\mathbf{x})\}$—математическое ожидание величины $y(\mathbf{x})$, измеренной в точке с координатами $\mathbf{x}^T = (x_1, \ldots, x_n)$.

Ошибки измерений независимы и имеют нулевое математическое ожидание. Функция $\eta(\mathbf{x}, \theta)$ зависит от неизвестных параметров $\theta_1, \ldots, \theta_k$. Функцию $\eta(\mathbf{x}, \theta)$ назовем ***математической моделью*** изучаемой зависимости, или ***функцией отклика***. Геометрический образ, соответствующий функции отклика, назовем ***поверхностью отклика***. Основное внимание мы здесь уделим моделям представляющим собой линейные функции неизвестных параметров θ_i; будем называть их ***линейными моделями***. Такую модель запишем в следующем виде:

$$E\{y(\mathbf{x})\} = \eta(\mathbf{x}, \theta) = f_1(\mathbf{x})\theta_1 + \ldots + f_k(\mathbf{x})\theta_k = \mathbf{f}^T(\mathbf{x})\theta, \tag{14.2}$$

где $\mathbf{f}^T(\mathbf{x}) = (f_1(\mathbf{x}), \ldots, f_k(\mathbf{x}))$ — вектор известных функций от независимых переменных.

Если аналитическое выражение функции $\eta(\mathbf{x}, \theta)$ нам неизвестно, т. е. исследование ведется при неполном знании механизма изучаемых

явлений, то иногда приходится ограничиваться представлением ее полиномом

$$\eta(x,\theta)=\theta_0+\sum_{i=1}^{n}\theta_i x_i+\sum_{\substack{i,j=1\\(i<j)}}^{n}\theta_{ij}x_i x_j+\sum_{i=1}^{n}\theta_{ii}x_i^2+\ldots \tag{14.3}$$

Модель такого типа—это частный случай линейных моделей (14.2). Будем считать, что выбранная модель справедлива в некоторой заданной области изменения независимых переменных $\mathfrak{X}$. Эту область будем называть ***областью планирования***.

Предположим, что мы имеем *N* результатов измерений величины *y* для тех значений независимых переменных x_i, которые не выходят за пределы области планирования $\mathfrak{X}$. Для получения оценок неизвестных параметров θ_i модели (14.2) будем использовать метод наименьших квадратов. Этот метод можно предпочесть другим, так как он позволяет получить ***лучшие линейные оценки параметров***.

Обозначим через $\hat{\theta}$ вектор оценок параметров по методу наименьших квадратов, а через $\tilde{\theta}$ — вектор линейных несмещенных оценок, полученных любым методом. (Напомним, что линейными оценками называются оценки, представляющие собой линейные функции наблюдений *y;* оценки $\hat{\theta}_i$ называются несмещенными, если их математические ожидания равны истинным значениям параметров θ_i.) Пусть матрица $\mathbf{D}_{\hat{\theta}}$ будет ковариационной матрицей оценок параметров.

При заданном плане измерений наилучшие линейные оценки параметров обладают среди всех линейных несмещенных оценок наименьшей ковариационной матрицей:

$$\mathbf{D}_{\hat{\theta}}=\mathbf{D}_{\tilde{\theta}}-\mathbf{d}, \tag{14.4}$$

где **d** — некоторая неотрицательно определенная матрица.

Более кратко это можно записать так:

$$\mathbf{D}_{\hat{\theta}}\leqslant\mathbf{D}_{\tilde{\theta}}. \tag{14.5}$$

Вследствие этого наилучшие линейные оценки имеют наименьшую обобщенную дисперсию, или определитель ковариационной матрицы:

$$\left|\mathbf{D}_{\hat{\theta}}\right|\leqslant\left|\mathbf{D}_{\tilde{\theta}}\right|, \tag{14.6}$$

а также наименьшую среднюю дисперсию или след этой матрицы:

$$\frac{1}{k}\ \mathrm{tr}\ \mathbf{D}_{\hat{\theta}} \leqslant \frac{1}{k}\ \mathrm{tr}\ \mathbf{D}_{\tilde{\theta}}. \tag{14.7}$$

Теперь предположим, что мы имеем возможность выбирать не только метод обработки, но и координаты точек, в которых могут быть поставлены наблюдения, т. е. мы можем ***планировать*** измерения. Имеющиеся в нашем распоряжении N измерений мы можем осуществить в любых точках области $\mathfrak{X}$; в некоторых точках можно доставить не одно, а насколько, наблюдений.

<u>Планом</u> будем называть множество точек x_i (i=1,...,m) в области $\mathfrak{X}$, в которых производятся наблюдения (<u>спектр плана</u>) и соответствующие им значения m_i— число наблюдений в каждой из этих точек.

Общее число наблюдений есть

$$N = \sum_{i+1}^{m} m_i.$$

План будем обозначать через ε. Можно записать:

$$\varepsilon = \begin{Bmatrix} \mathbf{x}_1, \ldots, \mathbf{x}_m \\ m_1, \ldots, m_m \end{Bmatrix}, \quad \sum_{i=1}^{m} m_i = N. \tag{14.8}$$

Введем еще понятие ***нормированного плана***.

<u>Нормированный план</u> ε — это совокупность спектра плана и относительного веса, доли наблюдений в каждой из точек спектра:

$$e = \begin{Bmatrix} \mathbf{x}_1, \ldots, \mathbf{x}_m \\ p_1, \ldots, p_m \end{Bmatrix}, \quad p_i = \frac{m_i}{N}, \quad \sum_{i=1}^{m} p_i = 1. \tag{14.9}$$

Введем теперь некоторые обозначения. Можно показать, что при заданном плане метод наименьших квадратов приводит к получению лучших линейных оценок $\hat{\theta}$ вектора параметров θ по формуле

$$\hat{\theta} = \left(\mathbf{X}^{\mathrm{T}}\mathbf{X}\right)^{-1}\mathbf{X}^{\mathrm{T}}\mathbf{Y}, \tag{14.10}$$

где **Y** — вектор наблюдений в точках плана;

X — матрица значений функций $f_i(\mathbf{x})$ в точках плана, т. е. матрица с элементами:

$$x_{lj} = f_j(\mathbf{x}_l).\ (l=1.....N;\ j=1.....k). \tag{14.11}$$

Матрица **X** называется ***матрицей коэффициентов***, или ***матрицей независимых переменных.***

Особую роль в планировании эксперимента играет ***информационная матрица*** плана $\mathbf{A}=\mathbf{X}^{\mathrm{T}}\mathbf{X}$ с элементами

$$a_{ij} = \sum_{l=1}^{m} m_l f_i(x_l) f_j(x_l). \tag{14.12}$$

Матрица $\mathbf{M} = \frac{1}{N}\mathrm{A}$ называется ***нормированной информационной матрицей.***

Ковариационная матрица лучших линейных оценок параметров записывается как $\sigma^2\mathbf{A}^{-1}$, где σ^2 — дисперсия ошибки опыта. ***Нормированная ковариационная матрица*** — это матрица $\sigma^2\mathbf{M}^{-1}$; обозначим ее через $\sigma^2\mathbf{D}$. Дисперсию оценки модели $\hat{\eta}$ теперь можно представить в виде:

$$\sigma^2\{\hat{\eta}\} = \sigma^2 \mathbf{f}^{\mathrm{T}}(\mathbf{x})\,\mathbf{A}^{-1}\,\mathbf{f}(\mathbf{x}) = \sigma^2 N^{-1}\mathbf{f}^{\mathrm{T}}(\mathbf{x})\,\mathbf{D}\,\mathbf{f}(\mathbf{x}), \tag{14.13}$$

обозначив $\mathbf{f}^{\mathrm{T}}(\mathbf{x})\mathbf{D}\mathbf{f}(\mathbf{x}) = d(\mathbf{x})$, можно записать

$$\sigma^2\{\hat{\eta}\} = \sigma^2 N^{-1} d(\mathbf{x}). \tag{14.14}$$

Таким образом, мы видим, что дисперсия оценки модели с точностью до константы равна $d(\mathbf{x})$. Заметим что для линейных моделей информационная и ковариационная матрицы зависят только от выбора координат точек плана и не зависят от истинных значений оцениваемых параметров. Что же именно нужно учитывать при выборе плана? На какие свойства оценок необходимо опираться здесь, формируя некоторые критерии оптимальности?

14.3.2. Список критериев

Предположим, что модель мы выбрали правильно, т. е. в измерениях отсутствует систематическая ошибка относительно данной модели. Это значит, что при выборе критерия оптимальности основное внимание следует обратить на случайную ошибку. Нас интересует точность самих оценок параметров, которая полностью описывается их ковариационной матрицей, а также точность оценки модели в интересующей нас области, которая представляет собой функцию (14.14), зависящую от ковариационной матрицы оценок. Поэтому ясно, что ***критерии оптимальности плана должны определять некоторые желательные свойства ковариационной (или обратной ей информационной) матрицы.***

Здесь можно обратиться к свойствам лучших линейных оценок и потребовать, чтобы выбираемый нами план был «эффективней» других планов, т. е. чтобы ему соответствовала «наименьшая» ковариационная матрица [свойство, аналогичное (14.5)]. Но, как правило, не удается найти планов, имеющих «минимальную» ковариационную матрицу, поэтому план приходится характеризовать некоторым скалярным функционалом матрицы. В частности, можно потребовать, например, чтобы свойства, аналогичные свойству (14.6) или (14.7), выполнялись бы на множестве планов.

Здесь будет рассмотрено несколько статистических критериев оптимальности планов, которые в этом смысле являются как бы логическим «развитием» свойств лучших линейных оценок. Мы будем рассматривать также некоторые статистические критерии, которые и не имеют подобной логической связи со свойствами лучших линейных оценок, но тем не менее, формулируя их, мы требуем улучшения некоторых статистических свойств модели.

Разобьем все статистические критерии на две большие группы. К первой группе отнесем критерии, связанные с ***точностью оценок параметров***, ко второй — критерии и свойства планов, связанные с ***ошибкой в оценке модели***.

Свойствам оценок параметров можно дать наглядное геометрическое истолкование, связав эти свойства со свойствами их эллипсоида рассеяния. Пусть величины $\hat{\theta}_1,\ldots,\hat{\theta}_k$ имеют распределение с математическим ожиданием θ и центральными моментами второго порядка $c_{ij}(i, j=1,\ldots,k)$. Рассмотрим k-мерный эллипсоид, центр которого совпадает с 0. Допустим, что плотность распределения вероятности в этой области постоянна. Моменты второго порядка этого распределения можно подобрать таким образом, чтобы они совпадали с c_{ij}. Величины θ и c_{ij} $(i, j=1,\ldots,k)$ определяют параметры эллипсоида, который называется ***эллипсоидом рассеяния***. Для данного метода оценки (в нашем случае наилучшие линейные оценки) ориентировка, форма и объем этого эллипсоида будут полностью зависеть от плана. Сначала остановимся на критериях первой группы.

D-оптимальность. В теоретических исследованиях по планированию эксперимента большое внимание уделяется критерию D-оптимальности (по начальной букве слова determinant). Планам ε^*, оптимальным по этому критерию, соответствует наименьший на множестве планов определитель ковариационной матрицы

$$|\mathbf{D}(\varepsilon^*)| = \min_{\varepsilon} |\mathbf{D}(\varepsilon)|. \qquad (14.15)$$

Эллипсоид рассеяния оценок параметров для *D*-оптимального плана имеет минимальный объем. Этому критерию оптимальности планов уделено много внимания в математической литературе. Для некоторых типов моделей разработаны методы построения *D*-оптимальных планов. Критерию *D*-оптимальности уделено особое внимание в работах американского математика Кифера и его школы. Кифер доказал наиболее общие положения, касающиеся связи критерия *D*-оптимальности с некоторыми другими и разработал отдельные способы построения *D*-оптимальных планов.

A-оптимальность. Планам, отвечающим критерию *A*-оптимальности (название происходит от выражения average variance, т. е. средняя дисперсия оценок), соответствует эллипсоид рассеяния с наименьшей суммой квадратов длин осей. В этом случае параллелепипед, описанный около эллипсоида рассеяния, имеет наименьшую длину диагонали. Этому критерию отвечают планы с минимальной средней дисперсией оценок коэффициентов, или с наименьшим значением следа (trace) ковариационной матрицы:

$$\operatorname{tr} \mathbf{D}(\varepsilon^*) = \min_{\varepsilon} \operatorname{tr} \mathbf{D}(\varepsilon). \tag{14.16}$$

E-оптимальность. *E*-оптимальным планам соответствует наименьшее максимальное собственное значение (eigen value) ковариационной матрицы

$$\lambda_{\max}\left(\mathbf{D}(\varepsilon^*)\right) = \min_{\varepsilon} \max_{i} \lambda_i \left(\mathbf{D}(\varepsilon)\right), \tag{14.17}$$

где λ_i — собственное значение матрицы $\mathbf{D}(\varepsilon)$. Выбирая этот критерий, мы как бы не допускаем, чтобы отдельные оценки параметров имели слишком большие дисперсии и ковариации. Геометрически таким планам соответствует эллипсоид рассеяния с наименьшей максимальной осью.

Ортогональность. К первой группе критериев можно отнести такой критерий, как ортогональность плана.

План называется ортогональным, если ему соответствует диагональная ковариационная (информационная) матрица.

Для ортогональных планов все оценки параметров независимы; эллипсоид рассеяния ориентирован таким образом, что направления его главных осей совпадают с направлениями координатных осей в пространстве параметров. Можно попытаться количественно оценить близость заданного плана к ортогональному с помощью некоторой скалярной функции матрицы $\mathbf{D}(\varepsilon)$. В качестве такой функции можно

было бы выбрать, как об этом уже говорилось выше, величину

$$\prod_{i=1}^{k} c_{ii} / |\mathbf{D}|,$$

(где c_{ij} — элемент $\mathbf{D}(\varepsilon)$). Для ортогональных планов эта величина равна единице. Но такая функция не позволяет различать планы, дающие, например малую закоррелированноеть оценкам многих параметров и значительную закоррелированность оценкам двух или трех параметров. Практически для оценки ортогональности можно пользоваться функцией max $|\rho_{ij}|$ $(i \neq j)$, где ρ_{ij} — коэффициент корреляции оценок параметров регрессии, т. е. характеризовать отличие плана от ортогонального максимальным коэффициентом корреляции или функцией

$$\left(\sum_{i,j} \rho_{ij}^2 / k - 1\right).$$

Но ни одна из этих функций не позволяет дать представление о структуре корреляционной матрицы оценок параметров.

Рассмотрим теперь критерии оптимальности второй группы, связанные с ошибкой оценки поверхности отклика.

G-оптимальность.(*G* -оптимальные планы (название происходит от выражения general variance — общая дисперсия) минимизируют на множестве планов максимальное значение дисперсии оценки модели, или величины $d(\mathbf{x}, \varepsilon)$ [см. (14.13)], план ε^* *G*-оптимален, если

$$\max_{\mathbf{x}} d(\mathbf{x}, \varepsilon^*) = \min_{\varepsilon} \max_{\mathbf{x}} d(\mathbf{x}, \varepsilon). \tag{14.18}$$

Применение *G*-оптимального плана как бы дает экспериментатору гарантию, что в области планирования не окажется точек, в которых точность оценки поверхности отклика слишком низкая.

Q-оптимальность. Можно требовать от плана минимизации средней дисперсии оценки поверхности отклика; план ε^* навивается *Q*-оптимальным, если

$$\int_{\mathfrak{X}} d(\mathbf{x}, \varepsilon^*)\, d\mathbf{x} = \min_{\varepsilon} \int_{\mathfrak{X}} d(\mathbf{x}, \varepsilon)\, d\mathbf{x}. \tag{14.19}$$

Оптимальность планирования для экстраполяции. Два последних критерия можно записать в более общем виде, потребовав выполнения этих же условий в некоторой области $\mathfrak{Y}$, не обязательно совпадающей с областью планированиях $\mathfrak{X}$. В частности, если $\mathfrak{Y} \Phi \mathfrak{X}$, эти критерии будут критериями оптимальности для решения задачи экстраполяции.

Ротатабельность. План называется ротатабельным, если дисперсия оценки модели может быть представлена как функция

расстояния до центра эксперимента, т. е. можно записать $d(\mathbf{x},\varepsilon)=d_1(r,\varepsilon)$, где

$$r=\sum_{i=1}^{k} f_i(\mathbf{x})\,\theta_i.$$

Выполнение этого условия делает любое направление от центра эксперимента равнозначным в смысле точности оценки поверхности отклика. Если «информационные контуры» плана представить как поверхности с равными значениями дисперсии оценки поверхности отклика, то для ротатабельного плана эти поверхности будут представлять собой ***сферы***.

Максимальная точность оценки координат экстремума. Иногда выдвигается такое требование, как максимальная точность оценки координат точки экстремума

$$d(\mathbf{x}_э,\ \varepsilon^*)=\min_{\varepsilon} d(\mathbf{x}_э,\ \varepsilon), \tag{14.20}$$

где $\mathbf{x}_э$ — координаты экстремума оценки поверхности отклика.

Как правило, при изучении поверхности отклика необходимыми этапами бывают и построение модели, и ее последующее исследование, в частности определение или уточнение положения точек экстремума. Для построения планов, минимизирующих дисперсию оценки поверхности отклика в области экстремума, необходимо иметь предварительную грубую оценку его положения.

Униформность. Это критерий, требующий, чтобы дисперсия оценки модели в некоторой области вокруг центра эксперимента была практически постоянной.

Рассмотрим теперь критерий оптимальности, пользуясь которым мы вместе со случайной ошибкой учитываем и систематическую погрешность, обусловленную сознательным выбором заведомо упрощенной модели. Допустим, что вид истинной модели по некоторым априорным сведениям нам известен. Пусть это будет некоторая функция $\eta(\mathbf{x})$. Но мы можем построить в заданной области несколько другую, более простую модель; запишем ее в виде

$$\sum_{i=1}^{k} f_i(\mathbf{x})\,\theta_i$$

Рассмотрим следующий обобщенный критерий оптимальности планов.

Минимизация среднеквадратической систематической и случайной ошибки. Можно потребовать минимизации общего, случайного и систематического средне-квадратического отклонения

оценки выбранной модели от истинной. Тогда оптимальный план ε* минимизирует на множестве планов выражение

$$\sum_{i=1}^{R} f_i(\mathbf{x})\,\theta_i$$

В качестве модели $\sum_{i=1}^{R} f_i(\mathbf{x})\,\theta_i$ может быть выбран, например, полином степени *d,* в то время как истинная модель, по нашим предположениям, представляет собой полином степени *d+1*.

Оптимальность планирования для проверки гипотезы о неадекватности модели. Иногда же, наоборот, план может выбираться так, чтобы по возможности в лучших условиях проверить гипотезу о неадекватности модели, если мы предполагаем, что в области планирования верна некоторая более сложная модель.

Почти всегда можно предполагать, что на изучаемое явление влияют некоторые факторы, которые мы не регистрируем в процессе исследования. Как правило, изменение уровней этих «мешающих» факторов в течение всего эксперимента имеет некоторый систематический характер. Допустим, мы будем ставить опыты в эксперименте так, что характер изменения независимых переменных также будет иметь некоторый неслучайный характер, например в первой половине всех измерений один из факторов x_1 будет зафиксирован на верхнем уровне, а во второй половине на нижнем. В этом случае можно получить некоторый ложный эффект, который будет фактически обусловлен влиянием «мешающих» факторов, но будет отнесен к эффекту фактора x_1. Если же сознательно будет вноситься элемент случайности в очередность измерений, то влияние неконтролируемых факторов сведется к некоторому увеличению случайного разброса, т. е. к увеличению дисперсии одного наблюдения. Поэтому можно записать еще один критерий оптимальности планирования.

Рандомизация. Это случайный порядок проведения измерений. Решение о необходимости рандомизации может повлиять и собственно на выбор точек плана, так как иногда может оказаться, что выбор определенных условий измерений ограничивает возможность рандомизации. Рандомизация может производиться не только для исключения влияния переменных, неконтролируемым образом изменяющихся во времени, но также и для исключения влияния переменных, изменяющихся неконтролируемым образом в пространстве, например неоднородности материала, подлежащего исследованию.

Мы привели список критериев, отражающих наяболее существенные требования, которые можно предъявить к планам, желая получить хорошую в статистическом смысле модель изучаемого явления.

Остановимся теперь на некоторых свойствах планов, которые нельзя рассматривать как основные критерии оптимальности планирования, но, как показывает практика, выполнение которых весьма желательно. ***Эти свойства не улучшают качеств самой модели, а лишь только упрощают процедуру проведения исследования.***

Насыщенность. Очень часто существенным является требование, чтобы план содержал небольшое число измерений. Если число измерений равно числу неизвестных параметров, которые нужно оценить, то план называется ***насыщенным;*** планы с меньшим числом измерений не позволяют найти единственные оценки всех параметров. Обычно на практике используются планы, по числу измерений, близкие к насыщенным.

Композиционность. Это свойство, позволяющее разделить эксперимент на несколько этапов и постепенно переходить от ***простых моделей к более сложным***, используя предыдущие наблюдения. Например, сначала ставится план для оценки коэффициентов полинома первого порядка; при этом желательно, чтобы, кроме невырожденности, план обладал и другими оптимальными свойствами. В случае необходимости на втором этапе к имеющемуся плану добавляется несколько наблюдений, так что все вместе они дают возможность оценить все коэффициенты полиномиальной модели второго порядка и т. д.

14.3.3. Связь между критериями и свойствами планов.

Остановимся теперь на вопросе о связи между различными критериями оптимальности и свойствами планов. Чтобы дать по возможности полное представление о такой связи, необходимо несколько расширить понятие плана. Введем понятие ***непрерывного плана.***

В начале этого раздела мы говорили о нормированных планах с заданным числом наблюдений N. В таких планах

$$p_i = \frac{m_i}{N},$$

т. е. числа p_i должны быть такими, чтобы значения $p_iN=m_i$ были целыми, поскольку мы не можем в точках плана делать дробное число измерений. Откажемся теперь от этого условия и будем считать, что веса могут быть и иррациональными числами. Обозначим эти новые

веса через ξ_i; соответствующие планы будем называть ***непрерывными***. Таким образом, непрерывный план можно записать так:

$$\xi = \begin{Bmatrix} \mathbf{x}_1, \ \dots, \ \mathbf{x}_m \\ \xi_1, \ \dots, \ \xi_m \end{Bmatrix}, \ \sum_{i=1}^{m} \xi_i = 1, \tag{14.22}$$

где ξ_i — не обязательно рациональные числа.

Можно и еще больше расширить понятие плана и считать непрерывным планом любую вероятностную меру, заданную на множестве $\mathfrak{X}$. Понятие непрерывного плана ввел американский математик Дж. Кифер. Ему принадлежат важные результаты в теории планирования эксперимента, касающиеся вопросов связи между критериями и методов построения оптимальных планов.

Основополагающим достижением в развитии теории планирования эксперимента оказалась теорема Кифера — Вольфовица об эквивалентности непрерывных *D* и *G*-оптимальных планов. Эта теорема справедлива практически для любого множества зкепериментирования $\mathfrak{X}$ и для всех непрерывных функций $f_i(\mathbf{x})$. Приведем здесь формулировку этой теоремы.

Теорема: План ξ^* *D*-оптимален тогда и только тогда, когда он *G*-оптимален и тогда и только тогда, когда :

$$\max_{\mathbf{x}} d(\mathbf{x}, \xi^*) = k, \tag{14.23}$$

где *k* — число неизвестных параметров модели.

На множестве планов с заданным значением *N* (иначе они называются ***точными планами)*** эта теорема выполняется только приближенно. Эта теорема была доказана в I960 г.; сейчас ее можно рассматривать как частный случай более общих положений, доказанных в работах Кифера, Федорова, Федорова и Малютова и др. Остановимся коротко на некоторых результатах в теории непрерывных планов.

Функционал $|\mathbf{D}(\xi)|$, который минимизируется на множестве непрерывных планов при получении *D*-оптимальных планов, представляет собой выпуклый функционал матрицы $\mathbf{D}(\xi)$. Будем рассматривать всевозможные выпуклые функционалы ковариационных матриц Ф ($\mathbf{D}(\xi)$). Под линейной комбинацией планов ξ_1 и ξ_2 с коэффициентами α и 1—α, $0 \le \alpha \le 1$ будем понимать новый план ξ_α, такой, что спектр его содержит спектры планов ξ_1 и ξ_2, а веса точек этих спектров умножаются соответственно на α и на 1 —α. Свойство выпуклости функционала $\Phi(\mathbf{D}(\xi))$ означает, что для любых планов ξ_1 и ξ_2 и для любых $0 \le \alpha \le 1$ должно выполняться неравенство

$$\Phi\left(\mathbf{D}\left(\xi_{\alpha}\right)\right) \leqslant \alpha \Phi\left(\mathbf{D}\left(\xi_{1}\right)\right)+(1-\alpha) \Phi\left(\mathbf{D}\left(\xi_{2}\right)\right). \quad (14.24)$$

Заметим, что почти все функционалы, на которых основаны перечисленные выше критерии оптимальности, представляют собой выпуклые функционалы ковариационных матриц. Планы, минимизирующие функционал $\Phi(\mathbf{D}(\xi))$, будем называть Ф-оптимальными. В.В. Федоровым доказана теорема об эквивалентности Ф-оптимальных планов и планов, которые минимизируют максимум некоторой функции $\varphi_{\phi}(\mathbf{x}, \xi)$ от переменных $\mathbf{x}$ в области $\mathfrak{X}$. Функция $\varphi_{\phi}(\mathbf{x}, \xi)$ полностью определяется видом функционала $\Phi(\mathbf{D}(\xi))$. При этом от функционала $\Phi(\mathbf{D}(\xi))$, кроме свойства выпуклости, требуется еще выполнение некоторых свойств, которые для интересующих нас критериев также выполняются. Приведем, например функции $\varphi_{\phi}(\mathbf{x}, \xi)$, которые соответствуют таким критериям, как *D*-, *A*- и *Q*-оптимальность :

Функционал $\Phi\left(\mathbf{D}\left(\xi\right)\right)$	*Функция* $\varphi_{\Phi}(\mathbf{x}, \xi)$
$\lvert \mathbf{D}(\xi) \rvert$	$\mathbf{f}^{\mathrm{T}}(x)\, \mathbf{D}(\xi)\, \mathbf{f}(\mathbf{x}) = d(\mathbf{x}, \xi)$
$\mathrm{tr}\, \mathbf{D}(\xi)$	$\mathbf{f}^{\mathrm{T}}(\mathbf{x})\, \mathbf{D}^{2}(\xi)\, \mathbf{f}(\mathbf{x})$
$\int_{\mathfrak{X}} \mathbf{f}^{\mathrm{T}}(\mathbf{x})\, \mathbf{D}(\xi)\, \mathbf{f}(\mathbf{x})\, d\mathbf{x}$	$\mathbf{f}^{\mathrm{T}}(\mathbf{x})\, \overline{\mathbf{M}}\, \mathbf{D}(\xi)\, \mathbf{f}(\mathbf{x})$, где $\overline{\mathbf{M}} = \int_{\mathfrak{X}} \mathbf{f}(\mathbf{x}) \mathbf{f}^{\mathrm{T}}(\mathbf{x})\, d\mathbf{x}$.

Эта теорема представляет собой основу для создания ***алгоритмов построения непрерывных оптимальных планов***. Такие алгоритмы были предложены в работах Федорова. Непосредственная оптимизация функционала $\Phi(\mathbf{D}(\xi))$ на множестве планов представляет собой задачу поиска экстремума в пространстве размерности не более чем

$$(k+1)\,\frac{n\,(n+1)}{2}.$$

Для отдельных частных случаев размерность может быть значительно снижена, но, как правило, она всегда остается слишком высокой даже для современных вычислительных машин. В ряде работ предложены алгоритмы, позволяющие свести задачу построения Ф-оптимальных планов к последовательности задач поиска экстремума в пространстве размерности *n*. На каждом шаге итерационной процедуры добавляется некоторый положительный вес в ту точку области $\mathfrak{X}$, в которой на данном этапе достигается максимум функции $\varphi_{\phi}(\mathbf{x}, \xi)$. Доказана сходимость последовательности

получаемых таким образом непрерывных планов к Ф-оптимальным планам при определенном выборе шага.

Для определенных типов моделей и некоторых стандартных видов области $\mathfrak{X}$ разработаны и аналитические методы построения оптимальных по некоторым критериям планов. Это касается прежде всего критерия *D*-оптимальности.

D-оптимальным планам посвящено большое число математических исследований. Формулировка теоремы об эквивалентности для *D*-оптимальных планов наиболее проста; функция $\varphi_\phi(\mathbf{x}, \xi)$, для функционала $|\mathbf{D}(\xi)|$ имеет очевидный статистический смысл, максимум этой функции для оптимальных планов равен числу параметров регрессии. Все это привело к тому, что именно для этого критерия в первую очередь были получены основные результаты и по аналитическим, и по численным методам построения непрерывных планов.

Непрерывные планы не всегда можно непосредственно использовать на практике. Если нам задано некоторое общее число наблюдений *N*, то при распределении этих наблюдений между точками спектра непрерывного оптимального плана может оказаться, что во всех или в некоторых точках нужно сделать нецелое число измерений. При достаточно больших значениях *N* и достаточно малом числе точек спектра мы можем отбросить дробные части этих чисел и получить план, близкий к ***непрерывному оптимальному плану***. Разработаны некоторые методы округления непрерывных планов, но они, как правило, дают хорошие результаты только при больших *N*.

Задачу поиска оптимальных планов на множестве точных планов (планов с заданным числом наблюдений) оказалось решить гораздо труднее, чем задачу поиска непрерывных оптимальных планов. Если мы ограничимся множеством точных планов, то не оказываются справедливыми соответствующие теоремы эквивалентности; здесь уже нет возможности строить оптимальные планы аналитически, численные методы построения значительно усложняются.

Однако непосредственный поиск минимума функционала $|\mathbf{D}(\xi)|$ на множестве точных планов в пространстве больших размерностей и в этом случае удается заменить последовательными процедурами поиска максимума некоторой функции в пространстве размерности *n*. Но в этом случае задача оказывается гораздо более сложной, и итерационная процедура может привести к получению плана, соответствующего не абсолютному, а некоторому локальному минимуму. Точные *D*-оптимальные планы построены этим методом только для некоторых простых моделей.

Построить планы, удовлетворяющие одновременно многим критериям оптимальности, удается только для отдельных моделей. Об одной такой модели будет рассказано в следующем разделе. Как правило, необходимо остановиться на каком-то одном из основных критериев, пожертвовав чем-то с точки зрения других критериев. В этом случае желательно найти некоторое компромиссное решение, т. е. выбрать план, который был бы близок к оптимальным планам по разным критериям. Здесь под близостью следует понимать то, что значение функционала, соответствующего данному критерию оптимальности для выбранного плана, должно быть близко к оптимальному значению этого функционала. Математически можно было бы сформулировать задачу построения планов, близких к оптимальным по нескольким критериям, однако в достаточно строгой формулировке такая задача, по-видимому, не имела бы решения.

К решению задачи выбора плана, близкого к оптимальному по нескольким критериям, можно подойти и с несколько другой стороны. Из имеющегося набора планов для данной модели мы обычным сравнением иногда можем выбрать план, который удовлетворяет нас сразу по нескольким критериям.

14.4. Выбор оптимальных планов для полиномиальных моделей

Полиномиальные модели получили широкое распространение в практических исследованиях. Мы в основном остановимся на полиномах первой и второй степени от n независимых переменных для некоторых типов области планирования $\mathfrak{X}$. Соответствующие планы принято называть ***планами первого и второго порядка***.

Начало работ по исследованию поверхности отклика с помощью полиномиальных моделей связано с именем американского математика Бокса. В 1951 г. Бокс и Уилсон опубликовали первую работу в этом направлении. В то время еще не были четко сформулированы статистические критерии оптимальности планов эксперимента; при выборе планов основное внимание уделялось таким их свойствам, как ортогональность и ротатабельность. ***Свойство ортогональности обеспечивает независимость оценок параметров. Пользуясь ортогональными планами, можно отбрасывать параметры, оценки которых оказались незначимыми; это никак не влияет на оценки других, оставшихся параметров. Ротатабельность плана позволяет легко получить представление об ошибке оценки модели в любой точке области $\mathfrak{X}$, «информативность» модели оказывается одинаковой в любом***

направлении от центра эксперимента. Кроме того, применение ортогональных и ротатабельных планов позволяет проводить обработку материала вручную, что имело большое значение на первых порах применения планирования эксперимента, так как в то время еще была недостаточно развита вычислительная техника в прикладных институтах, а также на производстве.

В то время как для полиномиальных моделей первого порядка можно построить планы, которые одновременно обладают свойствами и ортогональности, и ротатабельности, для полиномов второго порядка найти такие планы не удается. Здесь критерию ротатабельности было отдано некоторое предпочтение. Ортогональные и ротатабельные планы второго порядка имеют еще одно хорошее свойство— это свойство ***композиционности;*** они получаются добавлением некоторых точек к планам первого порядка. Это значит, что можно попытаться ***построить модель первого порядка, а затем, если нужно, добавив наблюдения, перейти к модели второго порядка***.

Удобные свойства планов, предложенных в работах Бокса и его школы, обеспечили им быстрое внедрение в практику. Вскоре после появления работы Бокса и Хантера, в которой описывались композиционные ротатабельные планы второго порядка, был предложен ряд новых композиционных, но теперь уже не ротатабельных планов с небольшим числом наблюдений. Таких планов появилось очень много и долго оставалось неясным, как именно провести сравнительную оценку этих планов. Концепция Бокса, несмотря на ее плодотворность и широкий отклик среди экспериментаторов, оказалась недостаточно общей для дальнейшего логического развития.

В работах Кифера были четко сформулированы некоторые статистические критерии. Планы первого порядка, которые использовались ранее, оказались оптимальными с точки зрения одновременно многих критериев. С планами второго порядка дело обстояло несколько сложнее. Непрерывные *D*-оптимальные планы, впервые построенные Кифером, требовали слишком большого числа измерений. Впоследствии были построены планы с небольшим числом измерений, близкие к *D*-оптимальным, а также планы, удовлетворяющие другим статистическим критериям. Однако обоснованно рекомендовать какой-то конкретный план для практического использования было трудно, так как для планов второго порядка различные критерии не удовлетворяются одновременно. Возникла задача сравнения всех имеющихся планов по разным критериям и выбора некоторого компромиссного решения. Нужно было найти множество планов, которые были бы, во-первых, близки к оптимальным по

многим критериям и, во-вторых, удобны для практического использования. О результатах уравнения планов второго порядка будет идти речь ниже. Сначала коротко остановимся на задачах, связанных с построением оптимальных планов первого порядка.

14.4.1. Планы первого порядка

Модель первого порядка для n независимых переменных запишем в виде

$$E\{y\} = \eta(x, \theta) = \theta_0 + \sum_{i=1}^{n} x_i \theta_i. \tag{14.26}$$

Иногда такие модели являются достаточно точной аппроксимацией при исследовании механизма явлений. Но наиболее часто они используются в экстремальных экспериментах, направленных на определение оптимальных условий протекания процесса (о таких экспериментах мы подробнее расскажем дальше). Невырожденные планы для оценки параметров модели (14.25) называются планами первого порядка.

Рассмотрим наиболее часто встречающиеся типы ограничений на независимые переменные, которые определяют область планирования $\mathfrak{X}$:

а) чаще всего в практических задачах границы варьирования задаются для каждой из переменной. Обозначим через z_i натуральные значения независимых переменных, которые измеряются в единицах времени, температуры, объема длины и т. д. Тогда имеем неравенства такого типа:

$$a_i \leq z_i \leq b_i \quad (i=1, \ \dots, n). \tag{14.26}$$

От натуральных переменных обычно удобнее бывает перейти к безразмерным переменным, приняв половину интервала варьирования каждой переменной за единицу. Тогда получим систему неравенств:

$$-1 \leq x_i \leq 1 \ (i = 1.....n). \tag{14.27}$$

Область $\mathfrak{X}$, определяемая этими неравенствами, представляет собой n-мерный куб;

б) иногда удобнее бывает не рассматривать сочетания крайних условий для всех переменных; в этом случае область варьирования переменных можно задать в виде:

$$\sum_{i=1}^{n} z_i^2 \leqslant R^2, \tag{14.28}$$

а отсюда простым линейным преобразованием легко перейти в безразмерных переменных x_i к n-мерному шару единичного радиуса

$$\sum_{i=1}^{n} x_i^2 \leqslant 1. \qquad (14.29)$$

При рассмотрении планов первого порядка можно еще уделить внимание ограничениям такого типа:

в) каждая из переменных принимает три различных значения:

-1, 0, +1;

г) каждая из переменных принимает два различных значения:

-1 и +1.

Ограничения *в* и *г* возникают в задачах *взвешивания* на двухчашечных и одночашечных весах, ограничение *г* приводит к построению *факторных* планов для модели (14.25). На этих задачах мы остановимся подробнее ниже. Сюда мы включили такого типа ограничения, чтобы показать, что для планов первого порядка разного типа ограничения на переменные часто приводят к одинаковым решениям задачи выбора оптимального плана.

Построение эффективных планов первого порядка для ограничения *б* не представляет особых затруднений. Правильный ***симплекс-план*** является *D*-, *G*-, *A*- и *E*-оптимальным планом для любой размерности пространства (для любого числа переменных *n).* Кроме того, эти планы ортогональны и ротатабельны. ***Правильный симплекс-план представляет собой насыщенный план в вершинах правильного симплекса в n-мерном пространстве переменных*** x_i. Этот симплекс вписан в сферу, ограничивающую область изменения переменных x_i, т. е. в сферу

$$\sum_{i=1}^{n} x_i^2 = 1.$$

Свойства оптимальности плана не зависят от ориентации симплекса. Эти планы оптимальны на множестве непрерывных планов и в то же время они содержат минимальное число наблюдений.

Почти так же благополучно обстоит дело и с ограничением *а.* Планы, получаемые из матриц Адамара (об этих матрицах мы говорили ранее), обладают свойством *D*-, *G*-, *A*- и *E*-оптимальности. Эти планы так же, как и правильные симплекс-планы, обладают свойством ортогональности. Единственная трудность заключается в том, что матрицы Адамара можно построить не для любой размерности пространства переменных x_i. Они, как уже говорилось выше, существуют, кроме случая n=1, только для тех n, для которых n+1 кратно четырем. Поэтому при $n+1=0 \pmod 4$ для n переменных может быть построен насыщенный план первого порядка в области планирования *а.* Эти планы оптимальны на множестве непрерывных

планов, они также ортогональны и ротатабельны. Для других значений n оптимальные планы можно построить обычным вычеркиванием одного, двух или трех столбцов из плана, построенного на основе матриц Адамара. Например, для n=7 из матрицы Адамара получается оптимальный насыщенный план первого порядка, представленный в табл. 14.5.

Таблица 14.5

Оптимальный насыщенный план первого порядка для n = 7

Номер опыта	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	x_7	Номер опыта	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	x_7
1	−1	−1	−1	+1	+1	+1	−1	5	−1	−1	+1	+1	−1	−1	+1
2	+1	−1	−1	−1	−1	+1	+1	6	+1	−1	+1	−1	+1	−1	−1
3	−1	+1	−1	−1	+1	−1	+1	7	−1	+1	+1	−1	−1	+1	−1
4	+1	+1	−1	+1	−1	−1	−1	8	+1	+1	+1	+1	+1	+1	+1

Для n=6, 5, 4 оптимальный план получается вычеркиванием соответственно любого одного, любых двух и любых трех столбцов этого плана. Однако эти планы уже не будут насыщенными. Задача построения насыщенных планов для таких размерностей при ограничениях *а* сводится к нахождению оптимальной ориентации симплекс-плана, вписанного в многомерный куб.

Разрешение проблемы построения эффективных планов первого порядка для ограничения *а* позволяет считать эту проблему решенной и для ограничений *в* и *г*. Действительно, планы адамаровской конфигурации — это планы с элементами —1 и +1, и, таким образом, ограничения *в* и *г* выполняются автоматически.

14.4.2. Планы второго порядка

Пусть модель представлена полиномом степени 2 от независимых переменных. Запишем его в таком порядке:

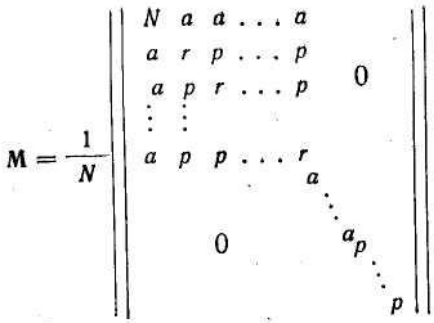
$$E\{y\} = \eta(x, \theta) = \theta_0 + \sum_{i=1}^{n} x_i^2 \theta_{ii} + \sum_{i=1}^{n} x_i \theta_i + \sum_{i<j} x_i x_j \theta_{ij}. \qquad (14.30)$$

План второго порядка — это невырожденный план для оценки параметров полинома (14.30). Здесь мы в основном остановимся на планах для областей *а* и *б,* т. е. на ***планах на кубе и на шаре***.

Рассмотрим результаты работы по сравнению планов второго порядка по различным критериям и вопрос выбора множества компромиссных планов, достаточно близких к оптимальным по всем рассмотренным критериям. Среди этих планов почти всегда есть такие, которые

удобны для использования, т. е. содержат небольшое число измерений и не требуют громоздких расчетов вследствие своей симметричности.

Симметричными планами второго порядка будем называть планы, которые имеют следующую структуру информационной матрицы



(14.31)

для модели, записанной в (14.30). Сравнение производилось на основании каталога планов второго порядка (см. Приложение каталога планов).

Для сопоставления планов в каталоге взяты следующие величины:

1) определитель нормированной информационной матрицы $|\mathbf{M}|$;
2) след нормированной ковариационной матрицы $\mathrm{tr}\mathbf{D}$
3) средняя по области *а* или *в* дисперсия оценки модели

$$\bar{d} = \int_{\mathfrak{X}} \mathbf{f}^{\mathrm{T}}(\mathbf{x})\mathbf{D}\,\mathbf{f}(\mathbf{x})\,d\mathbf{x} = \int_{\mathfrak{X}} d(\mathbf{x})\,d\mathbf{x};$$

4) максимальное собственное значение ковариационной матрицы $\lambda_{max}(\mathbf{D})$;

5) максимальное в области *а* или *в* значение функции дисперсии оценки модели

$$\max_{\mathfrak{X}} \mathbf{f}^{\mathrm{T}}(\mathbf{x})\,\mathbf{D}\,\mathbf{f}(\mathbf{x}) = \max_{\mathfrak{X}} d(\mathbf{x}) = d_{\max};$$

6) максимальный по модулю коэффициент корреляции оценок параметров $|\rho|_{max}$.

Для планов, включенных в каталог, подсчитаны шесть соответствующих критериев. В каталоге даются планы, корреляционные матрицы оценок параметров, дисперсии оценок модели (14.30) в точках плана, матрицы $(\mathbf{X}^{\mathrm{T}}\mathbf{X})^{-1}\mathbf{X}^{\mathrm{T}}$ для вычисления лучших линейных оценок коэффициентов модели, некоторые параметры, необходимые для простого расчета лучших линейных оценок в случае планов с блочной структурой информационных матриц. Кроме того, для каждого плана даются графики функции $d(\mathbf{x})$ в направлениях из центра плана на точки

(1, 1....., 1), (0,1, ...1), (0,0..... 0,1), а для некоторых планов— проекции линий равного уровня функции $d(\mathbf{x})$ на плоскость $x_i=0$ ($i\neq$l,2).

Остановимся очень коротко на свойствах этих планов.

1. *Непрерывные D-оптимальные планы.* Впервые такие планы были построены Кифером. Имеется ряд работ, в которых усовершенствуются методы построения, находятся *D*-оптимальные планы с минимальным числом точек спектра. В каталоге эти планы представляют собой как бы «эталоны» по характеристикам $|\mathbf{M}|$ и $d_{\max}$

2. *Непрерывные A-оптимальные планы.* Построены численно-аналитическим методом для области *а.*

3. *Непрерывные Q-оптимальные планы,* так же как *А*-оптимальные планы, построены численно-аналитическим методом для области *а.*

4. *Симметричные квази-D-оптимальные планы.* В работе Л. Д. Песочинского построены симметричные «асимптотически-*D*-оптимальные» планы с небольшим числом наблюдений с характеристикой $|\mathbf{M}|$, сходящейся к соответствующей характеристике непрерывных *D*-оптимальмых планов при увеличения размерности *n.*

5. *Несимметричные квази-D-оптимальные планы.* Построены для размерностей n=4, 5, 6 для области *а* округлением непрерывных *D*-оптимальных планов построены несимметричные планы, близкие по величине определителя информационной матрицы к оптимальным, содержащие сравнительно небольшое число наблюдений. Построены численным методом квази-*D*-оптимальные планы для области *а* с заданными значениями числа наблюдений *N,* содержащие точки спектров непрерывных *D*-оптимальных планов.

6. *Насыщенные дискретные D-оптимальные планы.* Построены численным методам насыщенные планы на кубе, *D*-оптимальные на множестве планов с данным числом наблюдений, для размерностей n=2, 3 и 4.

7. *Композиционные ортогональные планы.* Эти симметричные планы используются как для области *а,* так и для области *б.* Заметим, что планов, удовлетворяющих критерию ортогональности, для модели (14.30) построить невозможно, так как нельзя сделать нулевыми коэффициенты корреляции между оценками параметров θ_0 и θ_{ii}. Поэтому ортогональными здесь условно называются планы, для которых равны нулю все остальные коэффициенты корреляции.

8. *Композиционные ротатабельные планы Бокса.* Эти планы предложены в Боксом и Хантером. Они широко используются в практических исследованиях для областей *а* и *б.* Структура композиционных планов такова, что сначала можно построить только часть плана (ядро) для получения оценок параметров θ_0, θ_i и θ_{ij}, а затем,

если нужно, достроить план для получения оценок всех параметров модели (14.30). В композиционных ортогональных и ротатабельных планах Бокса ядро — это точки полного факторного плана 2^n (ПФЭ). Эти точки не совпадают с вершинами области *а* и не лежат, как правило, на поверхности шара *б*. Они являются вершинами некоторого куба меньшего объема; длина стороны этого куба определяется условием ротатабелыности полного плана. Для размерностей $n \geq 5$ можно в качестве ядра использовать не полный факторный план, а только половину его точек (регулярную полуреплику), позволяющую независимо оценить параметры.

9. *Симметричные планы типа В*. Это планы с небольшим числам наблюдений в вершинах куба *а* и в точках с координатами (±1, 0,..., 0), (0, ±1, 0.....0)..... (0, 0,..., 0,±1) .

10. *Композиционные планы, построенные на основе регулярных реплик (планы Хартли).* Эти планы по структуре сходны с композиционными ротатабельными планами Бокса, но содержат меньшее число наблюдений и не обладают свойством ротатабельности и симметричности .

11. *Композиционные планы, построенные на основе нерегулярных реплик (планы Вестлейка).* Планы несимметричны, по числу наблюдений близки к насыщенным.

12. *Несимметричные насыщенные планы Рехтшафнера.* Эти планы представляют собой подмножества ПФЭ 3^n с числом наблюдений, равным числу параметров модели .

13. *Трехуровневые планы Бокса—Бенкена.* Бокс и Бенкен предложили способ построения симметричных, близких к ротатабельным, планов второго порядка при условии, что каждая переменная может изменяться не более чем на трех уровнях (+1, 0, —1). Такие планы строятся на основании комбинаций двухуровневых факторных планов с неполноблочными сбалансированными планами. Для размерностей $n = 4$ и 7 такие планы ротатабельны.

14. *Композиционные симплексно-суммируемые ротатабельные планы.* Планы этого типа используются для области *б.* Они включают точки правильного *n*-мерного симплекса, которые дополняются еще некоторыми точками, определенный выбор которых позволяет сделать план ротатабельным.

15. *Насыщенные симплексно-суммируемые планы.* На основе правильных *n*-мерных симплексов строятся неротатабельные насыщенные планы.

16. *Планы, композиционные по отношению к регулярным планам главных эффектов.* Эти планы позволяют на первом этапе оценить

параметры θ_0, θ_i и θ_{ij} , а на втором — достраиваются до полных планов второго порядка. Они содержат небольшое число наблюдений.

17. *Полные факторные планы* 3^n. *Содержат все точки с координатами* 0 и ±1.

18. *Минимаксные планы для проверки неадекватности модели первого порядка.* Эти планы строятся так, чтобы по некоторому критерию наилучшим образом проверить неадекватность модели первого порядка при условии, что истинная модель имеет вид полинома второго порядка .

Для всех перечисленных планов для размерностей n=2÷7 найдены указанные выше характеристики. Для того чтобы сравнение планов было более наглядным, по ним подсчитаны так называемые ***приведенные характеристики***, которые представляют собой величины среднеквадратической ошибки оценки одного параметра, вычисленные по каждой из характеристик при условии, что все оценки независимы и имеют равные дисперсии. «Приведенные» характеристики находили по следующим формулам :

$$|\tilde{\mathbf{M}}^{-1}| = |\mathbf{D}|^{\frac{1}{2k}}, \tag{14.32}$$

$$\tilde{\mathrm{tr}} = \left(\frac{\mathrm{tr}\ \mathbf{D}}{k}\right)^{\frac{1}{2}}, \tag{14.33}$$

$$\tilde{\lambda}_{\max} = (\lambda_{\max}(\mathbf{D}))^{\frac{1}{2}}, \tag{14.34}$$

$$\tilde{d} = \left(\frac{d}{a}\right)^{\frac{1}{2}}, \tag{14.35}$$

где

$$a = \begin{cases} \dfrac{5n^2 + 43n + 90}{90} & \text{для области } a, \\ \dfrac{5n^2 + 25n + 16}{2(n+2)(n+4)} & \text{для области } б. \end{cases}$$

Эти характеристики и характеристики Δ и ν, приведены в табл. 14.6÷14.17.

Таблица 14.6

Характеристики планов второго порядка на кубе (n=2, k = 6)

Название плана	N	$\lvert\widetilde{M}^{-1}\rvert$	$\widetilde{\bar{d}}$	$\widetilde{\mathrm{tr}}$	$\widetilde{\lambda}_{max}$	Δ	γ
D-оптимальный* .	—	1,45	1,45	1,88	3,18	0,64	1,23
A-оптимальный* .	—	1,51	1,29	1,73	2,46	0,58	1,10
Q-оптимальный* .	—	1,52	1,28	1,73	2,35	0,15	1,13
Симметричный квази*- D-оптимальный	13	1,45	1,51	1,94	3,38	0,54	1,33
B_2^*	8	1,48	1,65	2,11	4,19	0,40	1,42
Насыщенный точный D-оптимальный	6	1,54	1,50	2,05	3,34	1,11	1,43
Несимметричный квази-D-оптимальный	7	1,49	1,46	1,95	3,03	0,64	1,33
Несимметричный квази-D-оптимальный	8	1,48	1,45	1,87	3,15	0,44	1,29
(+) Хартли . .	7	1,81	1,78	2,89	6,09	0,46	2,21
(+) Насыщенный ССП ($а$) . . .	7	1,75	1,54	2,33	4,36	0,12	1,73
(+) Насыщенный ССП ($б$)	7	1,62	1,48	2,14	4,04	0,50	1,69
3^n, ортогональный*	9	1,47	1,35	1,79	3,00	0,41	1,26
(+) Ротатабельный Бокса** . .	13	2,10	1,65	2,48	3,61	0,00	1,24

Таблица 14.7

Характеристики планов второго порядка на кубе (n=3, k=10)

Название плана	N	$\lvert\widetilde{M}^{-1}\rvert$	$\widetilde{d}$	$\widetilde{tr}$	$\widetilde{\lambda}_{max}$	Δ	γ
D-оптимальный*	—	1,45	1,59	1,93	3,80	0,67	1,14
A-оптимальный*	—	1,53	1,35	1,73	2,65	0,78	1,17
Q-оптимальный*	—	1,55	1,34	1,74	2,42	0,08	1,18
(+) Симметричный квази-D-оптимальный*	13	1,62	1,62	2,11	4,81	0,22	1,45
B_3^*	14	1,47	1,41	1,79	2,90	0,76	1,12
Насыщенный точный D-оптимальный	10	1,54	1,56	1,96	3,70	1,09	1,28
(+) Несимметричный квази-D-оптимальный	10	1,58	1,77	2,28	4,80	2,58	1,72
Хартли	11	1,87	1,92	2,41	3,54	2,56	1,51
Трехуровневый Бокса — Бенкена	15	1,65	1,40	1,85	3,03	0,26	1,10
(+) Насыщенный Рехтшафнера	10	1,58	1,94	2,42	5,06	0,78	2,47
Композиционный по отношению к планам главных эффектов	13	1,47	1,57	1,93	3,73	1,00	1,21
3^{n}*	27	1,50	1,42	1,78	3,33	0,49	1,17
(+) Ротатабельный Бокса**	20	2,78	2,27	3,30	4,47	0,00	1,17
(+) Ортогональный*	15	1,86	1,54	2,18	3,67	0,68	1,17
Минимаксный план для проверки неадекватности линейной модели*	16	1,68	1,40	1,84	2,73	0,41	1,14

Таблица 14.8

Характеристики планов второго порядка на кубе (n=4, k=15)

Название плана	N	$\lvert\tilde{M}^{-1}\rvert$	$\tilde{\bar{d}}$	$\widetilde{tr}$	$\tilde{\lambda}_{max}$	Δ	γ
D-оптимальный*	—	1,43	1,71	1,95	4,46	1,10	1,09
A-оптимальный*	—	1,52	1,38	1,71	2,83	1,14	1,15
Q-оптимальный*	—	1,54	1,37	1,72	2,51	0,08	1,15
Симметричный квази-D-оптимальный*	42	1,46	1,67	1,90	4,72	0,65	1,15
B_4^*	24	1,48	1,50	1,96	3,46	1,66	1,07
Насыщенный точный D-оптимальный	15	1,52	1,79	2,07	4,85	0,81	1,23
Несимметричный квази-D-оптимальный	15	1,53	1,93	2,36	4,60	2,01	1,28
Несимметричный квази-D-оптимальный	16	1,53	1,91	2,30	4,75	1,83	1,28
(+) Хартли	17	1,85	2,12	2,53	4,26	3,58	1,39
Трехуровневый Бокса — Бенкена**	27	1,99	1,69	2,29	4,31	0,00	1,32
Насыщенный Рехтшафнера	15	1,60	1,81	2,34	4,15	1,25	1,48
Композиционный по отношению к планам главных эффектов	17	1,54	1,85	2,22	4,38	1,83	1,52
(+) Насыщенный ССП	16	2,26	2,56	3,03	4,58	1,71	1,50
3^n**	81	1,52	1,46	1,76	3,63	0,62	1,12
(+) Ротатабельный Бокса**	31	3,61	3,10	4,32	5,57	0,00	1,14
(+) Ортогональный*	25	2,28	1,86	2,66	4,57	1,07	1,12

Таблица 14.9

Характеристики планов второго порядка на кубе ($n = 5$, $k = 21$)

Название плана	N	$\lvert\tilde{M}^{-1}\rvert$	$\tilde{d}$	$\tilde{tr}$	$\tilde{\lambda}_{max}$	Δ	γ
D-оптимальный*	—	1,40	1,80	1,97	5,13	1,20	1,06
A-оптимальный*	—	1,50	1,40	1,68	2,98	1,43	1,08
Q-оптимальный*	—	1,52	1,39	1,70	2,59	0,08	1,13
Симметричный квази-D-оптимальный*	50	1,42	1,74	1,88	5,20	0,83	1,09
B_5^*	42	1,48	1,72	2,31	4,58	2,72	1,05
B_5 с полурепликой*	26	1,51	1,50	1,96	3,61	2,34	1,08
Несимметричный квази-D-оптимальный	28	1,48	1,95	2,14	5,70	1,47	1,32
То же	30	1,47	1,96	2,15	5,72	1,56	1,29
» »	40	1,43	1,72	1,94	4,67	1,39	1,15
(+) Хартли*	27	1,53	1,51	1,99	3,67	1,46	1,06
(+) Трехуровневый Бокса — Бенкена*	46	2,44	2,09	2,79	4,25	0,50	1,24
Насыщенный Рехтшафнера	21	1,49	1,76	2,37	4,73	2,64	1,09
(+) Вестлейка	23	1,95	2,78	3,36	7,10	9,89	2,67
(+) Насыщенный ССП (a)	22	2,61	2,82	3,40	5,12	2,80	1,61
(+) Насыщенный ССП ($б$)	22	2,63	3,15	3,80	10,3	3,83	1,29
3^{n*}	243	1,52	1,48	1,74	3,90	0,57	1,08
(+) Ротатабельный Бокса**	52	4,79	4,32	5,78	7,21	0,00	1,11
(+) Ротатабельный с полурепликой**	32	3,91	3,41	4,57	5,66	0,00	1,11
(+) Ортогональный*	43	2,74	2,30	3,26	5,85	1,90	1,08
(+) Ортогональный с полурепликой*	27	2,68	2,19	2,99	4,57	1,20	1,09
Композиционный по отношению к планам главных эффектов	32	1,49	1,54	1,92	3,44	1,36	1,15

Таблица 14.10

Характеристики планов второго порядка на кубе (n=6, k = 28)

Название плана	N	$\lvert\tilde{M}^{-1}\rvert$	$\tilde{\bar{d}}$	$\tilde{tr}$	$\tilde{\lambda}_{max}$	Δ	γ
D-оптимальный*	—	1,38	1,88	1,98	5,81	1,49	1,05
A-оптимальный*	—	1,48	1,41	1,66	3,14	1,81	1,17
Q-оптимальный*	—	1,50	1,40	1,67	2,67	0,07	1,12
Симметричный квази-D-оптимальный*	66	1,38	1,82	1,91	5,74	1,24	1,06
(+) B_6*	76	1,53	2,08	2,84	6,16	4,77	1,04
B_6 с полурепликой*	44	1,48	1,71	2,28	4,69	3,36	1,04
(+) Несимметричный квази-D-оптимальный	29	1,60	2,39	2,83	7,66	4,74	2,64
То же	35	1,51	2,18	2,39	6,58	2,59	1,57
Хартли	29	1,98	2,91	3,15	5,47	4,03	1,42
Трехуровневый Бокса — Бенкена*	54	2,07	1,80	2,28	3,91	0,61	1,10
Насыщенный Рехтшафнера	28	1,53	1,93	2,59	5,44	4,32	1,14
Насыщенный ССП (б)	29	2,61	2,94	3,31	4,92	1,59	1,42
3^n*	729	1,52	1,50	1,72	4,15	0,64	1,06
Ротатабельный Бокса**	91	6,42	6,07	7,83	9,54	0,00	1,08
(+) Ротатабельный Бокса с полурепликой**	53	5,10	4,65	6,02	7,28	0,00	1,08
(+) Ортогональный*	77	3,25	2,86	3,99	7,68	2,84	1,07
(+) Ортогональный с полурепликой*	45	3,14	2,65	3,56	5,80	1,55	1,07

Таблица 14.11

Характеристики планов второго порядка на кубе (n = 7, k = 36)

Название плана	N	$\lvert\tilde{M}^{-1}\rvert$	$\tilde{\bar{d}}$	$\tilde{tr}$	$\tilde{\lambda}_{max}$	Δ	γ
D-оптимальный*	—	1,35	1,94	1,98	6,50	1,70	1,04
A-оптимальный*	—	1,46	1,42	1,63	3,29	2,18	1,10
Q-оптимальный*	—	1,48	1,40	1,65	2,76	0,06	1,11
Симметричный квази-D-оптимальный*	116	1,37	1,75	1,80	5,89	1,21	1,05
(+) B_7*	142	1,50	2,64	3,62	8,43	—	1,03

Продолжение таблицы 14.11

Название плана	N	$\lvert\tilde{M}^{-1}\rvert$	$\tilde{d}$	$\tilde{tr}$	$\tilde{\lambda}_{max}$	Δ	γ
B_7 с полурепликой*	78	1,47	2,06	2,77	6,24	4,97	1,03
(+) Хартли	47	1,90	3,39	3,58	6,91	7,98	1,35
Трехуровневый Бокса—Бенкена**	62	2,30	2,00	2,49	4,33	0,00	1,12
Насыщенный Рехтшафнера	36	1,61	2,13	2,83	6,17	5,56	1,18
(+) Вестлейка	41	2,00	3,15	3,60	10,3	5,90	3,06
Насыщенный ССП 3^n**	37	2,23	2,44	2,70	3,61	4,98	1,27
(+) Ротатабельный Бокса**	2187	1,53	1,51	1,70	4,39	0,81	1,05
(+) Ротатабельный с полурепликой**	163	8,58	8,42	10,5	12,5	0,00	1,07
(+) Ортогональный*	92	6,77	6,42	8,07	9,59	0,00	1,07
(+) Ортогональный с полурепликой*	143	3,80	3,61	4,94	10,3	—	1,05
	79	3,64	3,21	4,25	7,59	2,91	1,05

Таблица 14.12

Характеристики планов второго порядка на шаре (n = 2, k=6)

Название плана	N	$\lvert\tilde{M}^{-1}\rvert$	$\tilde{d}$	$\tilde{tr}$	$\tilde{\lambda}_{max}$	Δ	γ
D-оптимальный**	—	1,99	1,57	2,57	4,43	0,00	1,49
Ротатабельный Бокса**	13	2,10	1,52	2,48	3,61	0,00	1,23
(+) Ортогональный*	9	2,33	1,73	3,06	4,71	1,06	1,26
(+) Хартли	7	2,10	1,74	3,01	5,17	0,15	1,67
(+) Насыщенный ССП**	7	2,10	1,61	2,65	4,77	0,00	1,54

Таблица 14.13

Характеристики планов второго порядка на шаре (n =3, k =10)

Название плана	N	$\lvert\tilde{M}^{-1}\rvert$	$\tilde{d}$	$\tilde{tr}$	$\tilde{\lambda}_{max}$	Δ	λ
D-оптимальный**	—	2,69	1,92	3,46	6,52	0,00	1,51
Симметричный близи-D-оптимальный	13	2,73	2,03	3,60	7,38	0,69	1,45

Продолжение табл. 14.13

Название плана	N	$\lvert\tilde{M}^{-1}\rvert$	$\tilde{d}$	$\tilde{tr}$	$\tilde{\lambda}_{max}$	Δ	γ
Ротатабельный Бокса**	20	2,90	1,93	3,49	4,74	0,00	1,24
Трехуровневый Бокса — Бенкена**	15	2,78	1,89	3,32	4,79	0,66	1,19
(+) Ортогональный*	15	3,16	2,19	4,03	6,05	1,74	1,17
(+) Хартли . . .	11	2,97	2,32	4,46	6,82	0,77	1,91
Насыщенный ССП	11	2,96	2,32	4,15	6,80	0,77	1,70
(+) 3^n** . . .	27	3,43	2,38	4,50	6,83	2,01	1,16

Таблица 14.14

Характеристики планов второго порядка на шаре ($n = 4$, $k = 15$)

Название плана	N	$\lvert\tilde{M}^{-1}\rvert$	$\tilde{d}$	$\tilde{tr}$	$\tilde{\lambda}_{max}$	Δ	γ
D-оптимальный** .	—	3,45	2,29	4,39	8,86	0,00	1,50
Симметричный квази-D-оптимальный*	26	3,45	2,26	4,14	5,10	0,00	1,46
(+) Ротатабельный Бокса** . .	31	3,61	2,28	4,32	5,57	0,00	1,14
(+) Ротатабельный симплексно-суммируемый** .	39	3,89	2,44	4,72	6,12	0,00	1,14
Симплексно-суммируемый НССП 112a**	25	3,83	2,41	4,64	6,00	0,00	1,14
Симплексно-суммируемый НССП 112$б$**	25	3,83	2,41	4,64	6,00	0,00	1,14
Трехуровневый Бокса—Бенкена**	27	3,47	2,23	4,24	6,97	0,00	1,33
(+) Ортогональный*	25	3,97	2,68	5,03	7,62	2,59	1,12
Хартли	17	3,76	2,78	5,48	9,40	1,77	1,91
Насыщенный ССП	16	4,04	3,35	5,88	10,3	5,75	2,47
(+) 3a* . . .	81	4,60	3,09	5,98	8,95	3,10	1,11

Таблица 14.15

Характеристики планов второго порядка на шаре ($n = 5$, $k = 21$)

Название плана	N	$\lvert \tilde{M}^{-1} \rvert$	$\tilde{d}$	$\tilde{tr}$	$\tilde{\lambda}_{max}$	Δ	γ
D-оптимальный**	—	4,24	2,68	5,34	11,4	0,00	1,51
(+) Ротатабельный Бокса**	52	4,79	2,90	5,78	7,21	0,00	1,11
Ротатабельный Бокса с полуреплико й**	32	4,71	2,86	5,67	7,07	0,00	1,11
Ротатабельный симплексно-суммируемый**	40	4,51	2,74	5,99	6,74	0,00	1,11
(+) Симплексно-суммируемый НССП 112**	32	4,97	3,01	6,03	7,54	0,00	1,11
Трехуровневый Бокса — Бенкена*	46	4,35	2,66	5,35	7,13	0,61	1,24
(+) Ортогональный*	43	4,82	3,24	6,15	9,74	9,99	1,08
Ортогональный с полурепликой*	27	4,95	3,11	6,00	8,13	2,41	1,08
Хартли*	27	4,28	2,76	5,65	12,9	0,70	1,74
(+) Вестлейка (1)	23	4,89	3,62	7,48	13,1	1,76	2,27
Вестлейка (2)	23	4,81	3,52	7,33	13,2	5,40	2,07
Насыщенный ССП	22	5,18	4,50	7,60	14,1	7,84	2,10
(+) 3^n**	243	5,82	4,27	7,48	11,1	4,16	1,08

Таблица 14. 16

Характеристики планов второго порядка на шаре ($n = 6$, $k = 28$)

Название плана	N	$\lvert \tilde{M}^{-1} \rvert$	$\tilde{d}$	$\tilde{tr}$	$\tilde{\lambda}_{max}$	Δ	γ
D-оптимальный**	—	5,06	3,08	6,30	14,2	0,00	1,50
(+) Ротатабельный Бокса**	91	6,42	3,79	7,83	9,54	0,00	1,08
Ротатабельный Бокса с полуреплико й**	53	5,36	3,17	6,37	7,72	0,00	1,08
Ротатабельный симплексно-суммируемый**	65	5,62	3,32	6,73	8,29	0,00	1,08
(+) Симплексно-суммируемый 122**	57	6,09	3,59	7,37	9,00	0,00	1,08
Трехуровневый Бокса—Бенкена*	54	5,30	3,22	6,42	8,30	0,93	1,12
(+) Ортогональный*	77	5,73	3,95	7,51	12,8	5,27	1,07

Продолжение табл. 14.16

Название плана	N	$\lvert\widetilde{M}^{-1}\rvert$	$\widetilde{d}$	$\widetilde{tr}$	$\widetilde{\lambda}_{max}$	Δ	γ
Ортогональный с полурепликой*	45	5,73	3,60	6,98	10,1	3,83	1,07
Хартли	29	5,69	4,02	8,18	14,4	2,41	2,00
(+) Насыщенный ССП	29	6,36	5,70	9,27	17,9	10,80	1,99
(+) 3^n*	729	7,08	4,53	8,97	13,2	5,04	1,06

Таблица 14.17

Характеристики планов второго порядка на шаре (n = 7, k==36)

Название плана	N	$\lvert\widetilde{M}^{-1}\rvert$	$\widetilde{d}$	$\widetilde{tr}$	$\widetilde{\lambda}_{max}$	Δ	γ
D-оптимальный**	—	5,90	3,49	**7,27**	17,2	0,00	1,50
(+) Ротатабельный Бокса**	163	8,69	5,05	**10,7**	12,7	0,00	1,05
То же с полурепликой**	92	6,77	3,90	**8,07**	9,59	0,00	1,05
Ротатабельный симплексно-суммируемый**	66	5,93	3,56	7,27	8,62	0,00	1,07
Симплексно-суммируемый 113a**	77	7,91	4,57	9,62	11,5	0,00	1,07
Трехуровневый Бокса—Бенкена**	62	6,01	3,47	7,11	9,46	0,00	1,13
(+) Ортогональный*	143	6,61	4,89	9,25	17,3	0,00	1,05
Ортогональный с полурепликой*	79	6,59	4,24	8,19	13,1	5,85	1,05
Хартли	47	6,56	4,72	9,39	19,6	2,06	2,02
Вестлейка	41	7,06	5,76	12,7	41,8	6,24	2,93
Насыщенный ССП	37	7,56	6,94	10,9	21,7	13,36	1,98
3^n*	2187	8,37	5,25	10,5	15,3	6,27	1,05

В этих таблицах одной звездочкой отмечены симметричные планы, двумя звездочками — ротатабельные, крестиками в скобках (слева от названия плана) отмечены планы, которые можно назвать «равномерно худшими». Все их характеристики хуже характеристик некоторых других планов с меньшим или равным числом наблюдений. Для большинства планов построены графики зависимости каждой из «приведенных» характеристик от размерности.

Таблицы и графики дают возможность сделать выводы о свойствах исследуемых планов. Существенно, что примерно половина из всех

рассмотренных планов относится к равномерно худшим. (Отметим, что план данного типа может оказаться равномерно худшим и только для некоторых размерностей.) Несимметричные равномерно худшие планы при выборе плана, могут не рассматриваться. Если априори выдвинуто требование симметрии, ротатабельности, минимального числа уровней независимых переменных или какое-либо другое, то прежде чем отбросить удовлетворяющий этому требованию равномерно худший план, необходимо проверить, удовлетворяют ли соответствующим свойствам планы, при сравнении с которыми данный план отнесен к равномерно худшим.

По графикам можно проследить некоторые общие тенденции в изменении каждой из характеристик, увидеть особенности каждого типа планов. Сравним сначала планы по каждой характеристике.

1. Характеристика $|\widetilde{\mathbf{M}}^{-1}|$, область *а* (рис. 14. 1).

Здесь наилучшими являются непрерывные *D*-оптимальные планы. Большинство рассмотренных планов отличаются от *D*-оптимальных не более чем на 15%. Практически эти планы можно считать *D*-оптимальными. Значительно выходят за 15%-ную границу ротатабельные планы Бокса, ортогональные планы ($n \neq 2$), трех-уровневые планы Бокса—Бенкена и планы Хартли ($n \neq 5$). Среди планов, лежащих ниже 15%-ной границы, для каждой размерности можно найти симметричные планы с небольшим числом наблюдений (например, симметричные квази-*D*-оптимальные, планы B_n, начиная с $n = 5$ — планы B_n с полурепликой, для $n = 2$ — план 3^2, совпадающий с композиционным ортогональным).

Среди них для каждой размерности (кроме $n = 7$) имеются планы с числом наблюдений $N \approx 1{,}5\ k$ (k—число параметров модели). Кроме того, в этих же границах имеются насыщенные или близкие к ним несимметричные планы (точные *D*-оптимальные, планы Рехтшафнера, несимметричные квази-*D*-оптимальные планы, композиционные по отношению к ортогональным планам главных эффектов). Планы 3^n, непрерывные *A*-и *Q*-оптимальные планы по этой характеристике близки к *D*-оптимальным.

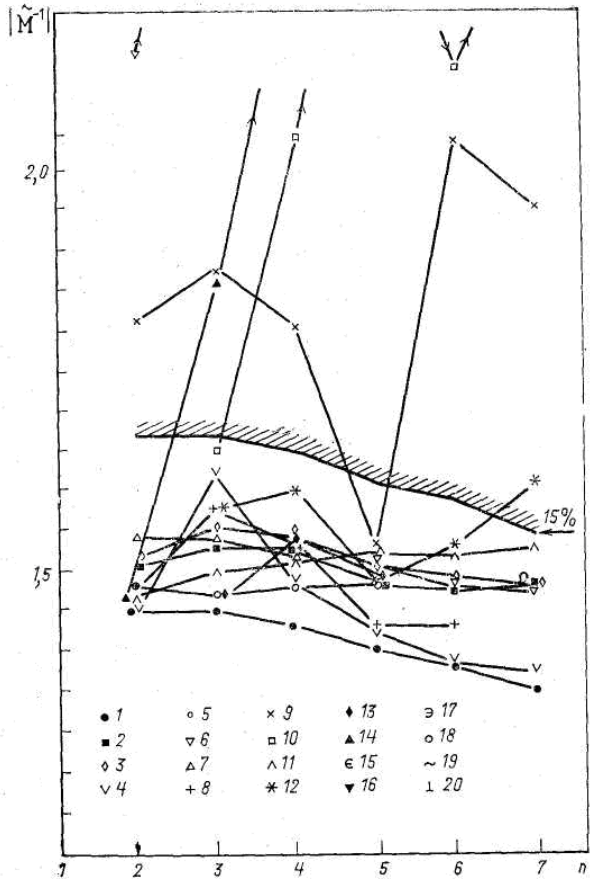


Рис. 14.1. Характеристика $|\tilde{M}^{-1}|$ для планов в области *a*

2. Характеристика $\tilde{\tilde{d}}$, область *a* (рис. 14.2).

Лучшими по этой характеристике после *Q*-оптимальных планов оказались планы *A*-оптимальные и 3^n. По этой характеристике также можно выделить группу планов, достаточно близких к наилучшим, и группу планов, значительно от них отличающихся. Но внутри первой группы здесь разброс значительно больше, чем для характеристики $|\tilde{\tilde{M}}^{-1}|$. Характерно, что основное множество планов находится вблизи 20—30%-ных границ по отношению к лучшим планам. Ниже 30%-ной

границы для всех размерностей (кроме n=6 и 7) имеется достаточное число планов как симметричных, так и несимметричных, близких к насыщенным. Отметим, что некоторые из планов, близких D-оптимальным, по величине $\widetilde{\widetilde{d}}$ резко ухудшаются с ростом размерности. Сюда относятся планы B_n и B_n с полурепликой.

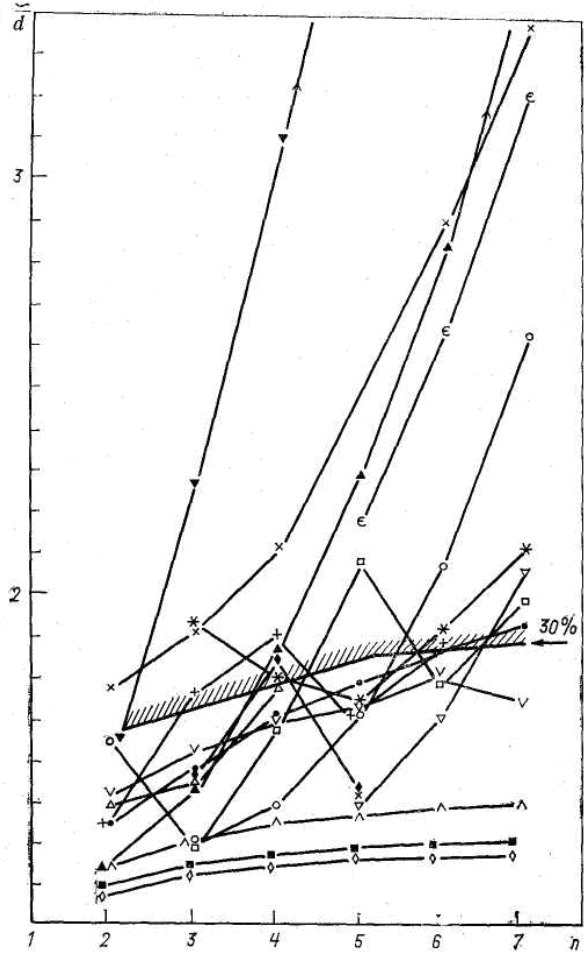


Рис. 14.2. Характеристика $\widetilde{\widetilde{d}}$ для планов в области a

Непрерывные D-оптимальные планы, хотя и не имеют тенденции столь резкого ухудшения, для n=6 и 7 выходят за пределы 30%-ной границы. Для размерности n = 7 только один план с небольшим числом

наблюдений (симметричный квази-*D*-оптимальный) лежит ниже 30%-ной границы.

3. Характеристика $\widetilde{\mathrm{tr}}$, область *а* (рис. 14. 3).

Лучшие планы здесь после *А*-оптимальных — *Q*-оптимальные и 3^n. Характер изменения величины $\widetilde{\mathrm{tr}}$ для разных планов очень сходен с соответствующими величинами для характеристики $\widetilde{\widetilde{d}}$. Внутри 30%-ной границы имеются планы симметричные и несимметричные, близкие к насыщенным.

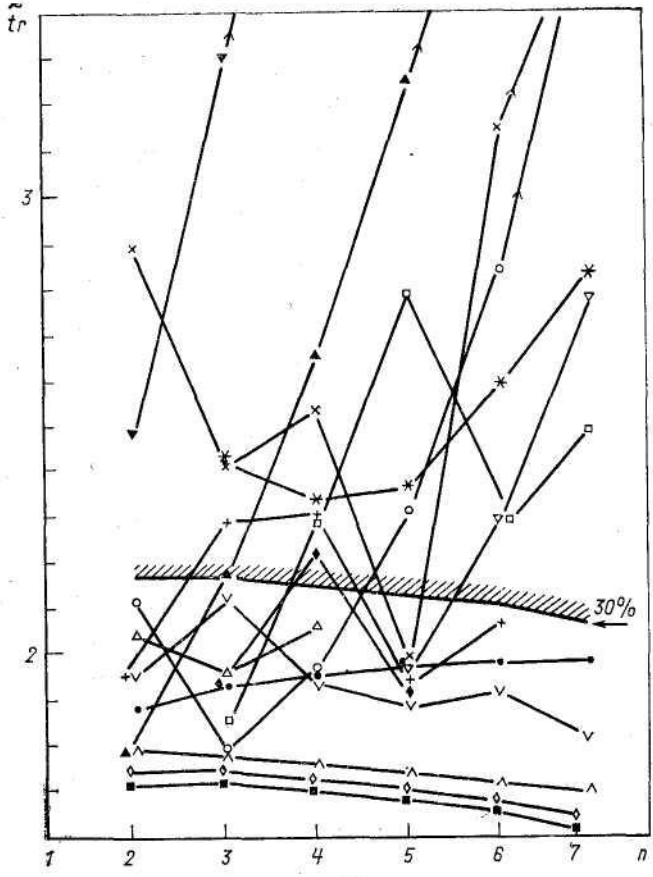


Рис. 14.3. Характеристика $\widetilde{\mathrm{tr}}$ для планов в области *а*

Условные обозначения для рис. 14.1—14.8 приведены на рис. 14.1. Они обозначают:

ДЛЯ ПЛАНОВ НА КУБЕ:

1—*D*-оптимальный; *2*—*A*-оптимальный; *3*—*Q*-оптимальный; *4*—симметричный квази-*D*-оптимальный; *5* — B_n; *6* — B_n с половинным ядром; *7* — насыщенный точный *D*-оптимальный; *8* — несимметричный квази-D-оптимальный; *9* — план Хартли; *10* — трехуровневый Бокса — Бенкена; *11*—3^n; *12*—насыщенный Рехтшафнера; *13*—композиционный по отношению к плану главных эффектов; *14* — ортогональный; *15*— ортогональный с половинным ядром; *16*—ротатабельный; 17 —ротатабельный с половинным ядрам;

ДЛЯ ПЛАНОВ НА ШАРЕ:

18 — насыщенный симплексно-суммируемый; *19* — ротатабельный симплексно-суммируемый; *20* — несимметричный симплексно-суммируемый.

4. Характеристика $\tilde{\lambda}_{max}$, область *а* (рис. 14.4).

Лучшими из имеющихся планов являются *Q*-оптимальные. Разброс по этой характеристике очень велик. Многие типы планов резко ухудшаются с ростом размерности. Если для $n = 2$ ниже 50%-ной границы по отношению к лучшим планам лежат практически все рассмотренные планы, то для n=6 и 7 все пригодные для использования планы выходят за пределы этой границы. Поэтому приходится рекомендовать для использования планы, которые, например, не выходят за 100%-ную границу, т. е. планы, которые хуже лучших планов не более чем в два раза.

Рассматривая таблицы и графики, можно сделать вывод, что не следует рекомендовать использовать планы какого-либо конкретного типа в целом для всех размерностей. Внутри указанных границ по всем характеристикам лежат *A*- и *Q*-оптимальные планы и планы 3^n. Но планы 3^n уже для n=3 содержат слишком большое число наблюдений, а *A*- и *Q*-оптимальные — это непрерывные планы. Здесь нужна дополнительная работа по их округлению для заданных небольших значений *N* и по исследованию округленных планов. Для каждой размерности в отдельности имеются планы, которые не выходят за принятые здесь границы по всем характеристикам.

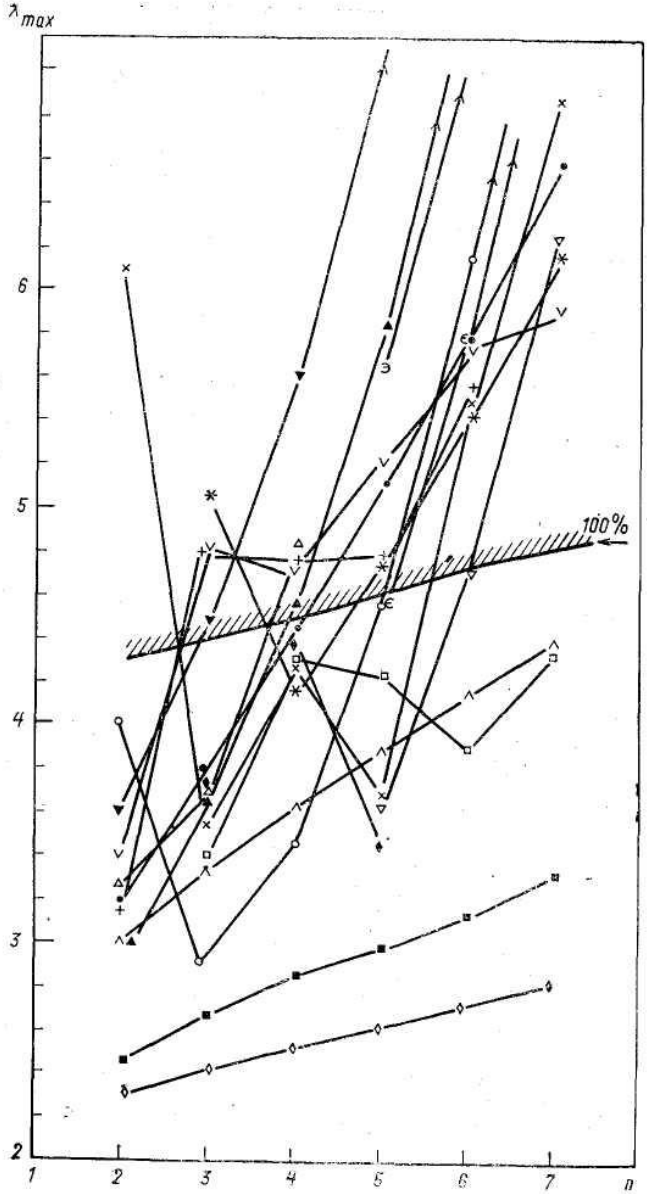


Рис. 14.4. Характеристика λ_{max} для планов в области *a*

Можно предложить следующий способ выбора плана для каждой размерности с учетом всех характеристик. Произвольно устанавливаются границы по каждой характеристике, выбираются все планы, которые не выходят за эти границы; среди этих планов выбирается план, наилучший по одной из характеристик (например, $|\widetilde{\mathbf{M}}^{-1}|$, с учетом числа наблюдений, свойств симметрии, ротатабельности и т. д. Как правило, если учитывать все последние свойства, возможности выбора на последнем этапе будут очень ограничены. Выпишем отдельно для каждой размерности группы симметричных и несимметричных планов, не выходящих за указанные выше границы (табл. 14.18).

Таблица 14.18

Группы планов на кубе с хорошими характеристиками

Размерность	Симметричные планы	Несимметричные планы
$n=2$	D-оптимальный A-оптимальный Q-оптимальный 3^n, композиционный ортогональный Симметричный квази-D-оптимальный	Насыщенный точный D-оптимальный Несимметричный квази-D-оптимальный
$n=3$	D-оптимальный A-оптимальный Q-оптимальный B_3	Насыщенный точный D-оптимальный Композиционный по отношению к планам главных эффектов
$n=4$	D-оптимальный A-оптимальный Q-оптимальный Симметричный квази-D-оптимальный	Насыщенный точный D-оптимальный
$n=5$	3^n B_5 с полурепликой Хартли	Несимметричный квази-D-оптимальный Композиционный по отношению к планам главных эффектов
$n=6$	Симметричный квази-D-оптимальный	
$n=7$	Симметричный квази-D-оптимальный	

Далее можно обратиться к табл. 14.6÷14.11 и из отмеченных планов по каждой размерности выбирать, например, те планы, которые имеют подходящее число наблюдений и наименьшую величину характеристики $|\widetilde{\mathbf{M}}^{-1}|$. Например, если для n=3 есть возможность сделать примерно 13—16 наблюдений, то можно использовать план B_3. Границы характеристик для выбора планов здесь установлены совершенно произвольно; расширяя эти границы, можно несколько увеличить возможности выбора в соответствии с различными требованиями.

Рассмотрим по характеристикам особенности планов при ограничениях типа *б,* т. е. планов на шаре. Здесь исследовались главным образом ротатабельные и симметричные планы. Для этих планов и этой области характерно плавное, стабильное, изменение характеристик с увеличением размерности.

5. Характеристика $|\widetilde{\mathbf{M}}^{-1}|$, область *б* (рис. 14. 5).

По величине $|\widetilde{\mathbf{M}}^{-1}|$ большинство планов лежит не выше 15%-ной границы по сравнению с *D*-оптимальными планами. Исключение составляют планы 3^n, построенные на кубе, вписанном в шар *б*, для $n\geq 3$; насыщенные симплексно-суммируемые планы для $n\geq 5$; ротатабельные планы Бокса с полным ядром для $n\geq 6$. Характеристики трехуровневых планов Бокса — Бенкена практически совпадают с *D*-оптимальными.

Характеристики $|\widetilde{\mathbf{M}}^{-1}|$ для ротатабельных планов Бокса с полным ядром, начиная с n=5, довольно резко ухудшаются (для n=6 планы выходят далеко за пределы 15%-ной границы), в то время как планы с половинным ядром для этих размер- ностей достаточно близки к *D*-оптимальным. Это замечание касается и характеристик $\widetilde{\widetilde{d}}$ и $\widetilde{\mathrm{tr}}$.

6. Характеристика $\widetilde{\widetilde{d}}$, область *б* (рис. 14.6).

По величине $\widetilde{\widetilde{d}}$ основная часть планов лежит не выше 20%-ной границы по отношению к лучшим планам. Лучшими для $n\leq 5$ являются трехуровневые планы Бокса — Бенкена, для n=6 и 7 — непрерывные *D*-оптимальные планы. Начиная с n=3, за пределы 20%-ной границы выходят планы 3^n, насыщенные симолексно-суммируемые и планы Хартли (последние, за исключением n=5).

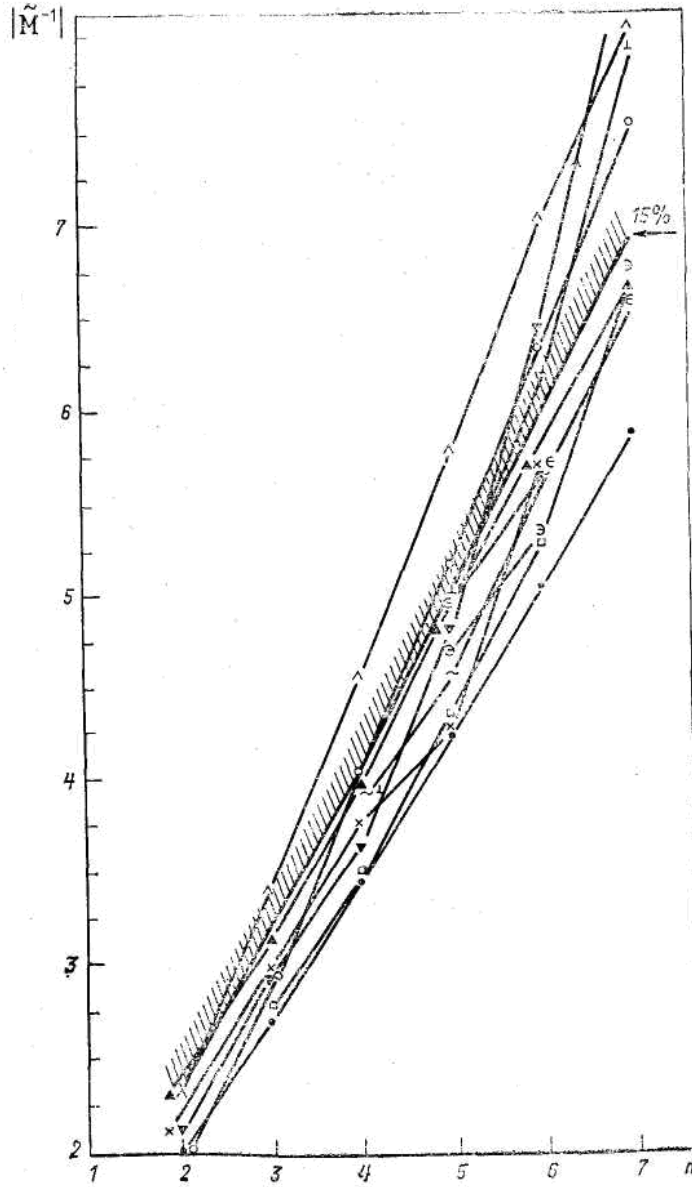


Рис. 14.5. Характеристика $|\tilde{M}^{-1}|$ для планов в области *б*

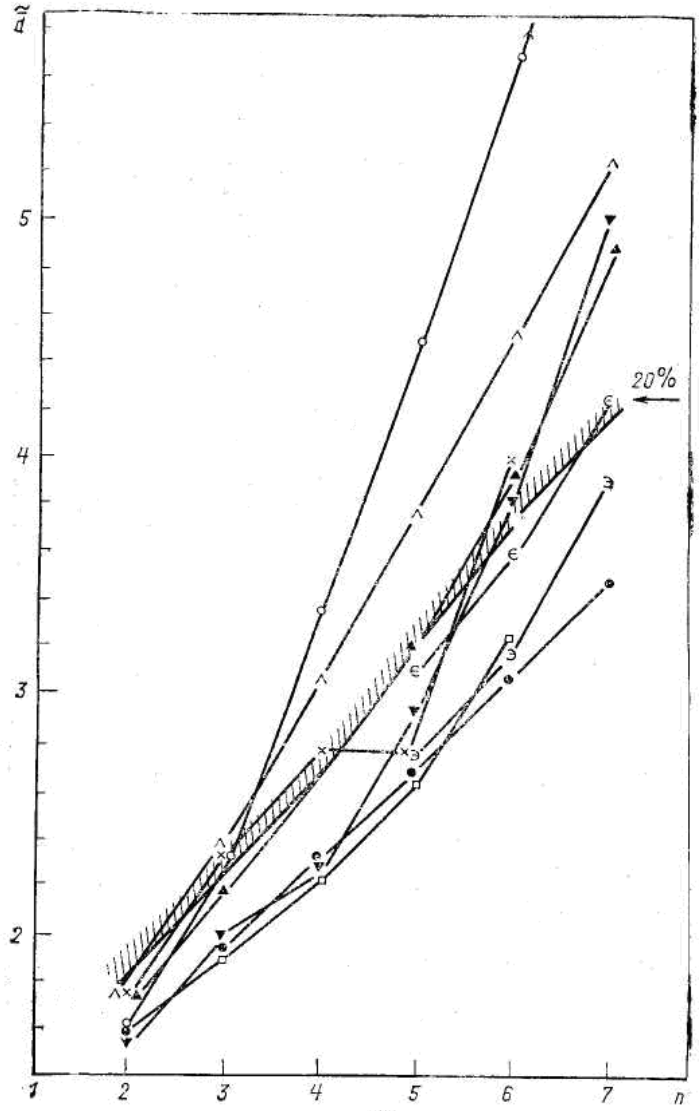


Рис. 14.6. Характеристика $\widetilde{\widetilde{d}}$ для планов в области *б*

7. Характеристика $\widetilde{\mathrm{tr}}$, область *б* (рис. 14.7).

Графики для $\widetilde{\mathrm{tr}}$ очень схожи с графиками для характеристик $\widetilde{\widetilde{d}}$, характер изменения кривых совершенно одинаков.

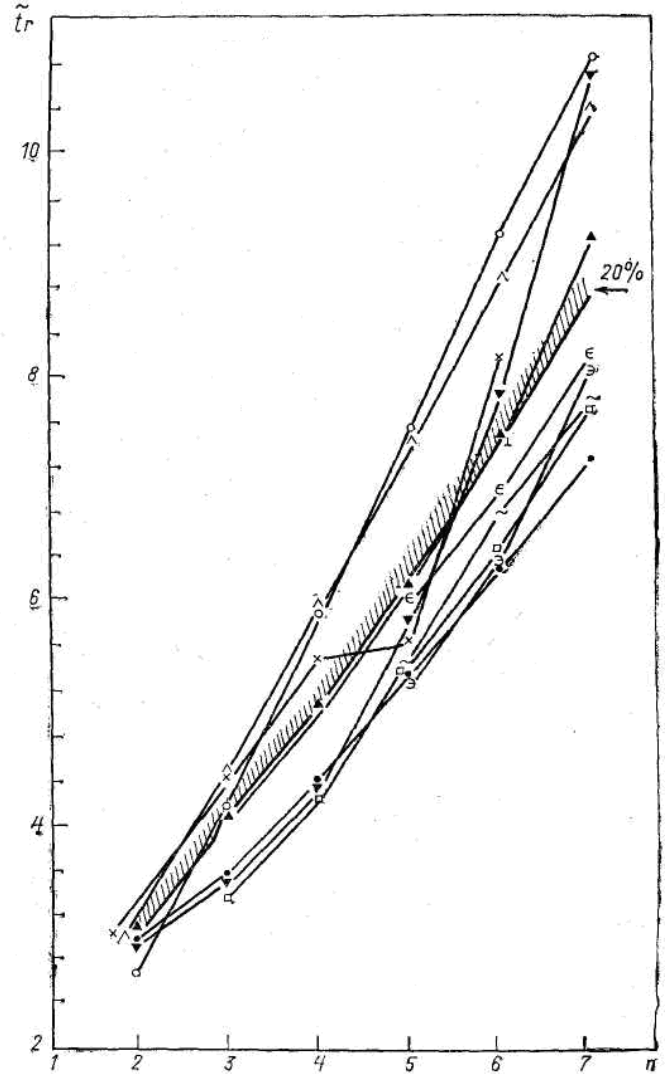


Рис 14.7. Характеристика $\tilde{t}r$, для планов в области *б*

8. Характеристика $\tilde{\lambda}_{\max}$, область *б* (рис. 14.8).

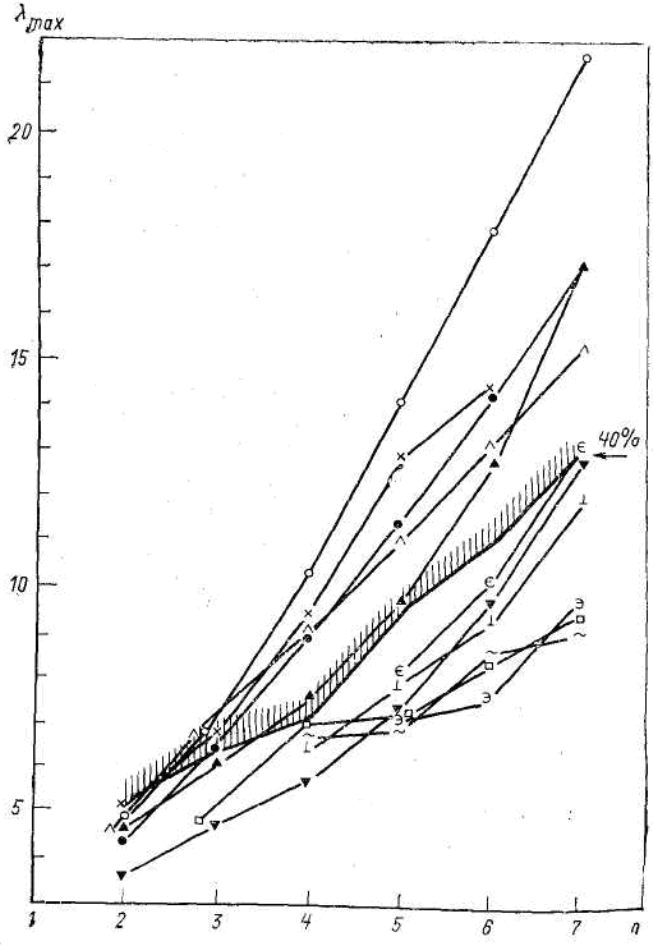


Рис. 14.8. Характеристика $\tilde{\lambda}_{\max}$ для планов в области *б*

По характеристике $\tilde{\lambda}_{\max}$ для всех размерностей (кроме n=5) лучшими являются ротатабельные планы Бокса (для n=6 и 7 с полурепликой). Для n=5 лучший—ротатабельный симплекено-суммируемый план. При n=4 ротатабельный план Бокса, трехуровневый план Бокса — Бенкена и симметричный квази-*D*-оптимальный план по существу различаются

лишь по числу нулевых точек; два последних могут быть получены из первого поворотом плана вокруг нулевой точки. Непрерывные *D*-оптимальные планы по $\tilde{\lambda}_{\max}$ находятся в числе худших. Уже для n=4 их характеристики лежат выше 40%-ной границы по отношению к лучшим планам. Для остальных планов имеют место в основном те же закономерности, что и для характеристик $\widetilde{\widetilde{d}}$ и $\widetilde{\mathrm{tr}}$.

Сделаем некоторые выводы по всем характеристикам для планов на шаре. Для этой области уже можно выделить *типы* планов, эффективные по всем характеристикам.

К таким относятся планы Бокса — Бенкена, ортогональные и ротатабельные планы Бокса (если, начиная с n=5, использовать ортогональные и ротатабельные планы с половинным ядром). Рассмотрим отдельно планы по всем характеристикам для каждой размерности .

Для n = 2 все исследованные планы лежат не выше выбранных ранее границ. Выпишем отдельно ротатабельные и неротатабельные планы для различных размерностей, начиная с n = 3, не выходящие по всем характеристикам для данной размерности за выбранные границы (табл. 14.19).

Выбор границ относительно лучших планов здесь, как и в случае планов на кубе, произволен, и последняя таблица планов может быть изменена в соответствии с изменением границ по разным характеристикам. Эту таблицу далее можно использовать для выбора плана второго порядка на шаре.

В табл. 14.16 и 14.17 имеются еще две характеристики планов. Это характеристика неротатабельности плана Δ и характеристика неортогональности γ.

Величина Δ вычислялась для планов в областях *а* и *б* по формуле

$$\Delta = \max_{R} \left(\sqrt{d_{\max}(R)} - \sqrt{d_{\min}(R)} \right), \qquad (14.36)$$

где *d(R)*— значения функции *d(x)* в точках, лежащих на расстоянии *R* от центра эксперимента. Значения *d(R)* рассматривались только в направлениях на центры граней всевозможных размерностей куба *а.* Так как рассматриваются не все направления, то вычисленные величины Δ являются только оценками снизу характеристики неротатабельности (14.36). Для ротатабельных планов Δ=0.

Таблица 14.19

Группы планов на шаре с хорошими характеристиками

Размерности	Ротатабельные планы	Неротатабельные планы
$n=3$	*D*-оптимальный Ротатабельный Бокса Насыщенный симплексно-суммируемый	Трехуровневый Бокса—Бенкена Ортогональный
$n=4$	Трехуровневый Бокса—Бенкена Ротатабельный Бокса Ротатабельный симплексно-суммируемый Несимметричный симплексно-суммируемый 112 *а* Несимметричный симплексно-суммируемый 112 *в*	Ортогональный
$n=5$	Ротатабельный Бокса с полным ядром Ротатабельный Бокса с половинным ядром (с полурепликой) Ротатабельный симплексно-суммируемый	Трехуровневый Бокса—Бенкена Ортогональный с полным ядром Ортогональный с половинным ядром
$n=6$	Ротатабельный Бокса с половинным ядром Ротатабельный симплексно-суммируемый	Трехуровневый Бокса—Бенкена Ортогональный с половинным ядром
$n=7$	Ротатабельный Бокса с половинным ядром Трехуровневый Бокса—Бенкена Ротатабельный симплексно-суммируемый	Ортогональный с половинным ядром

Величину

$$\gamma = \frac{\sum_{i,j} \rho_{ij}^2}{k} \tag{14.37}$$

можно рассматривать как некоторую скалярную характеристику неортогональности плана. Для ортогональных планов γ=1 (для модели второго порядка таких планов не существует).

По характеристикам Δ и γ мы не будем проводить подробного сравнения планов, считая, что они просто дают некоторую компактную дополнительную информацию, полезную при выборе плана.

Если при выборе плана мы хотим ориентироваться одновременно на несколько их характеристик, следует рассмотреть некоторые общие тенденции связи между этими характеристиками по всем исследованным планам. Для этого можно, например, чисто формально, понимая, что множество планов, которые мы рассматриваем, не представляет собой случайную выборку, вычислить коэффициенты корреляции между каждой парой характеристик для каждой размерности, и полученные коэффициенты усреднить по всем размерностям. Рассмотрим, например, пару характеристик $\tilde{\tilde{d}}$ и $\tilde{\mathrm{tr}}$. Пусть i — размерность (i =2, 3, . . ., 7), j — номер плана для данной размерности (j=l..... l_i.). Обозначим

$$\tilde{\tilde{d}}_{av_i} = \frac{\sum_{j=1}^{l_i} \tilde{\tilde{d}}_{ij}}{l_i}, \quad \tilde{\mathrm{tr}}_{av_i} = \frac{\sum_{j=1}^{l_i} \tilde{\mathrm{tr}}_{ij}}{l_i}.$$

Тогда

$$r_i\left(\tilde{\tilde{d}},\ \tilde{\mathrm{tr}}\right) = \frac{\sum_{j=1}^{l_i} \left(\tilde{\tilde{d}}_{av_i} - \tilde{\tilde{d}}_{ij}\right)\left(\tilde{\mathrm{tr}}_{av_i} - \tilde{\mathrm{tr}}_{ij}\right)}{\left[\sum_{j=1}^{l_i} \left(\tilde{\tilde{d}}_{av_i} - \tilde{\tilde{d}}_{ij}\right)^2 \left(\tilde{\mathrm{tr}}_{av_i} - \tilde{\mathrm{tr}}_{ij}\right)^2\right]^{\frac{1}{2}}}, \tag{14.38}$$

$$r\left(\tilde{\tilde{d}},\ \tilde{\mathrm{tr}}\right) = \frac{\sum_{i=2}^{7} r_i\left(\tilde{\tilde{d}},\ \tilde{\mathrm{tr}}\right)}{6}. \tag{14.39}$$

Подобные коэффициенты были вычислены для каждой пары характеристик $|\widetilde{M}^{-1}|$, $\widetilde{\widetilde{d}}$, $\widetilde{tr}$, $\widetilde{\lambda}_{max}$ и приведены в табл. 14.20 и 14. 21.

Таблица 14.20

Коэффициенты корреляции между характеристиками планов второго порядка на кубе

Характеристика	$\lvert\widetilde{M}^{-1}\rvert$	$\widetilde{\widetilde{d}}$	$\widetilde{tr}$	$\widetilde{\lambda}_{max}$
$\lvert\widetilde{M}^{-1}\rvert$	1	0,84	0,92	0,48
$\widetilde{\widetilde{d}}$	0,84	1	0,96	0,74
$\widetilde{tr}$	0,92	0,96	1	0,70
$\widetilde{\lambda}_{max}$	0,48	0,74	0,70	1

Таблица 14.21

Коэффициенты корреляции между характеристиками планов второго порядка на шаре

Характеристика	$\lvert\widetilde{M}^{-1}\rvert$	$\widetilde{\widetilde{d}}$	$\widetilde{tr}$	$\widetilde{\lambda}_{max}$
$\lvert\widetilde{M}^{-1}\rvert$	1	0,69	0,74	0,19
$\widetilde{\widetilde{d}}$	0,69	1	0,93	0,69
$\widetilde{tr}$	0,74	0,93	1	0,71
$\widetilde{\lambda}_{max}$	0,19	0,69	0,71	1

Коэффициенты корреляций между величинами $\widetilde{\widetilde{d}}$ и $\widetilde{tr}$ для куба и для шара близки к единице. Наиболее слабо закоррелированы характеристики $|\widetilde{M}^{-1}|$ и $\widetilde{\lambda}_{max}$; для шара их коэффициент корреляции близок к нулю. Этот факт можно учитывать, например, при выборе критерия. Оптимизируя план по параметру $\widetilde{tr}$, мы имеем большую вероятность в результате получить план, близкий к оптимальным по остальным критериям, чем при условии, что мы за основной параметр возьмем $|\widetilde{M}^{-1}|$.

14.4.3. Планы для полиномиальных моделей на симплексе

Следует особо выделить тип ограничений на независимые переменные, который используется при изучении свойств различных

смесей. Сумма компонентов смеси не может превосходить 100%, поэтому мы имеем ограничения на переменные

$$\sum_{i=1}^{n} x_i = 1.$$

В химии и металлургии такие ограничения накладываются на компоненты при построении диаграмм «состав—свойство». Задача планирования эксперимента здесь сводится к выбору плана на (n—1)-мерном правильном симплексе с n вершинами, который задается таким образом:

$$\sum_{i=1}^{n} x_i = 1, \; x_i \geqslant 0 \; (i = 1, \ldots, n). \tag{14.40}$$

В этом случае переменные x_i не независимы; если при таком условии записать полную полиномиальную модель, то условие

$$\sum_{i=1}^{n} x_i = 1.$$

приведет к тому, что она сведется к так называемой ***приведенной модели***. Приведенные полиномиальные модели первого и второго порядков имеют соответственно вид:

$$E\{y\} = \eta_1(\mathbf{x}, \boldsymbol{\theta}) = \sum_{i=1}^{n} \theta_i x_i, \tag{14.41}$$

$$E\{y\} = \eta_2(\mathbf{x}, \boldsymbol{\theta}) = \sum_{i=1}^{n} \theta_i x_i + \sum_{i<j} \theta_{ij} x_i x_j. \tag{14.42}$$

Для ограничений (14.40) в задачах, связанных с изучением диаграмм «состав — свойство», специфика поверхностей отклика такова, что здесь часто нельзя ограничиться полиномами первого и второго порядка, если пытаться построить модель во всей области (14.40). Как правило, поверхности оказываются более сложными, а зачастую и негладкими.

Планированию на симплексе разработано большое количество частных планов, однако, для этого случая пока не имеется достаточно полной систематизации планов, подобной той, которая сделана для планов второго порядка на кубе и на шаре. Возможность четкого задания области планирования и вида модели [может быть и более сложной, чем (14.41) или (14.42)] позволяет решать задачу выбора планов в рамках тех критериев, о которых шла речь в предыдущем разделе.

14.5. Оптимальность в планировании эксперимента для дискретных переменных

В практической деятельности экспериментатору часто приходится иметь дело с дискретными независимыми переменными. Это прежде всего переменные качественного характера. Если мы исследуем, например, влияние на некоторый технологический показатель изменения марки стали или способа обработки сырья, то мы не можем изменению уровней этих факторов поставить в соответствие некоторую числовую шкалу. Мы можем только «перечислить» уровни факторов, присвоив им в произвольном порядке номера 0,1,...,s, имея при этом в виду, что здесь упорядоченность уровней имеет чисто условный характер.

Дискретный характер могут носить и количественные переменные. Например, при получении чистых веществ можно дистиллировать воду 1, 2, 3 раза, но не дробное число раз, фильтровать раствор можно через 1, 2, 3 фильтра, но не через дробное число фильтров.

Если мы хотим для дискретных факторов построить линейную по параметрам модель, то удобно записать ее, проведя несколько иную параметризацию, чем это делалось в случае непрерывных переменных. Мы можем каждому уровню переменной приписать свой параметр ***(эффект уровня)***, а каждому сочетанию уровней любой группы факторов также поставить в соответствие отдельный параметр— ***эффект взаимодействия уровней.***

Если иметь дело с одной переменной, то для непрерывной переменной можно, например, записать полиномиальную модель в виде:

$$E\{y\} = \eta(\mathbf{x}, \theta) = \theta_0 + \theta_1 x, \tag{14.43}$$

для дискретного же случая запишем:

$$y_{ij} = \mu + \alpha_i + \varepsilon_{ij} \ (i = 1, 2;\ j = 1, \ldots, I), \tag{14.44}$$

где μ — неизвестный параметр, так называемое среднее;

α_i — эффект i-того уровня дискретного фактора;

ε_{ij}—ошибка j-того наблюдения на i-том уровне фактора.

Если в модели (14.43) мы имеем два неизвестных параметра, независимо от того, на скольких уровнях в плане мы варьируем переменную, то во втором случае при варьировании на двух уровнях мы имеем дело уже с тремя неизвестными параметрами.

Рассмотрим особенности моделей типа (14.44) для дискретных переменных. Здесь следует обратить внимание на то, что у нас не хватает степеней свободы для оценки всех параметров. Варьируя переменную на двух уровнях, можно оценить только два

параметра, но не три. Поэтому, чтобы справиться с задачей оценки параметров, приходится налагать на них дополнительные ограничения. Если мы положим

$$\sum_{i=1}^{2} \alpha_i = 0,$$

то единственные оценки параметров по методу наименьших квадратов могут быть получены. Такого типа ограничение следует из определения параметров модели эффектов уровней .

Раздел математической статистики, который называется ***дисперсионным анализом***, строится на моделях подобного типа. Обработка результатов наблюдений здесь ведется так, что сначала проверяется гипотеза о равенстве нулю совместного влияния изменения всех уровней данного фактора, т. е. о равенстве нулю величины

$$\sum_{i=1}^{s} (\alpha_i - \bar{\alpha})^2,$$

где

$$\bar{\alpha} = \frac{1}{s} \sum_{i=1}^{s} \alpha_i$$

(для s уровней фактора).

Отвергнув гипотезу о равенстве нулю $\Sigma (\alpha_i - \bar{\alpha})^2$, можно оценить некоторые функции параметров, которые называются *сравнениями.* Сравнения—это такие линейные комбинации параметров

$$\sum_{i=1}^{s} c_i \alpha_i,$$

для которых коэффициенты c_i удовлетворяют условию

$$\sum_{i=1}^{s} c_i = 0.$$

Это условие например, выполняется для линейных комбинаций $(\alpha_i - \alpha_j)$, где $i, j=1,...,s$, т. е. мы можем оценить разности эффектов любых двух уровней фактора. Сравнениями будут и соотношения

$$\alpha_j - \frac{1}{s} \sum_{i=1}^{s} \alpha_i,$$

представляющие собой разности между эффектом j-того уровня и средним по всем аффектам. Оценки параметров при дополнительных

ограничениях — это по существу оценки сравнений последнего типа при этих ограничениях.

Здесь важно обратить внимание на следующее. Тесты в дисперсионном анализе могут быть различными, и поэтому необходимо ***совместно рассматривать и оптимальность плана и оптимальность теста***. Оптимальность плана здесь может рассматриваться двояким образом, с одной стороны, так, как это было сделано в предыдущих разделах, т. е. для получения оптимальных оценок, а с другой стороны, в совокупности с оптимальностью тестов, которые используются для проверки гипотез дисперсионного анализа.

Вторая особенность планирования с дискретными уровнями факторов состоит в том, что ***планы строятся на множестве целых чисел***. Модель накладывает новое ограничение на построение плана: ***план строится на той многомерной решетке, которая определяется числом уровней каждого фактора и членами, входящими в модель.*** Задача построения плана, в отличие от случая непрерывных переменных, превращается в ***комбинаторную задачу***.

Обратим внимание еще на одно обстоятельство: план, построенный для дискретных переменных, может быть использован и для модели с непрерывными переменными. Например, хорошо известный план 2^3, включающий всевозможные сочетания уровней трех двухуровневых факторов, может быть использован для моделей как с непрерывными, так и с дискретными переменными. В непрерывном случае, когда мы строим полиномиальную модель на кубе, точек, входящих в дискретный план, достаточно для получения оценки этой модели. При этом план оказывается оптимальным по многим критериям. Однако здесь был рассмотрен только очень простой частный случай; ***в общем случае построение оптимальных планов для непрерывных переменных не сводится к целочисленным задачам.***

Приведем некоторые сведения исторического характера. Планы для дискретных переменных появились еще в 20-х годах XX века , в связи с необходимостью выбрать экспериментальные точки так, чтобы результаты сельскохозяйственных исследований не зависели от неоднородностей почвы. Одно из возможных решений здесь — рандомизация опытов относительно неконтролируемых переменных. При этом, конечно, существенно увеличивается дисперсия наблюдений. Другое решение—построение планов с разбиением на блоки. При этом вводятся новые переменные, ограничивающие влияние неконтролируемых переменных. Долгое время свойства планов для дискретных переменных диктовались этими требованиями. Только в 50- и 60-х

годах XX века старые комбинаторные схемы стали рассматриваться с точки зрения критериев оптимальности, учитывающих статистические свойства оценок.

Исторически сложилось также и то, что для каждого типа планов с дискретными переменными строилась своя схема проведения вычислений. Это позволяло получать компактные простые вычислительные схемы, но число их было слишком велико. ***Задачу дисперсионного анализа легко переформулировать в терминах регрессионного анализа***, тогда вычислительные процедуры существенно унифицируются, хотя вычисления становятся более громоздкими. Далее будут рассмотрены типы моделей и соответствующие им планы с дискретными переменными.

14.5.1. Классификация планов для дискретных независимых переменных

Чтобы в дальнейшем можно было более конкретно говорить об оптимальности планов для дискретных переменных, приведем сначала короткий обзор различных типов таких планов.

Простейшая схема — однофакторный план, допускающий полную рандомизацию, т. е. план, содержащий определенное число наблюдений на каждом из *s* уровней заданного фактора. Порядок (или место) осуществления каждого из *N* наблюдений может выбираться в соответствии с некоторой случайной схемой.

Математическую модель в этом случае принято записывать таким образом:

$$y_{ij} = \mu + \alpha_i + \varepsilon_{ij} \; (i = 1, \ldots, \; s; \; j = 1, \ldots I), \tag{14.45}$$

где y_{ij} — результат *j*-того наблюдения на *i*-том уровне фактора;

μ — неизвестный параметр, так называемое среднее;

α_i — неизвестный параметр, так называемый эффект *i*-того уровня фактора;

ε_{ij}— случайная ошибка наблюдения.

Все ошибки неоднородности в условиях проведения эксперимента (не связанные с изменением уровней фактора) при полной рандомизации входят в величины ε_{ij}, давая увеличение дисперсии опыта. Для исключения этих ошибок применяется так называемое ***рандомизованное блочное планирование.*** В таких планах все множество опытов разделяется на некоторое количество блоков таким образом, чтобы внутри каждого блока было возможно проведение испытаний для всех уровней основного фактора в однородных условиях. Ошибки, возникающие вследствие неоднородности в

условиях проведения эксперимента, здесь представляются как блоковые эффекты.

Для сохранения общности в изложении теории иногда удобнее рассматривать множество блоков как совокупность уровней нового фактора. Однако необходимо учитывать, что блоковые эффекты часто требуют только исключения, а не оценки. Для учета и исключения влияния двух типов неоднородности (двух блоковых факторов) часто используются ***латинские квадраты.*** Обозначим уровни основного четырехуровневого фактора символами 0, 1, 2, 3. Допустим, что мы хотим поставить 16 опытов, по четыре опыта для каждого уровня основного фактора. Рассмотрим квадрат 4×4, представленный в табл. 14.22.

Таблица 14. 22

Латинский квадрат размера 4×4

2	3	0	1
1	2	3	0
0	1	2	3
3	0	1	2

В каждом столбце и в каждой строке квадрата каждый уровень основного фактора встречается один раз. Комбинаторные построения такого типа называются латинскими квадратами. Будем рассматривать столбцы квадрата, как номера блоков для первого типа неоднородности, номера строк—как номера блоков для второго типа неоднородности. Тогда, осуществляя план в соответствии с этой схемой, мы можем получить взаимно независимые оценки эффектов уровней основного фактора и блоковых факторов. Здесь и далее под оценками параметров имеются в виду их оценки по методу наименьших квадратов при дополнительных ограничениях на параметры.

Ниже мы более подробно остановимся на свойствах и методе построения латинских квадратов.

Часто на практике возникает необходимость разбить эксперимент на такие блоки, что каждый из них не вмещает полного числа уровней основного фактора. В этом случае желательно не просто разбросать уровни внутри блоков, а постараться расположить их таким образом, чтобы, несмотря на неизбежную потерю независимости, получить достаточную информацию об основных эффектах. Отсюда возникла

теория ***неполноблочных планов***. Каждое множество блоков, как и прежде, можно рассматривать как дополнительный фактор, поэтому теорию неполноблочных планов можно представить как частный случай многофакторных (главным образом двухфакторных и трехфакторных) планов.

Наиболее полно развита теория ***сбалансированных неполноблочных планов.*** Это планы с одним множеством блоков: из s уровней основного фактора в каждый из b блоков входит k уровней ($k<s$); каждый уровень встречается в плане r раз; каждая пара уровней в блоках — λ раз.

Рассмотрим, например, неполноблочный план, представленный в табл. 14.23.

Таблица 14. 23

Пример неполноблочного плана

Блоки	Уровни основного фактора		
1	0	2	3
2	1	2	3
3	0	1	2
4	0	1	3

Всего основной фактор здесь имеет четыре уровня, в каждом из четырех блоков мы имеем по три уровня. Каждый из уровней основного фактора встречается в плане три раза, каждая пара уровней встречается в блоках два раза.

В случае, когда имеется два источника неоднородности и вводятся два множества блоковых ограничений, аналогом сбалансированных неполноблочных планов являются неполные латинские квадраты, или *квадраты Юдена.* В таких схемах в блоках одного множества содержатся все уровни основного фактора; относительно же блоков второго множества схема представляет собой сбалансированный неполноблочный план. План в табл. 14.24, например, является квадратом Юдена.

Таблица 14.24

Пример квадрата Юдена

Блоки 1-го множества \ Блоки 2-го множества	1	2	3	4	5	6	7
1	0	1	2	3	4	5	6
2	1	2	3	4	5	6	0
3	3	4	5	6	0	1	2

Здесь по отношению ко второму множеству блоковых ограничений (столбцам) план можно рассматривать как сбалансированный неполноблочный план с константами r=3, λ=1.

Ели при постановке плана без блоковых ограничений мы все N опытов можем осуществлять в случайном порядке, то в блочных планах рандомизацию можно производить только внутри блоков, поэтому в литературе такие планы иногда называются ***планами с ограничениями на рандомизацию.*** В планах же с двумя множествами блоковых ограничений нельзя производить рандомизацию внутри блоков, так как это нарушило бы структуру плана; поэтому здесь случайным может быть, например, сам выбор латинского квадрата из множества возможных латинских квадратов.

Дальнейшим логическим развитием однофакторных планов для дискретных переменных являются *многофакторные* планы, допускающие полную рандомизацию. Для случая двух факторов, например, имеем такую модель:

$$y_{ijk} = \mu + \alpha_i + \beta_j + \gamma_{ij} + \varepsilon_{ijk}$$
$$(i = 1, \ldots, s_1;\ j = 1, \ldots, s_2;\ k = 1, \ldots, K), \quad (14.46)$$

где y_{ijk} — результат k-того наблюдения на сочетании i-того уровня первого фактора и j-того уровня второго фактора;

μ—общее среднее;

α_i — эффект i-того уровня первого фактора;

β_j — эффект j-того уровня второго фактора;

γ_{ij} — эффект взаимодействия i-того уровня первого фактора и j-того уровня второго фактора;

ε_{ijk} — случайная ошибка наблюдений.

Здесь мы можем ввести определение *факторной модели и факторного плана,* которые обычно используются для дискретных переменных. ***Полная модель для n факторов— это факторная модель***: она содержит эффекты уровней всех факторов и эффекты взаимодействия всех уровней всевозможных групп факторов. Полную факторную модель можно упростить, опустив некоторое множество членов. Для того чтобы модель оставалась факторной, необходимо выполнение следующего условия: если в модель входит член, представляющий собой эффект взаимодействия уровней каких-либо факторов, то в нее должны входить все эффекты взаимодействия уровней любой подгруппы этих факторов. Например, неполная модель эффектов уровней для четырех факторов

$$y_{ijkl} = \mu + \alpha_i + \beta_j + \gamma_k + \delta_l + \theta_{ij} + \theta_{ik} + \theta_{kj} + \theta_{ijk} + \varepsilon_{ijkl}$$
$$(i = 1, \ldots, s_1;\ j = 1, \ldots, s_2;\ k = 1, \ldots, s_3;$$
$$l = 1, \ldots, s_4) — \qquad (14.47)$$

это факторная модель , модель

$$y_{ijkl} = \mu + \alpha_i + \beta_j + \gamma_k + \delta_l + \theta_{ij} + \theta_{ik} + \theta_{jk} + \theta_{ijk} +$$
$$+ \theta_{ijkl} + \varepsilon_{ijkl}$$
$$(i = 1, \ldots, s_1;\ j = 1, \ldots, s_2;\ k = 1, \ldots, s_3;$$
$$l = 1, \ldots, s_4) \qquad (14.48)$$

не является факторной, так как в нее включены эффекты взаимодействия уровней всех четырех факторов, но не включены эффекты взаимодействия уровней групп двух и трех факторов, содержащих четвертый фактор.

Планы, которые включают переменные с числом уровней, определяемым данной факторной моделью, и позволяют оценить эту модель, называются ***факторными планами*** для данной модели. Факторную модель можно записать и в другой параметризации, представив ее, например, в виде полинома особого типа. Такое представление особенно удобно в случае, когда часть переменных имеет дискретный, а другая часть непрерывный характер.

Полные модели включают эффекты взаимодействий уровней всевозможных групп факторов. Такой тип моделей требует постановки, как минимум, ***полного факторного плана,*** т. е. опытов со всевозможными сочетаниями уровней всех факторов. Это, как правило, обеспечивает избыточную информацию, так как практически эффекты взаимодействия высших порядков редко оказываются значимыми. Поэтому в практических задачах чаще используются неполные факторные модели и соответствующие им ***дробные факторные***

планы. Остановимся несколько подробнее на классификации многофакторных планов.

Самый общий случай многофакторного плана — это план, в котором каждый фактор меняется на произвольном числе уровней, причем на каждом из уровней имеется произвольное число наблюдений. Будем говорить, что для данных d факторов выполняется ***условие пропорциональности частот,*** если число совместных появлений в плане любых уровней этих факторов в N^{d-1} раз меньше произведения чисел их появлений по отдельности (здесь N — общее число наблюдений в плане). Если для любых d факторов из всего множества факторов, включенных в эксперимент, выполняется условие пропорциональности частот, то план называется ***регулярным факторным планом мощности d.*** Эти планы могут использоваться, когда модель включает эффекты взаимодействия уровней факторов вплоть до порядка $[d/2—1]$, где квадратные скобки означают целую часть числа. Другие планы для этой модели называются ***нерегулярными.***

Рассмотрим пример регулярного плана мощности 2.

Уровни факторов будем обозначать 0, 1, 2..... В плане из девяти опытов для трех факторов, записанном в табл. 14. 25, каждый из трех уровней двух первых факторов встречается по три раза, один из уровней третьего фактора встречается три раза, а другой шесть раз.

Т а б л и ц а 14. 25

Пример регулярного плана мощности 2

Номер опыта	x_1	x_2	x_3
1	0	0	0
2	1	0	1
3	2	0	0
4	0	1	1
5	1	1	0
6	2	1	0
7	0	2	0
8	1	2	0
9	2	2	1

Рассмотрим совместные числа появления различных сочетаний уровней первого и третьего факторов. Сочетания 0—0, 1— 0, 2 — 0 появляются по два раза, а сочетания 0— 1, 1 — 1 и 2 — 1 появляются по одному разу. Уровень 0 первого фактора и 0 второго фактора появляются в плане соответственно три и шесть раз, совместно они

появляются два раза; поскольку $\frac{3\times6}{2}=9$, а d—1=1, то для рассмотренных двух уровней факторов выполняется условие пропорциональности частот. Подобную проверку можно провести для любых двух уровней любых факторов.

Планы мощности 2 называются еще планами ***главных эффектов;*** им соответствуют модели, содержащие эффекты уровней и не содержащие взаимодействий (так называемые ***аддитивные модели).***

Для всех регулярных планов вычисления при проверке гипотез методами дисперсионного анализа оказываются чрезвычайно простыми. Кроме того, базируясь на регулярных планах, можно выбрать полиномиальную факторную модель, эквивалентную модели эффектов уровней, такую, что оценки ее параметров оказываются независимыми.

Частным случаем регулярных планов являются симметричные равномерные регулярные планы. ***Симметричным факторным планом*** называется план, все факторы которого имеют одинаковое число уровней; ***равномерным*** называется план, у которого уровни любого фактора встречаются одинаковое для данного фактора число раз. Симметричный равномерный регулярный факторный план мощности d называется ***ортогональной таблицей мощности*** d и обозначается (N, k, s, d), где N — число опытов; k— общее число факторов; s — число уровней каждого фактора; d — мощность плана. В табл. 14.26 приведен пример ортогональной таблицы мощности 2 (9, 4, 3, 2).

Таблица 14. 26

Ортогональная таблица (9, 4, 3, 2)

0	0	0	0
1	0	1	1
2	0	2	2
0	1	1	2
1	1	2	0
2	1	0	1
0	2	2	1
1	2	0	2
2	2	1	0

Часть теории факторных планов является ***теория построения ортогональных таблиц.*** Она фактически является базой и для построения несимметричных факторных планов. В теории построения ортогональных таблиц на особом месте стоят так называемые ***геометрические методы.*** В их основе лежат свойства и методы

построения конечных проективных геометрий. Соответствующие регулярные факторные планы называются ***геометрическими;*** они содержат s^k опытов (где k—целое число). Для заданного геометрического плана можно выделить связанные группы эффектов, чтобы затем включать в модель по одному эффекту из каждой группы. Можно также ставить обратную задачу: построение планов для заданной группы эффектов, входящих в модель.

Частными случаями ортогональных таблиц являются такие широко применяющиеся комбинаторные построения, как *латинский квадрат и латинский куб,* которые в качестве факторных планов эксперимента использовались уже, например, в работе Фишера, относящейся к 1935 г. Частными случаями ортогональных таблиц являются также *множества ортогональных латинских квадратов,* кубов и гиперкубов.

Множество целых чисел 0, l,...,s—1, расположенных в виде матрицы размера *(*s×s*)* называется квадратом размера s. Квадрат называется латинским, если каждое целое встречается ровно один раз в каждой строке и в каждом столбце. Два квадрата одного и того же размера называются ортогональными, если при наложении их друг на друга каждая упорядоченная пара целых чисел встречается ровно один раз. Множество целых чисел 0, 1, 2,...s— 1, расположенных в виде кубической решетки (s× s ×s), называется кубом размера s. Куб называется латинским, если каждое целое встречается ровно s раз в каждой плоскости, параллельной любой грани куба. Два куба называются ортогональными, если при наложении их друг на друга каждая пара упорядоченных чисел встречается s раз. Ортогональная таблица мощности 2 с числом строк $N=s^2$ эквивалентна множеству попарно ортогональных латинских квадратов, а с числом строк $N=s^3$— множеству попарно ортогональных латинских кубов. Ортогональные таблицы, эквивалентные этим комбинаторским построениям, получаются геометрическими методами для случая, когда число уровней s можно представить в виде $s=p^h$, где p — простое число, h — целое. Рассмотрим, например, приведенную выше ортогональную таблицу (9, 4, 3, 2). Упорядочим строки ее так, чтобы первые два столбца имели такой вид, как в приведенной выше таблице (легко показать, что это всегда можно сделать). Будем рассматривать элементы первого столбца как номера строк латинского квадрата, а элементы второго столбца как номера столбцов этого квадрата. Тогда остальные k—2 (здесь k—2=2*)* столбца можно представить как k—2 латинских квадрата, разделив каждый столбец на s столбцов квадрата и записав их последовательно. Таким образом, мы имеем четыре попарно ортогональных квадрата:

0	0	0
1	1	1
2	2	2

0	1	2
0	1	2
0	1	3

0	1	2
1	2	0
2	0	1

0	2	1
1	0	2
2	1	0

Два последних из этих квадратов — латинские. Можно показать, что построенное таким образом множество попарно ортогональных латинских квадратов является полным; их число равно s—1. Множество попарно ортогональных латинских кубов на основе ортогональной таблицы мощности 2 с числом строк s^3 строится аналогичным образом. Можно подобные планы использовать и в записи, принятой для ортогональных таблиц, и в том виде, в котором обычно представляются латинские квадраты и кубы. Последнее представление является традиционным для различных руководств по дисперсионному анализу. В прикладных работах редко оказывается, что все изучаемые факторы имеют одинаковое число уровней, поэтому большее применение имеют ***несимметричные факторные планы***. Симметричные же планы представляют собой в основном базу для построения несимметричных эффективных планов. Имеется несколько способов построения регулярных несимметричных планов на основе регулярных симметричных. Некоторые способы дают возможность получать равномерные несимметричные планы. Наиболее универсальный — так называемый способ ***сжатия***— позволяет получать в общем случае регулярные несимметричные неравномерные планы из симметричных, объединяя любые два уровня заданного фактора. Например, если в симметричном факторном плане для четырех трехуровневых факторов (табл. 14.27 столбец *а*) для четвертого фактора уровня 0 и 1 поставить в соответствие уровень 0 двухуровнего фактора, а уровню 2 уровень 1 этого фактора, то получим регулярный несимметричный план для трех трехуровневых и одного двухуровнего фактора (табл. 14. 27, столбец *б*).

Таблица 14.27

Построение несимметричного плана методом сжатия

а				*б*			
x_1	x_2	x_3	x_4	x_1	x_2	x_3	x_4
0	0	0	0	0	0	0	0
0	1	1	2	0	1	1	1
0	2	2	1	0	2	2	0
1	0	1	1	1	0	1	0
1	1	2	0	1	1	2	0
1	2	0	2	1	2	0	1
2	0	2	2	2	0	2	1
2	1	0	1	2	1	0	0
2	2	1	0	2	2	1	0

14.5.2. Планы взвешивания

К разделу планов с дискретными уровнями факторов следует отнести так называемые планы взвешивания, хотя исторически сложилось так, что задача выбора этих планов стоит несколько изолированно от других задач планирования эксперимента. Модели, о которых будет идти речь в этом разделе, могут использоваться в различных технических приложениях, термин «взвешивание» здесь применяется лишь потому, что процедура взвешивания предметов очень наглядно интерпретирует физический смысл моделей такого типа. Примеры некоторых планов взвешивания уже приводились выше. Здесь рассмотрим эту проблему несколько более детально.

Задача взвешивания формулируется следующим образом. Нужно оценить массу n предметов путем взвешивания их на двухчашечных весах со стрелкой, причем должна быть исключена систематическая погрешность прибора. Пусть производится N взвешиваний. В каждом из них одна часть предметов может быть помещена на правую чашку весов, другая часть — на левую, некоторые предметы могут в заданном взвешивании не участвовать.

Матрица плана взвешивания для n предметов с элементами x_{iu} вводится следующим образом: x_{iu} =1, если i-тый предмет в u-том взвешивании помещается на правую чашку весов, x_{iu} = — 1, если на левую и x_{iu} = 0, если i-тый предмет в u-том взвешивании не участвует. Модель можно записать следующим образом:

$$E\,y_u = \theta_0 + \sum_{i=1}^{n} \theta_i\, x_{iu}, \tag{14.49}$$

где θ_0 — неизвестная систематическая погрешность весов;

θ_i — неизвестная масса i-того предмета.

Нужно найти такую матрицу планирования, которая позволила бы оценить параметры θ_0 и θ_i (i=1,..., n) так, чтобы свойства оценок отвечали некоторым заранее выбранным критериям оптимальности. Планы взвешивания для этой модели не есть факторные планы. Модель линейна по независимым переменным; такого рода факторным моделям соответствуют факторные планы, в которых переменные варьируются на двух уровнях. В нашем же плане взвешивания независимые переменные изменяются на трех уровнях. Таким образом, эта задача имеет несколько обособленный характер.

Возможна вторая постановка задачи, при которой элементы матрицы плана суть +1 и 0. Такая постановка отвечает задаче взвешивания на одночашечных (безменных) весах, в отличие от

первой постановки задачи, когда используются двухчашечные (химические) весы. При этом элементы матрицы плана x_{iu} =1, если *i*-тый предмет помещен на весы в *u*-том взвешивании, и x_{iu}=0 в противном случае. Для этой постановки задачи также может использоваться модель (14.49); здесь параметр θ_i означает половину массы *i*-того предмета, соответствующие планы взвешивания будут факторными планами. Отдельно рассматривается проблема взвешивания без смещения, когда априори известно, что θ_i=0.

Неизвестный свободный член в модели соответствует взвешиванию на весах с «невыверенным нулем», или со смещением. В последнем случае известно положение стрелки весов без ошибки, когда ни на одной чашке весов нет предметов. На критериях оптимальности для планов взвешивания мы остановимся в следующем разделе.

14.5.3. Постановка задачи об оптимальности планов с дискретными независимыми переменными

Длительное время основными критериями оптимальности при выборе планов с дискретными факторами были возможность рандомизации и простота обработки при проведении дисперсионного анализа. Для многофакторных планов наиболее важным критерием считалась регулярность планов. Расчеты для регулярных планов очень просты и могут проводиться без при влечения ЭВМ. В определенном смысле регулярность эквивалентна критерию ортогональности планов, для регулярных планов независимы оценки параметров полиномиальных моделей, эквивалентных моделям эффектов уровней. В моделях же эффектов уровней для таких планов равны нулю ковариации между группами оценок параметров, относящихся к каждому фактору.

С развитием работ, посвященных критериям оптимальности в планировании эксперимента, появилась возможность взглянуть на старые комбинаторные схемы с точки зрения более общих статистических критериев.

Имеется некоторая особенность в методах обработки экспериментов с дискретными факторами. Для моделей с непрерывными переменными обычно сначала находят оценки параметров моделей с помощью метода наименьших квадратов, а далее, если нужно, проверяется гипотеза о их незначимости с помощью некоторых статистических тестов. Для моделей же с дискретными переменными принято сначала проверять гипотезы о незначимости определенных групп параметров с помощью методов дисперсионного анализа, а далее, если такого рода гипотезы отвергаются, находить методом наименьших квадратов

оценки параметров при наличии ограничений на некоторые линейные комбинации параметров.

Таким образом, для дискретных факторов важно выбрать такой план эксперимента, чтобы уменьшить вероятность ошибки при проверке гипотез с помощью некоторого теста на первом этапе. Здесь важна уже совокупность свойств плана и свойств теста. Тесты обычно характеризуются свойствами их функции мощности, т. е. вероятностью отвергнуть неверную гипотезу в зависимости от истинных значений параметров. Кифер впервые ввел понятие ***процедуры как совокупности плана эксперимента и теста для проверки гипотезы***. Свойства процедуры наиболее полно характеризуют достоверность выводов в задачах дисперсионного анализа.

Поскольку еще речь не шла о свойствах тестов, то введение понятия критериев оптимальности процедур было бы затруднительным. Здесь важно отметить, что и в этом случае не теряет смысла выбор планов в соответствии с теми критериями, о которых говорилось ранее. Об этом можно судить, например, по следующим результатам, принадлежащим Киферу.

Как уже отмечалось, неполноблочные планы можно рассматривать как планы с дискретными уровнями для двух факторов — ***основного и блокового.*** Будем рассматривать множество планов для двух дискретных факторов; при этом первый фактор имеет *s* уровней, второй — *b* уровней, а в сочетании с каждым уровнем второго фактора может встречаться ровно $k<s$ уровней первого фактора (это последнее условие означает, что размер блока задан). Кифер показал, что на множестве таких планов с заданными константами сбалансированные неполноблочные планы, если они существуют, являются *D*-оптимальными для оценки сравнений относящихся к первому фактору, а вместе с *F*-критерием для проверки гипотез относительно этих сравнений такие планы образуют оптимальную в некотором смысле процедуру.

Аналогичное утверждение было доказано относительно квадратов Юдена. На множестве планов для трех дискретных факторов (таких, что число уровней первого, второго и третьего факторов соответственно s, *I, K* с числом наблюдений *N=IK)* квадраты Юдена, если они существуют, *D*-оптимальны для оценки сравнений, относящихся к первому фактору, и вместе с *F*-критерием образуют оптимальную процедуру. Заметим, что необходимым условием существования квадрата Юдена является требование, чтобы одно из отношений *I/s* или *K/s*— было целым.

Поскольку на некотором этапе необходимо получать оценки по методу наименьших квадратов параметров моделей для дискретных планов (с учетом ограничений на параметры) и линейных функций от параметров сравнений, то на критерии оптимальности планов здесь можно смотреть и в прежнем смысле — как на критерии для выбора планов при получении оптимальных оценок вне зависимости от тестов для проверки гипотез.

В раде работ рассмотрен вопрос об оптимальности регулярных факторных планов. Рассматривается множество всевозможных факторных планов для заданной факторной модели. Точки плана могут выбираться в любом сочетании уровней для n факторов с заданным числом уровней. Таким образом, областью планирования здесь является многомерная решетка с $s_1, s_2,...,s_n$ узлами, где s_i — число уровней i-того фактора. Показано, что для заданной модели регулярный факторный план D-оптимален тогда и только тогда, когда он равномерен. Таким образом, все равномерные факторные планы являются D-оптимальными планами для оценки параметров факторных моделей.

Кроме того, здесь найдены достаточные условия оптимальности планов для случая, когда только часть факторов в факторной модели имеет дискретный характер**,** другая же часть факторов — количественного характера, уровни их могут выбираться произвольно. Приводятся результаты относительно оптимальности регулярных факторных планов с точки зрения критериев A и Q.

Отдельно можно рассмотреть вопрос о критериях оптимальности для планов взвешивания. Критерии эффективности планов взвешивания были введены Мудом, Кишеном и Эренфелвдом. По существу эти критерии сводятся к критериям A-, D- и E-оптимальности. Областью планирования $\mathfrak{X}$ в этой задаче являются вершины куба a для задачи взвешивания на одночашечных весах и вершины этого куба вместе с центрами его граней всевозможных размерностей для задачи взвешивания на двухчашечных весах.

Представляло бы интерес нахождение A-, D- или E-оптимальных планов взвешивания в классе планов первого порядка на кубе. Однако обычно задача так не ставится. В основном оптимальные планы отыскиваются, во-первых, в классе планов взвешивания, а во-вторых, в классе планов с заданным числом наблюдений (в большинстве случаев в классе насыщенных планов). Однако к этим двум естественным ограничениям добавляется еще одно: множество рассматриваемых планов сужается до множества планов, обладающих определенной информационной матрицей. В этой матрице между собой равны все

диагональные элементы с одной стороны и внедиагональные — с другой.

Таким образом, информационная матрица зависит всего от двух параметров. Такое упрощающее предположение несколько обедняет постановку задачи, однако дает возможность в некоторых случаях ее решить. Отказ от такого предположения был осуществлен только для случая, когда отыскивались *D*-оптимальные планы.

Первый пример этого — нахождение *D*-оптимальиых планов в классе насыщенных планов. При этом было показано, что такие планы совпадают с *D*-оптимальными планами в классе насыщенных планов первого порядка на кубе. Нахождение таких планов стало возможным только с применением вычислительной техники. Второй пример относится к построению планов взвешивания для безменных весов без смещения, *D*-оптимальных в классе планов первого порядка на кубе. Такие планы представляют практический интерес, поскольку содержат небольшое количество точек.

Таким образом, несмотря на некоторую изолированность проблемы взвешивания, она легко умещается в рамки общей для планирования экспериментов системы критериев.

Методы планирования экспериментов для дискретных факторов широко используются в прикладных работах. Факторные модели могут удовлетворительно описывать различные зависимости в металлургии, химии, биологии, сельском хозяйстве и т. д. Поэтому довольно остро стоит вопрос о создании хороших ***каталогов факторных планов***. Однако уже из определения факторной модели ясно, что число факторных моделей очень велико. Даже если зафиксировать число факторов n и число уровней s_i $(i=1,..., n)$ каждого фактора, то трудно выписать всевозможные факторные модели для этих факторов, если n и s_i не очень малы.

Число различных способов построения факторных планов также велико, один только способ построения геометрических факторных планов, например, для двухуровневых факторов с числом наблюдений $N=32$, дает тысячи различных планов для разных моделей. Поэтому при ***создании <u>каталога</u> приходится иметь дело не с набором планов, а с набором <u>способов построения планов</u>***. Задача построения эффективного плана для заданной факторной модели не всегда может быть легко решена даже специалистом-математиком. Такого рода особенности факторных моделей и планов приводят к идее создания ***машинного каталога факторных планов. Такой каталог содержит не сами планы, а <u>набор способов построения планов</u>***. И только в результате работы машины может быть выяснено, можно ли данным

способом построить план, обладающий нужными свойствами для заданной модели.

Имеются работа по построению алгоритмов и программ машинного каталога факторных планов .

14.6. Выбор оптимальной стратегии в динамических задачах

До сих пор рассматривались критерии оптимальности статистических задач, в которых модель изучаемого явления задана, и целью эксперимента является оценка ее параметров. Теперь предстоит рассмотреть проблему оптимизации в динамических задачах. Строго говоря, к динамическим надо было бы отнести те задачи, в которых исследователю приходится двигаться в пространстве независимых переменных, выбирая ту его область, которая может оказаться наиболее благоприятной для дальнейшего исследования. Весь класс подобных задач отличается от ранее рассмотренных тем, что ***экспериментатора интересует уже не модель изучаемого явления, а сама процедура поиска того пространства независимых переменных или той его области, где может находиться что-то благоприятное для него.*** Далеко не всегда можно построить математическую модель для процедуры поиска. Во многих случаях приходится просто ограничиваться разговором на математическом языке о том, как лучше вести поиск. И в этом случае не удается достаточно отчетливо сформулировать критерии оптимальности поиска. Конечно, далеко не всегда можно четко разграничить статические задачи от динамических. Иногда проблема оказывается поставленной так, что приходится решать одновременно две задачи — динамическую и статическую. Однако исходя из дидактических соображений все же разумно проводить отчетливое разграничение в логической структуре двух разных постановок задач.

Ниже показано, как решается вопрос о выборе оптимальной стратегии в динамических задачах.

14.6.1. Движение в направлении к экстремуму

Широкий класс экспериментальных исследований можно отнести к классу экстремальных задач. Здесь речь идет о поиске той области пространства независимых переменных, где изучаемый процесс протекает оптимальным образом. В задачах такого типа обычно приходится иметь дело с достаточно большим числом независимых переменных. Такие задачи возникают тогда, когда механизм явления недостаточно известен. В качестве модели изучаемого явления

приходится выбирать полиномы. Интерпретация результатов исследования, представленных полиномиальной моделью, делается с помощью ***анализа его геометрического образа — поверхности отклика***, поэтому данный класс задач принято также называть (особенно в зарубежной литературе) планированием при изучении поверхностей отклика.

При решении экстремальных задач нет необходимости описывать поверхность отклика одним полиномом во всей интересующей исследователя области независимых переменных. В этом случае пришлось бы обращаться к полиномам слишком высоких степеней — задача стала бы непомерно громоздкой. Выгоднее ***широко поставленную задачу решать последовательно, разбивая ее на ряд локальных задач.*** Сначала выбирается некая небольшая область в пространстве независимых переменных и в этой области ставится эксперимент, результаты которого представляются полиномом первой степени. Далее происходит движение по поверхности отклика в направлении градиента линейного приближения. Если нужно, делается еще одно линейное приближение и так продолжается до тех пор, пока исследователь не попадает в ту область пространства независимых переменных, где уже приходится ставить эксперименты для представления результатов полиномом второго порядка. Эта шаговая процедура решения экстремальной задачи была впервые предложена Боксом и Уилсоном в 1951 г. В настоящее время она широко и успешно применяется в самых разнообразных областях исследовательской деятельности и подробно описана во многих руководствах. Здесь важно обратить внимание на то обстоятельство, что, строго говоря, ***нет отчетливо сформулированной математической модели для выбора всех этапов шаговой процедуры и нет четко сформулированных критериев оптимальности***. Разговор о движении ведется на математическом языке, но не все остается ясным. После первого сообщения Бокса и Уилсона появилось, казалось бы, очень серьезное возражение: движение по градиенту не инвариантно к метрике пространства независимых переменных. Изменяя масштабность по одной из координатных осей, мы можем увеличить или уменьшить крутизну поверхности в направлении этой оси. Выбор масштабности всегда произволен. Возникает вопрос, в чем же тогда физический смысл движения по градиенту. В дальнейшем оказалось, что это, казалось бы, неблагоприятное обстоятельство можно удобно использовать, варьируя метрику пространства независимых переменных и таким образом изменяя стратегию движения.

В логическом плане здесь все оказывается очень поучительным: нет модели для процедуры движения, не ясно, что и в какой степени оптимизируется, нет однозначных решений, вытекающих из общих соображений, формулируемых на языке математики, и все же все процедуры становятся логически легче осмысливаемыми, чем это было раньше, при традиционном методе поиска оптимальных условий протекания изучаемых процессов, когда эксперименты ставили так, что каждую переменную варьировали по очереди и затем по результатам таких однофакторных экспериментов пытались угадать местоположение экстремума. В этом успех метода с его частичной, очень неполной формализацией.

14.6.2. Сужение области пространства независимых переменных

При решении экстремальных задач приходится иметь дело с одной из стратегических задач динамического характера — сужать область пространства независимых переменных. Один раз это приходится делать при выборе той части области независимых переменных, где поверхность отклика можно было бы представить полиномом первого порядка. Эта задача сама по себе достаточно неопределенна***. Область надо выбирать, с одной стороны, достаточно узкой — иначе полином первого порядка не будет адекватно описывать изучаемый процесс, с другой стороны, — возможно более широкой, с тем, чтобы возможно меньше была дисперсия оценок коэффициентов регрессии.***

Второй раз к сужению области независимых переменных приходится обращаться в том случае, когда полином второй степени, построенный в районе оптимального протекания процесса, адекватно не описывает результаты наблюдения. В этом случае можно принять одно из следующих решений.

1. Попробовать произвести преобразование независимых переменных и зависимой переменной, построив алгоритмы преобразования так, чтобы они позволили получить новые переменные, в пространстве которых может быть построена адекватная полиномиальная модель. Иногда таким путем удается получить эффективные результаты. В одной из работ приводится такой пример. Исследователь включил в рассмотрение среди прочих и две такие переменные: x_i — амплитуду циклической нагрузки и x_j — длину нити. В пространстве таких независимых переменных не удалось получить достаточно простой модели, адекватно описывающей наблюдения. Преобразование переменных позволило

найти почти очевидное, имеющее, физический смысл решение — перейти к одной переменной $x_к=x_i/x_j$ — дробной амплитуде нагрузки, и все стало хорошо: достаточно простая модель оказалась адекватной, улучшилась точность в оценке параметров, облегчилась физическая интерпретация. ***Обращение к языку математики позволило восполнить недостаточную интуицию исследователя***. Однако ясно, что в общем случае такой «механический» поиск лучшей модели не может дать хороших результатов. Модель можно вывести логически только из некоторых предпосылок, но отнюдь не из результатов наблюдений. Предпосылки возникают в нашем сознании как догадки.

2. Перейти от представления результатов в виде полинома второй степени к полиному третьей степени. Это потребует, естественно, дополнительных опытов и очень осложнит интерпретацию.

3. Сузить исследуемую область пространства независимых переменных. Здесь опять-таки надо суметь так провести эту процедуру, чтобы получить область, в которой полином второй степени описывает результаты наблюдений адекватно и в то же время с максимально возможной точностью.

Какое из этих решений принять? Если принять третье, то как его выполнять? Здесь мы опять имеем дело с процедурой, которая не задается какой-либо моделью. И все же само обсуждение возможных вариантов ведется с высокой степенью логической четкости. Отсюда и привлекательность такого способа обсуждения динамической задачи.

14.6.3. Движение в пространстве независимых переменных

Одна из важнейших задач управления технологическим процессом непосредственно на заводе — это слежение за неконтролируемым изменением технологического процесса. Любой технологический процесс зависит от многих независимых переменных, не поддающихся контролю. Их спонтанное изменение приводит к дрейфу области оптимального протекания процесса. Нужно, варьируя контролируемые переменные, находить области, благоприятные для протекания процесса. Задача сводится к поиску условного экстремума в той своеобразной ситуации, когда ограничивающие условия самопроизвольно изменяются и остаются неизвестными.

Поиск условного экстремума ведется путем непрерывно протекающего эксперимента. Условия протекания технологического процесса все время изменяются — процесс слегка «покачивается» с тем, чтобы в результате проведения технологических операций получать не только нужную продукцию, но и информацию о том

направлении, в котором надо двигаться, чтобы все время находиться вблизи точки с наилучшим в некотором смысле выходом продукции.

Один из методов решения этой задачи — это предложенное Боксом ***эволюционное планирование***, которое представляет собой просто некоторую модификацию планирования эксперимента для поиска экстремума. Существенно новой здесь оказалась стратегия всей процедуры. Каждый цикл опытов проводится с *n*-кратным повторением для понижения влияния шумов, которые очень велики в технологических производственных процессах. Поэтому первое, что надо суметь сделать — это ***выбрать некоторым разумным образом число параллельных опытов n.*** Затем, после завершения цикла надо принять решение о том, что делать дальше. Можно, например, перенести центр эксперимента в новую, более благоприятную точку пространства независимых переменных или же поступить иначе—исключить из рассмотрения часть независимых переменных, заменив их на новые переменные, ранее не участвовавшие в эксперименте, и т. д. В этой процедуре не возникало новой проблемы с выбором плана—оптимальность используемых здесь факторных планом может рассматриваться в рамках критерия *D*-оптималыюсти. Что касается стратегии, т.е. выбора процедуры, то ее логика развивалась на чисто интуитивных основаниях.

Здесь имеет место сочетание задач двух типов — статической, когда реализуется D-оптимальный план в той или иной области пространства независимых переменных, и динамической, когда принимается какое-то решение о перемещении в пространстве независимых переменных. В первом случае есть модель технологического процесса, заданная полиномом, и есть критерии оптимальности для выбора соответствующего плана, во втором случае имеются только некоторые высказывания весьма общего характера. Они не определяют однозначной программы действия, но дают возможность отчетливо обсуждать возможные альтернативы.

Несколько позднее была предложена симплекс-процедура для решения той же задачи. В этом случае наблюдения осуществляются в вершинах правильного симплекса, построенного в многомерном пространстве независимых переменных. Затем зеркально отображается та вершина симплекса, где выход технологического процесса оказывается минимальным. Отображенная точка вместе с оставшимися вершинами образует ***новый симплекс***. Далее продолжается та же процедура отображения. Алгоритм отображения имеет несколько дополнительных правил, позволяющих исключить процедуру закручивания вокруг одной точки. Можно показать, что, применяя

такую процедуру, мы найдем область экстремума с точностью, задаваемой размерами симплекса.

Затруднения возникли при попытках сравнить стратегию симплекс-процедуры с другими стратегиями эволюционного планирования. Особенно остро встает вопрос о сравнении стратегий, когда требуется сравнить ***регулярные процедуры*** прослеживания за дрейфом экстремума со ***случайными процедурами***.

Симплекс-процедуре был противопоставлен метод случайного поиска. В своей простейшей форме случайный поиск сводится к следующему: в n-мерном пространстве независимых переменных выбирается исходная точка $\mathbf{x}_i$, и через нее проводится прямая в случайном направлении; на этой прямой по обе стороны $\mathbf{x}_i$ на расстоянии ρ_i реализуются два опыта; опыт с лучшим результатом задает исходную точку $\mathbf{x}_{i+1}$ для случайного построения второй прямой и т. д. Случайный поиск, строго говоря, не включает в себя задачи планирования— это процедура, в которой задается только стратегия.

Сравнение метода случайного поиска с симплекс-процедурой можно производить путем моделирования задач на ЭВМ. Но при этом нужно выбрать критерии сравнения и четко оговорить условия проведения моделирующих опытов. Например, в одной из математических работ, посвященных такому сравнению, чтобы поставить сравниваемые методы в одинаковые условия, авторы потребовали, чтобы ρ_i было равно радиусу сферы, описанной вокруг симплекса. С позиций математики такой подход казался вполне логичным. Однако с позиций экспериментатора это требование вызвало явное недоумение: при проведении случайного поиска исследователь уже во втором опыте выходит за границы того куба, которым ограничено пространство независимых переменных, отведенных для эксперимента. Чем выше размерность пространства независимых переменных, тем в более неблагоприятных условиях оказывается симплекс-процедура: она будет проводиться в сфере меньшего радиуса, чем процедура случайного поиска. Нужно некоторым специальным образом переделать стратегию случайного поиска, чтобы сделать ее сопоставимой с симплекс-процедурой.

В одной из работ приводится коллекция критериев для сравнения методов поиска экстремума. Она делится на ***локальные и глобальные критерии***. В локальных критериях рассматриваются потери на поиск на одном этапе и вероятность ошибки, т. е. вероятность ошибочного шага. В нелокальных критериях рассматривается число проб, необходимое для решения поставленной задачи с заданной невязкой (точностью), и невязка, под которой понимается среднее отклонение

найденного значения от экстремума в данной ситуации. Следует увеличить число критериев для сравнения этих стратегий, и, пользуясь этими критериями, получают все новые и новые результаты. Нужно обратить внимание и на то обстоятельство, что сравнение различных методов поиска проводилось при явно упрощенной постановке задачи, когда не принималось во внимание неконтролируемое движение экстремума.

В логическом плане возникшая ситуация выглядит так. Есть отчетливо записываемые алгоритмы поиска. Они представляют собой запись того, что мы хотим, или, лучше сказать — можем делать. Но нет возможности построить систему критериев оптимальности. Мы не можем придумать ничего такого, что позволило бы нам сказать, как надо наилучшим образом ловить то, что от нас неизвестным образом ускользает.

Исследователь, вероятно, обратил внимание на то, что содержание этого раздела выглядит несколько размытым (нечетким). Размытость ситуации неизбежно приводит к размытости решений, если даже они и формулируются в математических терминах. Однако, и такие задачи, с использованием математического аппарата теории нечетких множеств, теории нечеткой логики, теории нечетких решений, позволяют в настоящее время успешно решать обсуждаемые выше задачи.

14.7. Критерии оптимальности в отсеивающих экспериментах

14.7.1. Уменьшение размерности пространства независимых переменных

Иногда в процессе исследования приходится выбирать само пространство независимых переменных, выделяя представляющие интерес переменные из большого числа потенциально возможных. Так возникает задача *отсеивания.* При решении технологических проблем задача отсеивания формулируется следующим образом. Имеется очень большое число независимых переменных, причем мы подозреваем, что некоторые из них существенно влияют на технологический процесс. Эти факторы нужно выделить. Это значит, что надо уменьшить размерность пространства независимых переменных. В новом пространстве должна быть построена простая полиномиальная модель, содержащая линейные члены и взаимодействия. Здесь мы опять имеем дело с задачей смешанного типа. С одной стороны, нужно построить модель процесса (это статическая задача), с другой стороны, нужно уменьшить размерность

пространства независимых переменных — для решения этой задачи должна быть разработана специальная стратегия, которая бы обеспечивала и наибольшую вероятность обнаружения всех значимых эффектов и возможность получения оценок параметров найденной модели.

Первое практическое решение задач подобного рода было предложено Саттерзвайтом в 1956 г. Его исходные предпосылки формулируются так: среди очень большого числа эффектов *s,* взятых под подозрение, должно быть совсем небольшое число доминирующих эффектов. Если все эффекты проранжировать по величине вклада, вносимого ими в суммарную дисперсию, то мы должны будем получить ***экспоненциально убывающую функцию***. Задача исследователя заключается в том, чтобы выделить доминирующие факторы на шумовом фоне, созданном остальными малозначащими факторами и ошибкой эксперимента. При такой постановке задачи приходится использовать планы, в которых число опытов *N* меньше числа эффектов, взятых под подозрение. Число степеней свободы оказывается отрицательной величиной, и задача, естественно, не может быть решена обычными методами.

Модель может быть записана, например, в таком виде:

$$E\{y\} = \theta_0 + \sum_{1+l}^{l} \theta_i x_i + a, \qquad (14.50)$$

где

$$a = \sum_{l=l+1}^{s} \theta_i x_i + \varepsilon, \quad l \leqslant N - 1.$$

Будем предполагать, что влияние $s - l$ малозначимых эффектов можно отнести к шумовому полю, увеличив таким образом дисперсию ошибки опыта;

$$\sigma^2(a) = \sum_{i=l+1}^{s} \theta_i^2 \sigma^2(x_i) + \sigma^2(\varepsilon),$$

где $\sigma^2(\varepsilon)$ —дисперсия чистой ошибки опыта.

Но в модели, записанной в таком виде, слишком много неизвестных: неизвестно, чему равно *l*; неизвестно, какие именно эффекты должны быть включены в группу значимых эффектов. Таким образом, если мы даже зададимся некоторым значением *l* (которое должно быть не больше числа опытов, которые мы в состоянии осуществить), то мы будем иметь C_s^l, различных моделей в разных подпространствах независимых переменных. Из них нужно по некоторому критерию, например по величине остаточной дисперсии, выбрать ту, которая

содержит значимые факторы. Нужно выбрать план, который позволил бы это осуществить хотя бы теоретически (практически мы не имеем возможности делать полного перебора всевозможных сочетаний, и нам придется выбрать какой-то более простой способ выделения значимых эффектов). К плану мы должны предъявить и еще некоторые требования: нужно, чтобы эффекты, которые будут выделены, были по возможности «чистыми», а не представляли собой суммарный результат действия нескольких эффектов.

Таким образом, ***сама постановка задачи — недостаточно четкая***. Мы знаем, что мы хотим, но задача наша слишком сложна; к плану с небольшим числом опытов приходится предъявлять слишком много различных требований. ***Критерий, которым можно характеризовать план, назовем величиной его разрешающей способности — способности выделить доминирующие эффекты из большого числа возможных.***

Для дискриминации моделей типа (14.50) варьировать переменные нужно на двух уровнях. Интуитивно ясно, что в связи с большой сложностью постановки задачи в выборе плана должен участвовать элемент случайности. Критерием «разрешающая способность» можно характеризовать сам метод выбора плана.

Саттерзвайт предложил, например, в каждом опыте верхний или нижний уровень переменных выбирать случайным образом, с вероятностью 1/2. В последующих работах были предложены планы, которые представляют собой некоторое случайное смешение регулярных частей полного факторного плана 2^s.

При обработке отсеивающего эксперимента вместо полного перебора следует прибегать к некоторому методу направленного перебора с наложенными ограничениями, который дает возможность решить эту задачу при достаточном числе опытов N в случае, если выполняются указанные выше исходные предпосылки.

Простейший метод обработки —это построение и исследование так называемых ***диаграмм рассеяния***. Здесь обработка производится для каждой переменной по отдельности, влияние остальных факторов при этом рассматривается как случайная ошибка. Моделирование задач подобного рода на ЭВМ показывает, что исследователь может таким образом получить вполне разумные результаты: выделить доминирующие эффекты среди очень большого числа предполагаемых. Правда, здесь нет возможности требовать эффективности и несмещенности оценок — остаточная дисперсия здесь задается не только ошибками эксперимента, но и неучтенным влиянием малозначимых факторов, которые варьировались в процессе

проведения эксперимента. Все это мало смущает исследователя: выделив небольшое число доминирующих эффектов, он может на следующем этапе поставить совсем небольшую серию экспериментов для уточнения численных оценок эффектов и для разделения совместных оценок в тех ситуациях, когда найденные значения коэффициентов регрессии отражают совместное действие нескольких эффектов.

Метод Саттерзвайта (метод случайного баланса) сразу же подвергается острой критике. Возражение вызывал сам факт появления метода, не имеющего четкого теоретического обоснования, и более того — метода, в котором нарушаются оба канонизированные требования — ***несмещенность и эффективность оценок***. Тем не менее метод стал применяться. Имеется ряд работ, в которых с помощью этого метода были получены весьма существенные результаты. Были, вероятно, и многочисленные неудачи, когда метод применялся в тех случаях, когда не выполняются исходные предпосылки, но неудачные результаты обычно не публикуются.

Отметим, что практический и особенно теоретический интерес к методу случайного баланса был проявлен рядом ученых. Этот метод вошел в некоторые руководства по планированию эксперимента, имеется ряд методических примеров его применения. Были сделаны попытки дать математическое обоснование метода случайного баланса, но задача в постановке, предложенной Саттерзвайтом, оказалась слишком сложной. Пришлось прибегнуть к значительным упрощениям — предположить отсутствие случайной ошибки в наблюдениях и возможность производить полный перебор при обработке данных.

В работе Л. Д. Мешалкина при таких допущениях находится соотношение между величинами N (число наблюдений), l (число значимых эффектов) и s (число подозреваемых эффектов) и вероятностью построить план, выделяющий все существенные эффекты. Показано, что, пользуясь, описанной выше случайной процедурой планирования, мы можем построить такой план с вероятностью $1— 2^{-m}$, где $m=N — l— \log_2 (s — l— 1)$. Например, для величин $l\leq 12$, $N=23$, $s=75$ такой план будет построен с вероятностью большей, чем 0,96. Это значит, что разрешающая способность такого метода планирования достаточно велика при условии, если выполняются очень жесткие предпосылки. Положительный характер этих результатов имеет большое значение: ***он показывает, что сама постановка задачи правомерна.***

Важно отметить появление нового для планирования эксперимента критерия. Это ***критерий высокой разрешающей способности*** — возможность выделения доминирующих эффектов среди очень большого числа подозреваемых. Это даже не столько критерий планирования эксперимента, сколько критерий для всей процедуры, включающей, кроме метода планирования, и алгоритм обработки результатов наблюдений. Он не поддается строгой и четкой математической формулировке, но интуитивно достаточно ясен.

14.7.2. Планирование эксперимента при поиске неисправных элементов

Представляет интерес несколько другая постановка задачи отсеивания, принадлежащая М. Б. Малютову. Эта постановка по существу представляет собой некоторый упрощенный дискретный вариант задачи, о котором шла речь в предыдущем разделе.

Рассмотрим некоторую систему, состоящую из большого числа элементов *s*. Пусть система функционирует нормально, если число неисправных элементов в ней не превосходит некоторого критического уровня *l«s*. Когда число неисправностей достигает уровня *l*, необходимо отыскать и заменить неисправные элементы. Методы выделения *l* неисправных элементов из большого числа *s* элементов можно рассматривать как ***планирование отсеивающих экспериментов***.

Будем называть неисправные элементы значимыми факторами и пусть все факторы x_i *(i*=1,...,*s)* могут принимать только два значения (исправному элементу приписывается значение 0, неисправному — единица). Если в *i*-том опыте хотя бы один фактор, включенный в число проверяемых в этом опыте, находится на уровне 1, то измеряемая функция y_i принимает значение 1, в противном случае она принимает значение 0. Результат измерения может быть получен с ошибкой, на выходе получаются случайные величины z_i=0 или 1, причем известны вероятности получения $z_i = 0$ при условии, что y_i=1 и наоборот.

В качестве модели здесь можно рассматривать функцию $\eta(\mathbf{x}, 0)$, зависящую от вектора переменных $\mathbf{x}^T = (x_1...,x_s)$ и вектора параметров $\theta^T = (\theta_1...., \theta_l)$ следующим образом :

$$\eta(\mathbf{x}, \theta) = \eta(x_1, \ldots, x_s, \theta_1, \ldots, \theta_l) = \begin{cases} 1, \text{ если } \sum_{l=1}^{l} x_{\theta_l} \neq 0 \\ 0, \text{ если } \sum_{l=1}^{l} x_{\theta_l} = 0. \end{cases} \quad (14.51)$$

Вектор неизвестных параметров θ является вектором, каждая компонента которого — номер значимого фактора. Этот вектор принадлежит множеству векторов размерности l, компоненты которых могут принимать значения 1, 2,..., s. Задача заключается в том, чтобы указать матрицу планирования $\{x_{ij}\}$ с числом строк N и числом столбцов s, элементы которой показывают, включен или не включен фактор x_i в i-тый опыт, и метод обработки результатов $z_1,..., z_N$ такие, чтобы с заданной вероятностью ошибки определить неизвестный вектор параметров с помощью минимального числа опытов.

Многие результаты здесь были получены с помощью концепций ***теории информации***. ***На языке теории информации, задавая уровни факторов x_i в i-том опыте, мы кодируем сообщение о значимых факторах в двоичную последовательность y_i; далее нужно декодировать сообщение, анализируя последовательность z_i.*** Существенная дискретизация, четкая постановка задачи и использование теоретико-информационных соображений позволили получить существенные результаты и продвинуться достаточно далеко в решении этой проблемы отсеивания. Предложены стратегия проведения наблюдений и различные способы анализа экспериментов. Даны оценки числа наблюдений и сложности обработки при использовании этих способов.

Оказалось, что с точки зрения уменьшения числа наблюдений выгодно в каждом опыте уровни факторов выбирать случайно с вероятностью

$$p\{x_j = 0\} = 2^{-1/l} = q.$$

Декодировать сообщение теоретически можно, например, осуществляя перебор всевозможных сочетаний из s по l факторов. Показано, что для случая, когда на выходе значения y_i измеряются без ошибки, то, если использовать план с N опытами, где

$$N \geqslant l \log_2 s + 2\, l \log_2 l - l \log_2 \lambda \quad (14.52)$$

при произвольном $0 \leqslant \lambda \leqslant 1$, стратегия перебора обеспечивает вероятность однозначного определения вектора параметров θ большую, чем 1—λ.

При помощи некоторых модификаций задачу можно значительно приблизить к реальным условиям. Например, можно отказаться от требования, что число значимых факторов задано, а предположить, что известно только некоторое его ***априорное распределение***; можно ввести ***несимметричную ошибку на выходе***; существенным является отказ от метода полного перебора при декодировании и замена его менее трудоемкими методами, требующими по возможности небольшого увеличения числа опытов для обеспечения прежней вероятности определения вектора θ. Фрейдлиной В.Л. предложен так называемый метод ***пофакторного декодирования***, который сводится к расчету по результатам опытов для каждого фактора некоторого отношения правдоподобия и к сравнению его с заданным критическим значением. Этот метод можно считать аналогом метода диаграмм рассеяния при обработке эксперимента в случайном балансе.

14.7.3. Планирование эксперимента в экономических задачах

В логическом плане представляет интерес задача биологического отсеивания. Она формируется так: нужно найти какое-то совсем небольшое число биологически активных препаратов среди очень большого числа потенциально возможных. В такой постановке задачи исследователя совсем не интересует механизм биологической активности. Его беспокоит только эффективность самой, очень дорого стоящей, процедуры. В этом случае удается построить математическую модель в пространстве независимых переменных, носящих чисто ***экономический характер***.

Рассмотрим следующую задачу: среди множества химических препаратов надо найти совсем небольшое подмножество биологически активных, скажем, антиканцерогенных, мутагенных или каких-либо еще. Это необычайно громоздкая и трудоемкая процедура отсеивания должна быть как-то разумно организована. Здесь, следовательно, речь идет не о выборе оптимального плана в пространстве независимых переменных, а о выборе оптимальной стратегии, т. е. оптимального соотношения между теми переменными, которыми задается организация процесса отсеивания. Можно предложить несколько различных моделей для проведения отсеивающих экспериментов. Одни из них могут быть последовательными в смысле Вальда—это значит, что строится процедура, в которой после каждого испытания принимается одно из трех возможных решений:

1) прекратить испытание и принять нуль-гипотезу;
2) испытание продолжать;
3) прекратить испытание и отбросить нуль-гипотезу.

Число испытаний здесь заранее не фиксируется. Последовательные процедуры в среднем в два раза эффективнее процедур с заранее жестко фиксированным числом испытаний. Последовательные процедуры — это просто формализация того, что делают обычно в лабораториях: лаборант не будет подвергать многократным повторным анализам пробу, в которой, скажем, содержание вредной примеси лежит далеко от браковочной границы, и наоборот, он будет всячески стремиться уточнить результат, когда он лежит вблизи этой границы. Такое использование экспериментов и дает в среднем двукратную экономию. Но в биологических исследованиях часто приходится отказываться от последовательных процедур: они могут слишком растянуться во времени. Может оказаться, что выгоднее поставить больше опытов с тем, чтобы быстрее получить результат. Можно придумать полупоследовательные схемы испытаний. Испытания могут носить и групповой характер, когда на животных испытывают сразу несколько препаратов, а затем «хорошие» группы препаратов подвергают дальнейшему детальному изучению. Ясно, что каждая модель создает свои проблемы. В последней модели, например, возникает задача распределения усилий между межгрупповыми и внутри-групповыми исследованиями.

Рассмотрим в качестве примера одну непоследовательную двухступенчатую процедуру. На первой ступени производится грубое отсеивание, на второй — более подробное исследование препаратов, отобранных на первой стадии. Введем в рассмотрение следующие величины: v — стоимость препарата; a — стоимость первичного испытания препарата на одном животном; b — стоимость исследования препарата на второй стадии.

Допустим, что из предыдущего опыта известна вероятность q появления активного препарата. Далее, как обычно, вводятся в рассмотрение вероятности ошибок первого и второго рода α и β (α — вероятность ошибочного отрицания, β—вероятность ошибочного признания). На первом этапе отсеивания среди принятых препаратов доля действительно эффективных составит $q(1-\alpha)$, а доля ошибочно признанных эффективными будет равна $(1-q)\beta$. Отсюда получаем среднюю стоимость полного исследования одного препарата:

$$v + an + b\,[q\,(1-\alpha) + (1-q)\,\beta], \tag{14.53}$$

где n — среднее число животных, приходящихся на один препарат в данной процедуре. Введем теперь вполне естественное допущение о том, что сумма средств, отпускаемых на исследование (например, на

одну неделю), ограничена и равна *s*. Число препаратов, которое можно исследовать на эти средства, определяется выражением

$$M = \frac{s}{v + an + b\,[q\ \ (1-\alpha) + (1-q)\,\beta]}. \qquad (14.54)$$

Из них повторное испытание пройдет *m* препаратов

$$m = M\,[q\,(1-\alpha)\ |\ (1-q)\,\beta], \qquad (14.55)$$

а число обнаруженных эффективных препаратов *L* составит

$$L = \frac{s\,q\,(1-q)}{v + an + b\,[q\ (1-\alpha) + (1-q)\,\beta]}. \qquad (14.56)$$

Теперь естественно стремиться так выбрать параметры процесса отсеивания, чтобы максимизировать значение этой функции эффективности. Параметры процесса следующие: число животных, приходящихся на препарат, параметры системы дискриминации, скажем, критическое значение активности и еще какой-нибудь параметр, например промежуток времени, по истечении которого производится сравнение результатов эксперимента с критическим значением. Ясно, что для каждого набора параметров процедуры можно вычислить свои α и β.

В написанной выше модели максимизируется число обнаруженных активных соединений, приходящихся на единицу затраченных средств. С помощью этой модели можно решать и другие, чисто организационные задачи. Например, можно ответить на такой вопрос: каковы должны быть оптимальные соотношения между *N* — числом животных, имеющихся в распоряжении лаборатории в течение недели, и значениями *M* и *m?* Или каковы оптимальные значения чисел *M, N* и *m,* позволяющие находить в среднем один эффективный препарат в неделю? И еще, если *N* фиксировано, то каково оптимальное среднее число соединений, которое должно исследоваться в течение недели; сколько соединений будет поступать на вторую стадию?

Этой проблеме посвящено много публикаций, но до сих пор не рассмотрено все множество предложенных моделей с единых позиций — ***в рамках единого дедуктивного построения***. И вряд ли это вообще можно сделать в том случае, когда мы записываем модель для стратегии наших действий, совсем не затрагивая механизма того, что мы собственно изучаем. Естественно, что в этом случае в рассмотрение могут быть включены совсем различные постановки задач, и сами модели могут быть построены на переменных разного типа. Каждая из

таких моделей будет отражать только то, что мы хотим сделать, и то, чему мы придаем значение, но отнюдь не то, что присуще самой природе вещей.

Безусловна связь этой проблемы с задачами контроля качества в промышленности, но, насколько нам известно, с этих позиций вопрос также не был рассмотрен. И все же практическая польза от ***моделей отсеивания*** несомненна. ***Они дают возможность найти некоторую наилучшую линию поведения, правда, при некоторых заранее предопределенных формах работы лаборатории***. Очень важно также, что подобные модели позволяют стандартизировать процедуры биологических испытаний; поиск антиканцерогенных препаратов — это национальная или даже общечеловеческая проблема, и попытка ее решения должна опираться на коллективные усилия, которые возможны только при ***стандартизации процедуры исследования***. И последнее — изучение моделей отсеивания показало, что некоторые, в биологическом отношении сильно отличающиеся процедуры, одинаково приемлемы. Биологи получают больше возможностей для выбора.

14.7.4 Критерии оптимальности планов дискриминирующих экспериментов

Исходя из соображений достаточно общего характера можно показать, что экспериментальные данные никогда не могут подтвердить правомерность той или иной модели. Единственное, что можно сделать,— это показать, что результаты наблюдений не противоречат некоторой рассматриваемой гипотезе. Известный английский философ К. Поппер предложил даже отказаться от термина «проверка гипотез», заменив его термином «***опровержимость гипотез***». ***Если в результате исследования данная гипотеза не опровергается, то это еще не, значит, что гипотеза может быть принята, поскольку эти же результаты наблюдений могут не противоречить и множеству других, не высказанных гипотез***. Результат исследования можно сделать существенно более убедительным, если ввести в рассмотрение несколько ***конкурирующих моделей***.

Так приходится поступать при изучении механизма явлений; при этом, естественно, приходится обращаться к моделям, нелинейным по параметрам.

Для решения вопроса о том, какой из заданных моделей отдать предпочтение, необходима постановка так называемого ***дискриминирующего эксперимента***. При этом точки плана выбираются по возможности таким образом, чтобы результаты

измерений не были инвариантны относительно замены одной из конкурирующих моделей другой, т. е. эксперимент нужно выбрать так, чтобы ***поставить модели в критические условия***.

Новая постановка задачи порождает новые критерии, совершенно отличные от рассмотренных выше. Один из критериев основан на некой мере, зависящей от разности между суммами квадратических отклонений. Для двух конкурирующих гипотез после проведения N наблюдений мы будем иметь дело с разностью

$$S_j(N) = \sum_{i=1}^{N} \left[y_i - \eta_j \left(\mathbf{x}_i, \theta_j \right) \right]^2 \quad (j = 1, 2). \tag{14.57}$$

Если эта разность недостаточно велика для того, чтобы отдать предпочтение одной из конкурирующих гипотез, то следующий (N+1) - й эксперимент предлагается ставить в той точке, где ожидается ее максимальное значение. Второй критерий основан на использовании ***модуля логарифма обобщенного отношения правдоподобия***, вычисленного для двух конкурирующих гипотез— измерения размещаются так, чтобы добиться наискорейшего роста этой величины. Наконец, в третьем критерии в качестве меры для дискриминации гипотез используется хорошо известная в теории информации ***мера расхождения Кульбака*** — выбор оптимального плана сводится к максимизации этой величины. Здесь не имеется возможности рассматривать эти критерии в деталях. Ограничимся некоторыми замечаниями общеметодологического характера.

Эти критерии, а число их легко может быть увеличено, не могут быть рассмотрены в рамках единого аксиоматического построения. Попытка численного сопоставления путем моделирования задач на ЭВМ вряд ли будет полезной, поскольку для различных моделей, подлежащих дискриминации, мы будем получать разные результаты.

Система наших суждений станет еще менее четкой, если мы включим в рассмотрение одновременно две задачи: ***процедуру дискриминации и процесс уточнения параметров.*** Вторая из этих задач не требует формулировки новых критериев оптимальности. Здесь планы можно строить исходя из критерия D-оптимальности. Объединение двух задач в одну требует уже поиска экстремума для суммы двух членов, один из которых будет ***мерой дискриминации***, другой — ***мерой точности оцениваемых параметров.*** Ясно, что оба члена этой суммы должны быть взяты с какими-то весами. Остается неясным, как выбрать эти веса и как изложить эту проблему в рамках дедуктивных построений.

Сейчас накопился уже большой опыт по практическому применению планирования дискриминирующих экспериментов, но еще

недостаточно критически осмысленный. Имеются и прямые сопоставления, показывающие, что формализованные приемы планирования дискриминирующего эксперимента выигрывают по сравнению с традиционными методами выбора области эксперимента, основанными на интуиции.

Необходимо сделать несколько предостерегающих замечаний в адрес формализованного подхода к выбору гипотез.

1. У исследователя никогда не может быть уверенности в том, что, «истинная» в каком-то смысле гипотеза включена в рассматриваемое множество моделей. И если в результате дискриминирующих экспериментов приписывается одной из гипотез какую-то высокую вероятность, то это утверждение нужно понимать в некотором весьма ограниченном смысле. Здесь речь идет о высокой вероятности гипотезы только по отношению к рассматриваемому в данном эксперименте множеству гипотез. Эта вероятность никоим образом не является мерой истинности в каком-то абсолютном смысле, ибо вполне возможно, что среди не включенных в рассмотрение моделей существует такая, которая будет лучше, чем принятая нами, или хотя бы не будет отличаться от нее в данном фиксированном интервале измерений.

2. Следует помнить о том, что при дискриминации нелинейных по параметру моделей, претендующих на то, что они описывают механизм явлений, мы в действительности только проверяем их интерполяционную силу. Особенно явно это проявляется в задачах химической кинетики, где модели строятся так, что они отражают многообразие всех промежуточных реакций, а проверка модели происходит, как правило, по образованию окончательного продукта. Поэтому, что при экстраполяции лучшим может оказаться поведение той модели, которая при дискриминирующем эксперименте, проведенном в узком интервале изменения переменных, набрала мало очков. Ниоткуда не следует, что модель, которая ведет себя хорошо как интерполяционная в узкой области, действительно отражает всю сложность изучаемого явления и пригодна для экстраполяции.

3. В моделях с нелинейной параметризацией, несмотря на все ухищрения планирования, приходится сталкиваться с высокой закоррелированностью параметров. Представим себе, что исследователь или его оппонент, получив некоторую модель изучаемого явления, смогли затем как-то иначе представить себе механизм промежуточных реакций. Вид модели изменился, при этом изменяются и числовые оценки всех параметров, даже тех, которые выполняют, в новой модели ту же роль, которую они выполняли в

старой модели. Можно, конечно, попытаться изучать устойчивость модели к нарушению части исходных предпосылок, но такие исследования вряд ли дадут обнадеживающие результаты.

Все изложенные здесь трудности связаны с самой природой вещей. Если исследователь догадался и включил «истинную» модель в систему гипотез, подлежащих изучению, то планирование эксперимента позволит ему быстро прийти к правильному решению. Если же такой догадки не произошло, то исследователь долго будет блуждать в лабиринте своих гипотез, придавая по результатам эксперимента больший вес то одной, то другой модели.

Здесь предпринята попытка в едином, логическом, ракурсе посмотреть на существующее многообразие идей и методов планирования эксперимента. Конечно, здесь не удалось построить всеобъемлющей теории, хотя некоторые основные идеи оптимальности эксперимента удается сформулировать и проследить вполне отчетливо. ***Трудности построения общей, всеохватывающей теории связаны с тем, что в процессе экспериментальных исследований часто приходится обращаться к таким приемам и такой постановке задач, которые не удается записать в виде отчетливых математических моделей***. Единственное, что удается в этом случае — проводить обсуждение экспериментальных процедур в системе хотя бы в какой-то степени формализованных представлений. ***Сильная теория строится только для тех процедур экспериментального исследования, которые удается представить математическими моделями, исчерпывающим образом описывающими то, что предполагается изучить или сделать в процессе этого исследования***. Основная проблема состоит в том, чтобы суметь глубоко формализовать, т. е. хорошо осмыслить логически то, что мы хотим делать при той или иной постановке задачи. Если это удается сделать, то дальше уже легко обсуждать вопрос об оптимальности. ***Планирование эксперимента — это раздел знаний, относящийся не только и не столько к математической статистике, сколько к логике.***

Те, кто занимается методологией планирования эксперимента, конечно, никогда не пытаются формализовать весь процесс экспериментального исследования. Всегда неформализованными должны оставаться такие составляющие исследования, как постановка самой проблемы и выбор математической модели. Последнее включает и выбор пространства независимых переменных, и выбор той его области, где должно будет производиться экспериментальное исследование.

Одна из привлекательных особенностей математической теории эксперимента — это ее ***реалистичность***. Теория оказалась в состоянии встретиться с той неопределенностью в постановке задач, которая характерна для человеческой деятельности даже в научных исследованиях. Различная степень реальности в постановке задач породила различную степень строгости теоретических построений. Отсюда — фрагментарность этой теории. Математическая теория эксперимента, как правило, не дает однозначных, безусловно, оптимальных решений. К этому, наверное, и не следует стремиться. Важно найти ***разумное решение***, т. е. решение, поддающееся логическому осмысливанию, и, если оно найдено, оказывается возможным проводить обсуждение всей стратегии исследования с учетом особенностей той или иной конкретной задачи.

Несмотря на всю фрагментность математической теории эксперимента, она получила очень широкий отклик в своем практическом преломлении. Сейчас с использованием планирования эксперимента выполнено во всем мире более 100000 работ. Эти исследования охватывают самые разнообразные области экспериментальной деятельности— почти все разделы точных и гуманитарных наук; все разделы инженерно-технических исследований, включая и исследования, проводимые непосредственно на действующих фабриках и заводах; в медицине как непосредственно в процессе лечения (это также экспериментальная деятельность), так и при отборе терапевтически активных препаратов; в сельскохозяйственных исследованиях; в криминалистике; в педагогической деятельности и т. д.

В одних случаях с помощью планирования эксперимента удалось избежать систематических ошибок, возникающих от скрытого влияния неконтролируемых переменных; в других случаях при решении экстремальных задач удалось значительно повысить выход нужного продукта, иногда даже в сотни раз (при этом экспериментаторы не боялись включать в программу сразу до 15 независимых переменных, а иногда даже и больше). ***Опыт показывает, что если при использовании традиционных методов исследования на решение экстремальных задач обычно уходило около <u>двух лет</u>, то с помощью применения планирования эксперимента эти задачи решаются уже за <u>несколько месяцев</u>.*** Имеются многочисленные примеры применения планирования эксперимента непосредственно на заводах, когда эволюционное планирование или симплекс-процедуры используются в системе автоматического регулирования. В то же время имеется уже и значительный опыт применения планирования

эксперимента в чисто теоретических исследованиях, когда речь идет о выборе одной из нескольких конкурирующих моделей для описания механизма явлений, скажем, механизма химических реакций.

Чем вызван этот успех? На этот вопрос можно ответить так: применение планирования эксперимента требует высокой степени формализации — это заставляет исследователя стремиться к четкому логическому осмысливанию всей процедуры исследования даже в очень размытых ситуациях. Такое осмысливание оказывается возможным сделать в системе канонических представлений, которые задаются существующей теорией эксперимента, которая в общих чертах изложена в этой работе. Далее следует выбор оптимальных планов и процедур, что позволяет значительно сократить время на само исследование. Результаты исследования и их статистическая оценка представляются в некоторой стандартной форме по заранее готовым клише. Все это вместе взятое и приводит к резкому повышению эффективности экспериментальных исследований. Успех планирования эксперимента во многом, возможно, определяется и тем, что в исследованиях с четко выраженной прикладной направленностью можно ограничиться построением самых простых — полиномиальных моделей.

Теперь напрашивается вопрос — что является важнейшей задачей в дальнейшем развитии идей теории эксперимента. Видимо ответить можно так: сложность природы бросает свой вызов планированию эксперимента. Все обстоит вполне благополучно с построением сравнительно простых моделей. Но исследователи стремятся строить все более сложные — многопараметрические, нелинейные по параметрам модели. И здесь есть, казалось бы, хорошо разработанный аппарат для планирования и оценивания. Но из-за сложности модели результаты оценок параметров (а следовательно, и процедуры дискриминации) оказываются часто иллюзорными. Принятые в статистике способы оценки доверительных границ не отражают в этом случае всей возникающей здесь неопределенности. Развитие математической теории эксперимента началось с решения вопроса о том, что есть хорошие оценки, далее возник вопрос — что есть хороший эксперимент. Теперь перед нами новая проблема — что есть хорошая модель? Зачем предлагать модели, для которых заведомо нельзя получить хороших оценок? Для ответа на это вопрос, на наш взгляд, для этого еще не имеется хорошо подготовленного материала. Однако, интерес к качеству моделей неизменно растет. Ниже мы рассмотрим несколько методов сравнения моделей и постановки эксперимента в области наибольшего их различия. Вследствие отсут-

ствия отработанного и проверенного материала по этим задачам изложение этих методов не алгоритмизировано и не подкреплено примерами.

14.7.5. Метод выбора модели процесса по взвешенным суммам квадратов отклонений.

Для простоты изложения ограничимся двумя конкурирующими моделями:

$$\hat{y}_{т1} = \varphi_{т1}(X\ \theta_1), \qquad \hat{y}_{т2} = \varphi_{т2}(X, \theta_2), \tag{14.58}$$

где X— вектор факторов; Θ_1, Θ_2 —векторы параметров соответственно для 1-ой и 2-ой моделей.

Если в результате измерений получены значения $y_1, y_2, \ldots y_N$ с весами

$$w_1, w_2, \ldots, w_N \ \left(\sum_i w_i = 1\right),$$

то взвешенные суммы квадратов отклонений можно рассчитать по формулам

$$S_1 = \sum_{u=1}^{N} w_u [y_u - y_{т1}(X_u,\ \theta_1^*)]^2;$$

$$S_2 = \sum_{u=1}^{N} w_u [y_u - y_{т2}(X_u,\ \theta_2^*)]^2, \tag{14.59}$$

где θ_1^*, θ_2^* — оценки параметров моделей, полученные по N измерениям.

Если S_1 и S_2 сильно отличаются друг от друга, то сравнение можно производить по критерию Фишера. При условии

$$S_1/S_2 > 10 \tag{14.60}$$

выбирается модель, имеющая меньшую значимую сумму квадратов отклонений (значимость S_i можно оценить с помощью критерия Пирсона).

Если разница между S_1 и S_2 мала, то необходимо поставить $(N + 1)$-ый эксперимент (желательно в области экспериментирования, где ожидается наибольшая разница S_i) и повторить все расчеты и оценки. Процедура повторяется до получения значимой разницы между суммами квадратов отклонений.

Метод скорее эвристический, чем обоснованно-статистический, и поэтому пригоден для грубых оценок конкурирующих моделей.

14.7.6. Байесов подход к выбору моделей.

Выбор модели строится на основе известной теоремы Байеса, связывающей априорную и апостериорную вероятности. Априорная вероятность выражается исследователем, как мера его уверенности в

распределении параметра Θ соответствующей модели.

Предположим, что модель характеризуется уравнением

$$\hat{y}_i = f(\boldsymbol{X}_i, \boldsymbol{\theta}_i) + e_i, \tag{14.61}$$

где $\hat{y}_i$ — значение i-го измерения $(i = 1, 2, ..., N)$; $\boldsymbol{\Theta}_i$ — вектор-столбец параметров модели; $\boldsymbol{X}_i$ — вектор-столбец факторов; e_i — погрешность i-го измерения.

Предположим также, что априорное распределение вектора параметров модели является многомерным нормальным распределением со средним Θ_0 и матрицей ковариаций D. Это распределение характеризует степень предварительных знаний о векторе параметров Θ.

Если уравнение (14.61) нелинейное, то его можно линеаризовать так:

$$\boldsymbol{U} = \boldsymbol{X}(\boldsymbol{\theta} - \boldsymbol{\theta}_0) + \boldsymbol{\varepsilon}, \tag{14.62}$$

где $\boldsymbol{U}$ — вектор-столбец с элементами

$$[y_i - f(\theta_0; \boldsymbol{X}_i)]; \tag{14.63}$$

$\boldsymbol{X}$ — матрица с элементами

$$\left[\frac{\partial f(\theta, X_i)}{\partial \theta}\right]_{\theta=\theta_0}; \tag{14.64}$$

$\boldsymbol{\varepsilon}$ — вектор погрешности.

Допустим, что вектор погрешности имеет многомерное нормальное распределение с нулевым математическим ожиданием и матрицей ковариаций $J\sigma^2$ (I — единичная матрица). Тогда $\boldsymbol{U}$ имеет нулевое математическое ожидание и матрицу ковариаций $\boldsymbol{XDX_T} + J\sigma^2$ (сложение ошибок возможно вследствие линейности $\boldsymbol{U}$). Исходя из этих данных, легко рассчитать условную вероятность для r-ой модели $P(u/r)$ —она отражает влияние опытных данных

$$P(u/r) = \frac{1}{\sqrt{2\pi|\boldsymbol{XDX}^{\mathrm{T}} - J\sigma^2|}} e^{-\frac{\boldsymbol{U}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{U}}{2[\boldsymbol{XDX}^{\mathrm{T}} + J\sigma^2]}},$$

где элемент $\boldsymbol{U}^T\boldsymbol{U}$ имеет вид

$$[\sum_{i=1}^{N} [y_i - f(\theta_0, X)]^2].$$

Если учесть априорные вероятности r-ых моделей $P(r)$, то апостериорные вероятности можно рассчитать в соответствии с формулой Байеса

$$P(r/u) = \frac{P(r)P(u/r)}{\sum\limits_{r} P(r)P(u/r)}.$$

Выбирается та модель, апостериорная вероятность которой увеличилась по сравнению с априорной.

14.7.7. Постановка эксперимента по выбору математических моделей.

Вопрос выбора моделей успешно решается в той области эксперимента, где различие между ними максимально. Поэтому разработка критериев для выбора наиболее благоприятных условий эксперимента является важнейшей задачей качественного анализа моделей. Известны три критерия постановки оптимального эксперимента — Рота, Бокса и Хилла, энтропийный. Суть подхода объясним на примере использования критерия Рота.

Критерий Рота определяет взвешенное среднее полного отличия между моделями. В качестве весов используются байесовские апостериорные вероятности (их расчет приведен в предыдущем разделе). Расчет ведут по *(N* — 1)-экспериментам. Условие эксперимента для *N*-го опыта определяется выражением

$$Z(X_э) = \sum_{i=1}^{m} [P(i,\ N-1) \prod_{\substack{j=1 \\ i \neq j}} |\hat{y}_j(X_э) - \hat{y}_i(X_э)|],$$

где $X_э$—вектор условий эксперимента; *P(i, N*—1) — апостериорные байесовские вероятности выбора *r*-ой модели после *(N*—1)-го эксперимента; $y_j(X_э)$—прогнозируемое значение выходной переменной для условий $X_э$ и при использовании модели *j* с оценками параметров θ_j^*, полученных по *(N*— 1)-экспериментам (любым подходящим методом).

Условия $X_э$, где значение $Z(X_э)$ будет максимальным, дают максимальное различие между моделями и потому следующий *N*-ый эксперимент должен ставиться в этой точке.

Доказано, что перечисленные выше критерии (Рота, Бокса и Хилла , энтропийные) дают идентичные результаты.

15. Методы поиска новых научных и технических решений

15.1. Эвристика как наука

Творчество (в том числе и техническое) основано на происходящих в коре головного мозга человека процессах обработки информации, до настоящего времени не изученных в полной мере. Поэтому мы будем изучать не основы творчества, а лишь некоторые формализованные приемы, облегчающие поиск оптимальных решений технических задач. Аналогичные методы характерны и для решения научных задач. Поскольку проблематика научных исследований тесно связана с методологией технического творчества, представляется целесообразным, на наш взгляд, расширить содержание основ научных исследований за счет методов технического творчества.

Что такое эвристика и в чем состоит смысл эвристического образования для современных специалистов? ***Эвристика*** — ***наука о методах творчества.*** Ее основы были заложены еще в античное время в трудах Архимеда, Гераклита, Сократа, а в средние века — в работах Декарта, Лейбница, Бэкона. Архимед — редчайшее в науке сочетание высокого теоретика с виртуозом инженером-практиком. В нем постоянно жила страсть к изобретательству, к материальному воплощению найденных им теоретических закономерностей. И через века всегда будут слышать потомки его радостный и гордый возглас, боевой клич искателей, первооткрывателей в науке: «Эврика!.. Я нашел!».

Отец современной космонавтики К. Э. Циолковский, словно предугадывая открытие лазерной техники, ставил инженерную задачу сегодняшнего дня: организация космической связи с помощью параллельного пучка электромагнитных лучей с небольшой длиной волны, электрических или даже световых. В то время еще не было ЭВМ, но гениальный ученый справедливо и прозорливо предсказывал, что математика проникнет во все области знаний.

Надвигающиеся опасности «эколого-энергетического цейтнота» в сочетании с реальным фактом нехватки трудовых ресурсов и исключительной сложностью эколого-энергетических проблем требуют резкой интенсификации труда, причем в первую очередь труда интеллектуального, в сфере которого за предельно сжатые исторические сроки должны быть найдены кардинальные научно-технические решения типа новых экологически чистых энерготехнологий. И в этом направлении, безусловно, перспективна интенсификация труда ученых и инженеров на базе расширения технических возможностей ЭВМ, систем автоматизированного

проектирования (САПР). Но ЭВМ (даже самого высокого поколения) и САПР не в состоянии решать интеллектуальные задачи революционного научно-технического характера на уровне открытий и изобретений, на уровне крупных качественных скачков, которые обусловливают необходимость перестройки ориентации подготовки инженеров в период «эколого-энергетического цейтнота».

За последние 50 лет начало развиваться новое научное направление, которое условно можно назвать научно-инженерной эвристикой, изучающее механизмы, алгоритмы, законы, методы работы творческого человеческого интеллекта и копирование принципов его работы на ЭВМ. Это нашло свое отражение в постановке таких дисциплин в высшей школе, как «Основы научных исследований» и «Основы технического творчества».

Интенсификация работ по модернизации научно-инженерной эвристики не только непосредственно минимизирует затраты на оплату труда научных и инженерно-технических работников, но одновременно минимизирует затраты капитальные, энергетические, материальные и т. д. Последнее сводится к максимизации производительности труда и качества выпускаемой продукции, что является ключевым, узловым вопросом в решении главной проблемы современности. Поэтому наряду с формированием экологического мировоззрения необходимо обеспечить максимальную интенсификацию всего комплекса работ по научно-инженерной эвристике как ключевых в период «эколого-энергетического цейтнота».

В настоящее время большое внимание уделяется эвристической деятельности и эвристическому образованию инженеров различных специальностей и способам повышения эффективности эвристик, как важного научного направления. К сожалению, большая часть исследований не относится непосредственно к техническим задачам (проектирование систем и устройств), а имеет отношение к общим, философским или кибернетическим вопросам творческой деятельности инженеров. Все же материалы этих работ позволяют сформулировать ряд конкретных рекомендаций, которые совершенствуют эвристическую деятельность разработчиков в процессе проектирования устройств и систем. Указанные рекомендации можно представить в виде организационных приемов и методических мероприятий.

К ***организационным*** приемам относятся меры, направленные на улучшение организации труда проектировщиков: подбор и распределение кадров, обеспечение оптимального взаимодействия

инженеров различных специальностей; повышение квалификации кадров; создание творческой атмосферы и стимулов изобретательства; обеспечение необходимым оборудованием, материалами, аппаратурой, контрольно-измерительной техникой; организация оперативной и своевременной научно-технической информации и т. п.

Методические мероприятия состоят из совокупности приемов и рекомендаций, направленных на повышение эффективности творчества разработчиков: сокращение времени поиска новых технических решений; оптимизация цели или обеспечение методологии оптимизации гарантий в процессе проектирования; применение машинных методов проектирования и САПР.

В последующем изложении будем рассматривать лишь методические мероприятия и рекомендации эвристической деятельности разработчиков. Однако следует знать, что большинство из них дают эффект при разработке и проектировании относительно простых систем и устройств.

Пути повышения эффективности эвристических решений имеют исключительную важность, так как они в целом определяют успех математических и экспериментальных исследований и создают предпосылки для оптимизации процесса проектирования новых высокоэффективных систем и устройств. Эвристический подход в процессе проектирования новых технических систем применяется для решения следующих основных задач :

— выбор и формулировка цели проектирования;

— выбор физических принципов действия системы;

— обоснование математической модели проектируемой системы, полезных и мешающих воздействий;

— выбор схемотехнической и элементной базы (при отсутствии жестких ограничений и необходимости творческого подхода);

— трактовка результатов исследования и принятие окончательных решений.

Эвристическая деятельность разработчиков опирается на имеющийся опыт в разработке аналогичных систем и устройств. При этом также могут использоваться алгоритмы решения подобных задач и известные результаты теоретических и экспериментальных исследований, проведенных в процессе проектирования и разработки.

Одним из наиболее важных этапов технического творчества в процессе проектирования систем и устройств является выбор ***цели***. Он определяет в целом класс разрабатываемой (проектируемой) системы. В большинстве практических ситуаций цель проектирования определяется заказчиком в виде тактико-технических требований

(технического задания) на ту или иную разработку. В других случаях цель определяется непосредственно самим разработчиком.

После выбора цели надлежит составить ***словесную формулировку задачи*** проектирования. Она не должна быть слишком «жесткой», а должна иметь различные варианты обобщающего характера, позволяющие варьировать решения в целях отыскания наиболее удачного. В некоторых случаях нежесткость словесной формулировки создает предпосылки для превращения практически неразрешимой задачи в разрешимую либо позволяет снять некоторые некорректно поставленные задачи проектирования.

Оценка вариантов словесных формулировок обусловливает возможность большего кругозора разработчика и дает ключ к разностороннему анализу поставленной задачи, выявлению ее сущности с определением главных и второстепенных факторов.

Эвристический ***поиск путей решения задачи***, как правило, следует за этапом ее словесной формулировки.

В процессе эвристического поиска разработчики используют прототипы проектируемой системы и идеальный конечный результат (ИКР).

Прототипами обычно являются известные из литературы (включая авторские свидетельства и патенты) или накопленного опыта разработчиков лучшие варианты построения системы (устройства), которые наиболее близки к задаче проектирования новой системы. Прототип может быть единственным, когда он однозначно соответствует решению поставленной задачи. В случае неопределенности выбора единственного прототипа (обычно когда один прототип удовлетворяет показателям качества системы, но неприемлем в других отношениях) используют несколько прототипов. Недостатки прототипов позволяют целенаправленно подойти к их усовершенствованию, т. е. к решению поставленной задачи (получению ИКР).

Под идеальным конечным результатом проектирования понимается некоторая совокупность идеальных значений $p_{1и}$, ..., $p_{nи}$ и т. д. тех частных показателей качества технической системы p_1, ..., p_n, каждый из которых желательно получить в процессе проектирования идеальным (экстремальным). Обычно идеальное значение $p_{iи}$ показателя p_i — наилучшее значение, которое можно получить в процессе проектирования как предельное без нарушения основных законов природы. При этом не принимаются во внимание различные технические ограничения как на данный показатель качества, так и на другие показатели качества системы. Таким образом, идеальным

(предельным) значением качества является его экстремальное значение (либо $p_i = 0$, либо $p_i = \infty$).

Сформулировать ИКР — это значит создать систему, обладающую определенной совокупностью идеальных показателей качества.

Иными словами, необходимо установить, какие частные показатели качества системы должны быть экстремальными, т. е. определить их идеальные значения.

Пусть в рамках иллюстративного примера основными качественными показателями проектируемой радиотехнической системы являются следующие: p_1 — вероятность ошибочного приема; p_2— отношение энергии элемента сигнала к спектральной плотности аддитивной помехи, действующей в канале; p_3— пропускная способность системы; p_4 — вероятность отказа за данное время действия; p_5 — стоимость; p_6 — масса системы.

Для приведенных параметров в качестве ИКР желательно было бы выбрать систему, у которой $p_4 \to 0$, $p_5 \to 0$, $p_1 \to 0$, $p_2 \to \infty$, $p_3 \to \infty$, $p_6 \to 0$.

При увеличении числа показателей качества проектируемой системы и стремлении получить их идеальными задача достижения ИКР может стать нереальной. Поэтому обычно при эвристической деятельности проектировщики стремятся ограничить число идеализируемых показателей качества. Это оказывается возможным, так как в реальных задачах проектирования технических систем не возникает необходимость предельного улучшения всех показателей качества p_i. Так, если на этапе проектирования системы известны прототипы, имеющие вполне приемлемые значения показателей p_3 и p_4, но неудовлетворительные значения остальных параметров, то эвристическая деятельность разработчиков должна быть направлена на создание системы, ИКР для которой состоит из совокупности: $p_1 \to 0$, $p_2 \to \infty$, $p_5 \to 0$, $p_6 \to 0$.

Заметим, что в процессе формулировки ИКР некоторые показатели качества могут быть противоречивыми по отношению друг к другу, либо когда один из них противоречив по отношению к целой группе показателей. Например, достижение $p_2 \to \infty$ может быть получено увеличением мощности передатчика данной системы. Однако если этим тривиальным приемом воспользуются все системы, то ухудшатся показатели p_1, p_5, p_6 и т. д.

Кроме того, увеличение уровня аддитивных помех вследствие ухудшения электромагнитной совместимости систем, возрастания побочных и внеполосных излучений передатчиков приведет к тому, что требование $p_2 \to \infty$ станет неосуществимым.

Дальнейшая задача эвристической деятельности разработчиков состоит в ***отыскании способов (эвристических приемов) преодоления технических противоречий***.

Под такими приемами понимают следующие. Пусть данное техническое противоречие состоит в том, что улучшение показателя p_1 вызывает ухудшение p_3. При такой ситуации преодолением технического противоречия будет отыскание такого приема, который позволяет улучшить p_1 без соответствующего ухудшения показателя p_3. В случае, если этот прием приводит к новому противоречию (например, вместо ухудшения p_3 происходит ухудшение p_4), то необходимо найти новый дополнительный прием, устраняющий и это противоречие. В конечном счете задача состоит в отыскании такой совокупности приемов, которые позволят преодолеть все основные технические противоречия (исходные, а также вызванные введенными приемами).

В качестве примера, приведем перечень приемов преодоления технических противоречий применительно к проектированию радиотехнических систем, предложенный Л. С. Гуткиным и дополненный Э.Ф. Бабуровым:

1) дробление, или декомпозиция (конструктивная, динамическая, функциональная);
2) объединение, или композиция (конструктивная, динамическая, функциональная);
3) обеспечение универсальности;
4) обеспечение равноправности (в действии частей системы и в действиях при проектировании);
5) обращение вреда в пользу;
6) применение предварительного напряжения (компенсация систематической ошибки);
7) применение адаптации;
8) введение обратной связи;
9) переход в другое измерение (замена временной обработки пространственно-временной, непрерывных сообщений дискретными, цифровыми);
10) замена непрерывного действия импульсным (или наоборот);
11) обеспечение непрерывности полезного действия;
12) введение избыточности (информационной, конструктивной и др.);
13) устранение избыточности (информационной, конструктивной и др.);
14) отброс и регенерация частей (подсистем);

15) применение других физических явлений для передачи или извлечения информации;
16) изменение длины волны (рабочей частоты);
17) изменение элементной базы;
18) функциональное согласование человека с ЭВМ;
19) динамическое согласование человека с ЭВМ;
20) применение принципа «начинай работать с конца»;
21) применение принципа «начинай с простого»;
22) рассмотрение крайних (граничных) случаев;
23) проведение последовательных приближений;
24) применение принципа многокритериальности;
25) применение принципа дуальности;
26) применение принципа неопределенности (однозначности величины произведения длительности импульса на ширину полосы занимаемого им спектра);
27) применение принципа взаимности;
28) применение принципа инвариантности (независимости одного параметра от другого);
29) применение принципа нормализации (закон больших чисел— теорема Ляпунова);
30) применение принципа минимаксности (оценка гарантий в теоретико-игровых задачах);
31) применение байесовских оценок;
32) применение аппроксимации марковскими процессами (цепями);
33) применение усреднения;
34) применение рандомизации (случайность выбора номеров опытов при проведении многофакторного эксперимента);
35) применение условий конфликтной ситуации (теоретико-игровой подход);
36) обеспечение асимптотической эффективности;
37) применение линеаризации;
38) применение «замораживания»;
39) применение дискретизации;
40) применение принципов идентификации;
41) применение принципов электромагнитной совместимости;
42) применение принципов, исходящих из выполнения требований экономики, энергетики, экологии, эффективности;
43) применение принципов оптимального синтеза;
44) применение теоретико-информационных принципов;
45) применение методологии других отраслей наук (биологии, медицины, бионики и др.);

46) применение принципов распараллеливания (при передаче, обработке и извлечении информации).

Список приемов отнюдь не исключает процесса творчества, а лишь облегчает его, подсказывая новые оригинальные (нестандартные) направления поиска. Таким образом, *отыскание наиболее эффективных приемов преодоления технических противоречий преследует цель разрушения инерционности мышления на основе нестандартного, творческого подхода к проектированию и разработке.*

15.2. Коллективное творчество

В эпоху научно-технической революции, которая привела к коренному изменению статуса науки в современном обществе и превращению ее в непосредственную производительную силу, особенно важным этапом является организация коллективного творчества. Курс человечества на всестороннюю интенсификацию опирается на огромные возможности современного этапа научно-технической революции. В условиях ограниченности ресурсов и усложнения экономических систем наука становится одним из определяющих факторов их развития. В настоящее время «взять всю науку, технику» под оптимальное управление — это значит ускорить научно-технический прогресс на приоритетных его направлениях, обеспечить быстрое и масштабное освоение всего нового, качественное преобразование производительных сил.

Как при индивидуальном, так и при коллективном творчестве все зависит от творческих способностей ученого, инженера и условий, при которых эти способности могли бы проявиться наиболее полно. При управлении условиями творчества ученых путем изменения и оптимизации характеристик научного коллектива в целом необходимо обеспечить наиболее полное проявление индивидуальных качеств. В этой ситуации объектом управления становится коллектив, который обладает более доступными параметрами управления, чем отдельная индивидуальность. Эффективность работы научного коллектива, в частности, определяется его возрастной структурой. Необходимо обеспечить рациональные соотношения молодых и опытных ученых (инженеров) для более полного проявления их способностей и потенциальных возможностей.

Теория познания рассматривает творчество как историческую активность людей, непрерывно раздвигающую границы возможностей человеческого развития. Для решения простых задач разработки (проектирования) достаточен коллектив специалистов из 10 чел.; решение задачи средней сложности требует нескольких десятков

специалистов. Для сложных задач проектирования необходимы тысячи и десятки тысяч специалистов различных специальностей. Например, в создании системы «Аполлон» для полета на Луну участвовали десятки тысяч специалистов разных специальностей из 300 фирм. Большая часть этих специалистов использовалась при разработке системы радиоуправления кораблем.

Один из главных творческих критериев инженера (или коллектива в целом): умение создавать новые полезные принципы или конструкции при решении конкретных инженерных задач. Как известно, наука зависит от *состояния* и *потребностей* техники. Если у общества появляется техническая потребность, то это продвигает науку вперед больше, чем десяток университетов.

В процессе разработки (проектирования) осуществляется полное взаимодействие разработчиков с заказчиками. Как правило, управление процессом проектирования реализуется на основе АСУ, так как в этом процессе участвует огромное количество инженеров, ученых, техники всевозможного назначения.

В головном и отраслевых НИИ в разработке систем и их подсистем (устройств) участвуют специалисты разного профиля: инженеры-системотехники, инженеры-схемотехники, инженеры-конструкторы, инженеры-технологи, инженеры-математики (или математики-прикладники); инженеры-испытатели, инженеры-экономисты и плановики.

Указанные специалисты включаются в штаты структурных подразделений НИИ: теоретическом, комплексном, отраслевых, конструкторском, технологическом, математического обеспечения (в том числе и вычислительных центрах и комплексах) и планово-экономическом.

На рис. 15.1 изображена типовая структура научного коллектива с ее составными частями: функциональной, организационной, информационной, общественно-организационной, профессионально-квалификационной и социально-психологической.

Функциональная структура определяется главным образом целевым предназначением того или иного подразделения (НИИ, сектор, отдел, лаборатория, группа и т. п.).

Организационная структура научного коллектива соответствует иерархии структурного подразделения.

Информационная структура определяется службами сбора, обработки, хранения и выдачи информации (бюро технической информации, патентно-лицензионный отдел, библиотеки, архивы,

канцелярия, копировальный отдел, типография, ЭВМ, банки данных и т. п.).

Рис. 15.1. Типовая структура научного коллектива

Профессионально-квалификационная структура характеризуется профилем и опытом специалистов, учеными степенями и званиями.

Особенности характера сотрудников, психологическая совместимость, воспитанность, степень культуры, образование определяют социально-психологическую структуру коллектива.

Научный коллектив в процессе творчества проводит следующие исследования: фундаментальные, прикладные, опытно-конструкторские разработки, мировоззренческие, методологические (рис. 15.2).

Рис. 15.2. Классификация форм научной деятельности коллектива

На рис. 15.3 изображена классификация форм организационно-научной деятельности коллектива: дней науки, научно-технических

конференций, научных сессий, семинаров, симпозиумов, школ-семинаров, школ.

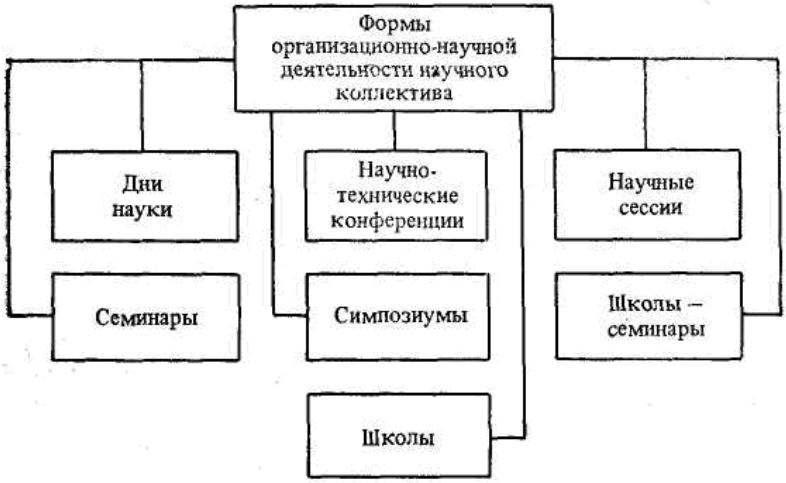


Рис. 15.3. Формы организационно-научной деятельности коллектива

Оценка научной деятельности коллектива может проводиться по следующим критериям: количество опубликованных работ, их значимость, вклад в науку, количество изобретений и открытий, количество цитируемых работ (сколько других авторов ссылаются на публикации сотрудников данного коллектива), ученая степень (сколько докторов и кандидатов наук (магистров) работают в коллективе,) экономическая эффективность, престижность на международной арене и т. д.

Руководитель коллектива — это одна из самых трудных профессий. К профессии руководителя нужно готовить заранее, начинать эту подготовку со студенческой скамьи, как это уже делается в вузах в ответ на настоятельные требования жизни. Мгновенно распознать склонности студента к руководству трудовым коллективом невозможно. Достаточно вспомнить, что великий физик А. Эйнштейн в гимназии слыл «бездарностью» в математике, а в аттестат Гегеля об окончании вуза записано, что его владелец «весьма не искусен в слове и может быть назван идиотом в философии».

Руководитель научного коллектива должен уметь:

— предвидеть (прогнозировать) цели исследования;

— убедить коллег в научной ценности выбранных им целей и обоснованности выполнить исследование качественно, эффективно и в срок;

— организовать исследование — четко распределить обязанности между подчиненными и степень их ответственности;

— контролировать работу коллектива и своевременно приходить на помощь;

— руководитель не должен брать на себя роль «критика» (наиболее продуктивно в процессе творчества объединение «руководителя» и «критика» в одном лице);

— добиваться, чтобы более способные не подавляли менее способных, а побуждали их к активному творчеству на максимуме (допустимости) своих возможностей.

Для организации коллективного творчества руководитель коллектива должен владеть следующими методами преодоления инерционности мышления: мозгового штурма (мозговой атаки); морфологического анализа; ассоциативными («фокальных объектов» или «гирлянд ассоциаций», «каталога»); синектики; контрольных вопросов; «эмпатии» (вживания в образ); инверсии, аналогии, фантазии.

Основные из этих методов рассматриваются в последующих разделах.

В современных условиях организация проектирования технических систем основана на принципах специализации, иерархичности и автоматизации. Первые два принципа состоят в разбиении общей задачи проектирования на ряд подзадач как по вертикали (между различными иерархическими уровнями), так и по горизонтали (внутри каждого иерархического уровня). Так, для радиосистем и радиоустройств средней сложности имеют место такие иерархические уровни, как идеология данного класса систем, теории подкласса систем, подсистем, устройств, конструирования и технологии.

Задачи уровня идеологии решаются главным конструктором системы, его заместителями и главными конструкторами подсистем.

Теоретические аспекты решаются в теоретических отделах НИИ радиоинженерами, математиками, (физиками, экономистами и другими специалистами.

Проектирование системы осуществляется в комплексном (схемотехническом) отделе соответствующими инженерами. В отраслевых отделах проектируются подсистемы различного назначения.

Конструкторский и технологический отделы (бюро) решают задачи конструирования и разработки технологии производства необходимых изделий.

Приведенные здесь иерархические уровни могут делиться на ряд подуровней. Общая задача для каждого ранга уровней и подуровней разбивается на более частные, специализированные задачи. Эти задачи решаются в процессе проектирования различными группами специалистов.

Принципы специализации и иерархичности должны органически сочетаться с широкими возможностями ЭВМ и средств автоматики. Автоматизация и соответствующие ей системы (АСНИ, САПР) должны обеспечивать взаимодействие по вертикали и по горизонтали между процессами решения всех специализированных задач, а также ускорение и уменьшение стоимости их решения.

15.3. Морфологический анализ. Программное решение технических задач

Одним из примеров реализации системного подхода в творческом процессе является метод морфологического анализа. Этот метод состоит в составлении двумерных или многомерных матриц (таблиц) основных признаков (свойств) системы и последующем сравнительном анализе. При этом в совершенствуемой технической системе производят две основные операции:

1) выделяют несколько наиболее характерных признаков построения системы (структурных, морфологических);

2) по каждому выделенному морфологическому признаку составляют список возможных конкретных вариантов (альтернатив) технической реализации признаков.

Последовательность морфологического анализа можно представить следующим образом:

1) точно сформулировать задачу;

2) составить список всех характеристик, морфологических признаков объекта (системы);

3) по каждой характеристике перечислить возможные варианты;

4) проанализировать возникающие при этом сочетания;

5) отобрать наиболее удачные сочетания (варианты);

6) составить «образ» проектируемой системы на основе отбора лучших вариантов.

Под «образом» системы понимается формулировка основных принципов ее построения, которые определяются лучшим или сочетанием нескольких лучших вариантов.

В качестве примера проектирования систем передачи информации приведена двумерная матрица признаков системы (табл. 15.1).

Таблица 15.1

Система	Градации признаков			
Одноканальная	АМ	ЧМ	ФМ	ОФТ
Многоканальная	С частотным уплотнением АМ — ЧМ	С частотным уплотнением ОМ — ЧМ	С частотным уплотнением и разделением сигналов по форме	С временным уплотнением КИМ
Адаптивная	Адаптация к передаваемому сигналу	Адаптация к принимаемому сигналу	Адаптация к каналу	Адаптация к помеховой обстановке
Связная	Кабельная	Радиорелейная	Метеорная	Спутниковая

Из рассмотрения табл. 15.1 следует, что возможно 4^4=256 комбинаций признаков или принципов построения системы. Обычно в реальной аппаратуре используется несколько из этих комбинаций. Анализ элементов матрицы может привести к совершенно новому принципу построения радиосистемы, к преодолению инерционности мышления разработчика.

В некоторых случаях морфологические признаки системы обозначаются буквами, а варианты их — соответствующими индексами, например: А — передатчик, Б —модем, В — кодек, Г — антенны, Д — приемник, Е — канал, Ж — решающая схема и т.д.; $А_1$— широкополосный, $А_2$ — узкополосный, $А_3$ — импульсный, $А_4$ — маломощный, $А_5$ — мощный и т.д.; $Б_1$ — АМ, $Б_2$ — ЧМ, $Б_3$ — ОМ, $Б_4$ — ФМ, $Б_5$ — ДМ, $Б_6$ — КИМ и т. д. Возможные комбинации морфологических признаков с учетом их градаций записываются в виде: $А_4$—$Б_3$—$В_5$.....$Ж_{17}$; $А_8$—$Б_{15}$—$В_7$,...$Ж_4$ и т. д. При необходимости число признаков и градаций можно существенно увеличить, что позволяет анализировать большее число удачных вариантов. В общих случаях составляются многомерные матрицы морфологических признаков объекта (системы). Естественно, что выбор лучших вариантов требует творческого подхода к процессу проектирования (разработки).

На современном этапе проектирования радиотехнических систем и устройств широко используется сочетание метода морфологического анализа с программным решением технических задач. Это обусловлено тем обстоятельством, что некоторые задачи и подзадачи в принципе не могут быть решены без помощи ЭВМ. Например, невозможно производить вручную трассировку сложных микросхем, изготовлять тысячи необходимых технических документов. Для решения этих задач целесообразно создание автоматизированных систем управления (АСУ). АСУ должны управлять всем процессом проектирования. Создаются также подсистемы автоматизированного проектирования отдельных частей системы (подсистем, устройств, блоков, узлов и т. п.). Большое значение уделяется разработке электронных цифровых моделей систем и их составных частей.

Широкое внедрение программных и математических методов проектирования нисколько не умаляет значения эвристической деятельности разработчиков и всех методов коллективного творчества. Это обусловлено тем, что в современных условиях усложнение технических систем и разнообразие выполняемых ими функций, возрастание числа используемых физических явлений и принципов передачи, обработки и извлечения информации, увеличение вариантов схемотехнических решений и элементной базы значительно опережают развитие математических методов и, как правило, требуют активизации эвристической деятельности разработчиков. Для решения задач проектирования новейших изделий необходима столь высокая степень нестандартного творческого подхода, что она не может в принципе быть ЭВМ. Решить эти задачи способно лишь человеческое мышление с помощью эвристических и других методов научного и технического творчества. В связи с этим необходимо всемерное повышение эффективности эвристической методологии в самых различных аспектах ее проявления.

Особое значение приобретает совершенствование машинно-эвристических методов проектирования на базе ЭВМ, которые позволяют реализовать режим непосредственного диалога человека с машиной. Применение таких комбинированных машинно-эвристических методов дает разработчику (проектировщику) возможность органически объединить наиболее ценные приемы эвристических, математических и экспериментальных методов.

9.4. Ассоциативные методы

Рассмотрим диалог доцента Петрова со студентами радиотехнического факультета Ивановым, Сидоровым, Матвеевой, Комаровой, Онищенко, Усковой, Юрченко. Для сокращения будем фамилии преподавателя и студентов обозначать начальными буквами.

П.— Я хочу обучить вас одному из ассоциативных методов коллективного творчества. Название ему вы попробуете дать сами после нескольких совместных действий, определяющих последовательность процедур метода. Вам, Ускова, я даю орфографический словарь, из которого нужно будет по случайному выбору ваших коллег найти «ключевые» слова. Студент Сидоров, подойдите, пожалуйста, к доске и запишите слова, найденные Усковой. Все остальные предлагают «ключевые» слова, называя номер страницы словаря, который находится у Усковой. Кроме номера страницы необходимо назвать левую или правую часть страницы, разделенную вертикальной чертой (такова структура словаря) и порядковый номер строки сверху или снизу. Всем понятно? Прошу также учесть, что слова занимают в словаре страницы 33...204.

И.— С. 169, правая сторона, 14 строка снизу.

У.— Это слово «секция».

П.— Ну что же, студент Сидоров, запишите это первое «ключевое» слово.

О.— С. 104, правая сторона, 24 строка сверху.

У.— Нашла, это слово «множество».

С.— Записываю.

П.— Хорошо. Прошу называть следующие слова. Учтите также, что всего в левой и правой частях страницы не более 40...41 строки.

Ю.— С. 78, левая сторона, 5 строка снизу.

У.— Слово «змея».

М.— С. 193, левая сторона, 12 строка снизу.

У.— «Фильтр».

П.— Студент Сидоров, что Вы можете сказать относительно записанных на доске слов «секция», «множество», «змея», «фильтр», «кассета», «кино», «полюс», «науськивать», «по-волчьи», «белена»?

С. — Не знаю. Какой-то бессмысленный набор слов.

П.— А если подумать? Возьмем чисто профессиональную, радиотехническую сторону.

И.— Разрешите, я попробую. Мне кажется, что в радиотехнической интерпретации можно использовать слова «секция», «множество», «фильтр», «кассета», «полюс», остальные слова необходимо отбросить.

П.— Молодец. Кто мыслит иначе?

О.— По-моему, можно еще включить в этот набор слова «змея» и «кино», так как в них также кроется какой-то радиотехнический смысл, особенно в таких их модификациях, как «змеевидный», «змееобразный», «змеевик», «телекино», «телекинокамера» и т. п.

П.— Отлично, Онищенко! Вы предугадали по существу следующую последовательную процедуру метода. Действительно, из набора «ключевых» слов можно выбирать любое, модифицировать его или дополнять его списком признаков случайных объектов («ключевых» слов). Кто из вас может назвать главное «ключевое» слово или главный объект исследования, дальнейшего творчества?

Ю.— Непонятно, откуда его взять.

П.— Что же здесь непонятного? Из списка «ключевых» слов нужно выбрать главное, сфокусировав при этом на нем все внимание как на объекте творчества!

И.— Наверное, нас как радистов скорее всего заинтересует слово «фильтр».

П.— Правильно! Кто может опровергнуть Иванова, назвать другое главное слово, объект?

С.— По-моему, другое слово подобрать сложно, так как слова «фильтры» и «фильтрация» имеют широкое применение в радиосистемах и радиоустройствах.

П.— Давайте подведем итог первого этапа дискуссии. В нашем распоряжении набор «ключевых» слов и главное «ключевое» слово — объект исследования (творчества). Это, безусловно, «фильтр». Кто даст название методу?

М.— Ассоциативный метод.

П.— Вы внимательны. Я действительно вначале дискуссии упоминал об этом, но все-таки, какой именно ассоциативный метод? Помогу Вам немного. Раньше он назывался «метод каталога», «метод гирлянд ассоциаций». Онищенко даже предложил такие ассоциации из ключевых слов «змея» и «кино». Напомню, что мы говорили о фокусе и фокусировке внимания на главном «ключевом» слове. Ну, кто предложит соответствующее название?

С.— Метод фокусировки.

О.— Метод главного объекта.

И — Метод ключевых объектов.

П.— В предложенных названиях почти правильно определена сущность метода. Я вам еще немного помогу. Объединим определения Сидорова и Юрченко и напомним сущность метода, которая заключена в том, что главное «ключевое» слово (объект) лежит как бы в фокусе переноса смысловых ассоциаций (списка признаков других

«ключевых» слов набора). Поэтому далее этот метод будем называть методом фокальных объектов. Есть у вас вопросы?

О.— При чем здесь «каталог»?

П.— Кто сможет объяснить?

М.— Мы для выбора «ключевых» слов пользовались орфографическим словарем. С таким же успехом можно было бы использовать библиографический каталог, любую техническую или художественную книгу.

П.— Совершенно верно. Естественно, что телефонный справочник для этой цели мало пригоден. Кто теперь назовет первую операцию (последовательную процедуру) метода фокальных объектов?

У.— Выбор «ключевых» слов.

П.— В чем его особенность?

М.— Мы использовали элемент случайности. Это напоминает процесс рандомизации при выборе номера опыта в процедуре планирования многофакторного эксперимента: из колоды карт (номеров), как в лотерее, производится случайный выбор номеров.

П.— Назовите, пожалуйста, вторую последовательную процедуру метода, которую мы с вами уже сделали.

К.— Выбор главного «ключевого» слова из набора.

П.— Все же давайте ближе к названию метода.

К.— Выбор фокального объекта.

П.— Вот это другое дело, правильно. Студент Онищенко, развейте, пожалуйста, вашу предыдущую мысль о «модификациях» «ключевых» слов и попробуйте сформулировать третью последовательную процедуру метода фокальных объектов.

О.— Я думаю, что это составление списков признаков случайных объектов (неглавных «ключевых» слов из набора).

П.—Совершенно верно! Где такая процедура уже проводилась?

К.— Наверное, при составлении матриц в методе морфологического анализа, где двумерная матрица содержит набор признаков системы (объекта) и возможные их градации.

П.— Правильно. Вы тоже теперь активно включились в дискуссию! Предложите, пожалуйста, список признаков случайного объекта для слова «кино».

К.— «Немое», «звуковое», «черно-белое», «цветное», «широкоэкранное», «панорамное», «стереоцветное».

П.— Кто предложит список признаков слова «полюс»?

И.— «Северный», «южный», «магнитный», «геомагнитный», «многополюсный», «однополюсный», «положительный», «отрицательный», «земной».

П.— С каким другим случайным объектом из набора ассоциируется слово «многополюсный»?

И.— Скорее всего с объектом «множество».

П.— Правильно. Собственно, можно бы уже и ограничиться этими двумя списками признаков случайных объектов «кино» и «полюс». Я предлагаю еще использовать список признаков или «гирлянд ассоциаций» Онищенко к объекту «змея»: «змеевидный», «змееобразный», «гремучий», «спиралеобразный», «очковый». Сидоров, Вы записываете? Кто предложит теперь следующую, уже четвертую процедуру метода?

М.— Объединение фокального объекта и признаков случайных объектов.

П.— В общем мысль неплохая. Но здесь хорошо бы использовать известную Вам из предыдущего материала одну из основных процедур метода «мозгового штурма». Кто напомнит нам сущность этого метода?

Ю.— Метод «мозгового штурма», или «мозговой атаки», состоит в следующем. Собирается коллектив специалистов различного профиля. Перед ними организатором «штурма» ставится вполне определенная проблема: как преодолеть данное конкретное техническое противоречие?

Первый этап называется «генерацией идей». Участники высказывают любые идеи, которые фиксируются организатором. При этом ставится обязательное условие: ни одна из предложенных идей не подвергается критике или одобрению, даже шуточные, фантастические, на первый взгляд явно абсурдные, противоречащие известным законам природы, «сумасбродные» и т. п.

Второй этап «мозгового штурма»: экспертная оценка идей. Он, как правило, осуществляется более узкой группой специалистов того профиля, который имеет прямое отношение к области решаемой проблемы. Наиболее удачные идеи отбираются экспертами и подвергаются дальнейшей более детальной проработке.

П.— Все, безусловно, верно. Давайте в четвертой процедуре метода фокальных объектов использовать «генерацию идей»! Студент Юрченко, сформулируйте название этой процедуры.

Ю.— Генерирование идей с использованием фокального объекта и списков признаков случайных объектов.

П.— Я внесу только небольшую поправку***: генерирование идей путем присоединения к фокальному объекту признаков случайных объектов***. Кто же совершит эту процедуру применительно к нашему фокальному объекту «фильтр» и списков признаков к случайным

объектам «кино», «полюс», «змея», «кассета»? Попробуйте Вы, Иванов.

И.— Многополюсный многокассетный стереоцветной очковый фильтр.

П.— Кто придумал лучшие ассоциации? По-видимому, Иванов предложил наиболее удачную. Нет возражений? Хорошо. Но здесь Иванов несколько опередил события: им фактически выполнена не только четвертая процедура метода, которую мы с вами только что определили, но и пятая. В самом деле, согласно определению четвертой процедуры можно было бы генерировать идею с использованием фокального объекта и одного из списков признаков, например, «многополюсный фильтр», «стереоцветный фильтр». Иванов обобщил эти частные идеи, выполнив операцию развития полученных сочетаний путем свободных ассоциаций, что соответствует пятой последовательной процедуре метода фокальных объектов. Далее я вправе задать вам естественный вопрос: следующая, теперь уже конечная процедура метода?

С.— Теперь, очевидно, нужно определить область применения названного фильтра. Наверное, это будет стереоцветное телевидение, где такой фильтр может применяться зрителями кинозала для восприятия цветного и объемного изображения.

П.— Как же назвать эту процедуру?

М.— Я думаю, что далее можно применить метод ***эмпатии.***

П.— Все помнят этот метод? Нет? Помните, я приводил пример с «белой вороной» — как ее окрасить? Пожалуйста, студент Матвеева, напомните.

М.— Метод «эмпатии» заключается в отождествлении личности одного человека с личностью другого, даже с неодушевленным предметом (объектом). Иными словами, ***«эмпатия» означает буквально процесс «вживания в образ»***. Например, можно представить себя (если я разработчик объекта) частью системы, подсистемы, устройства, узла, детали («я—транзистор»). Здесь уместно задать себе вопросы: «Мне не больно?», «Не слишком ли мне жарко?», «Не требуется ли то или иное изменение режима?» и т. п. Кстати, можно представить себя «белой вороной» и решать задачу: «Какой бы я хотела себя видеть после окраски? Серой, зелено-оранжевой, голубой, красной, серо-буро-малиновой и т. д.».

П.— Все вспомнили? Вот и хорошо. Нет ли других предложений? Можно, конечно, и «вжиться в образ» многополюсного многокассетного стереоцветного очкового фильтра. Однако это будет лишь решением частной задачи. Придется, я вижу, здесь снова

обратиться к уже удачно использованному нами в процессе коллективного творчества методу «мозгового штурма». Юрченко назвал нам первый этап или первую процедуру этого метода, нельзя ли не оставить без внимания вторую?

Ю.— Тогда пятой процедурой метода фокальных объектов является экспертная оценка (оценка полученных идей и отбор полезных решений).

П.— Совершенно верно. В самом деле, ведь таких свободных «гирлянд ассоциаций», как мы получили, может быть множество (если использовать весь набор «ключевых» слов — случайных объектов и списки их признаков). Есть ли ко мне вопросы? Теперь мне кажется, что вы овладели ***методом фокальных объектов***. Попробуйте дома проделать все его процедуры для других фокальных и случайных объектов.

15.5. Метод контрольных вопросов

Этот метод так же, как и метод фокальных объектов, относится к классу ассоциативных. Создание различных алгоритмов решения изобретательских задач (АРИЗ) дало возможность рассматривать процесс технического творчества как последовательность операций по выявлению, уточнению и преодолению технических и физических противоречий, лежащих в основе эвристической деятельности разработчиков. Сущность метода контрольных вопросов состоит в том, чтобы с помощью наводящих вопросов подвести исследователя к решению задачи. При этом, естественно, преследуется цель разрушить инерционность мышления, подвести разработчика к постановке и решению нестандартных задач, натолкнуть на неожиданное эффективное и удачное решение технической задачи, развить творческую активность инженеров.

В целом психологическая активизация творческого мышления достигается конкретным алгоритмом последовательных действий (процедур), который обычно сформулирован в виде списка контрольных вопросов. Такие списки разрабатываются на основе накопленного опыта решения технических задач, в частности изобретательства (АРИЗ). Известны списки различных авторов. Большинство из них относятся к изобретательскому творчеству. В качестве примера приведем список контрольных вопросов известного английского изобретателя Эйлоарта :

1. Перечислить все качества предполагаемого изобретения.
2. Сформулировать задачи ясно. Дать новые формулировки. Выделить главные из них.
3. Перечислить недостатки имеющихся решений.

4. Набросать фантастические, биологические, экономические и другие аналогии.

5. Построить математическую, физическую, гидравлическую, электронную и другие модели.

6. Попробовать различные виды материалов.

7. Установить варианты, зависимости, возможные связи, логические совпадения.

8. Узнать мнение некоторых совершенно не осведомленных в этом деле людей.

9. Устроить групповое обсуждение методом мозгового штурма.

10. Попробовать «национальные» решения: хитрое шотландское, всеобъемлющее немецкое, расточительное американское, сложное китайское и т. д.

11. С проблемой: спать, идти на работу, гулять, принимать душ, ехать, пить (воду), играть в теннис и т. д.

12. Бродить среди стимулирующей обстановки (свалки лома, технических музеев, магазинов уцененных вещей, рынков, просматривать журналы, комиксы, странички юмора («нарочно не придумаешь»).

13. Набросать таблицу цен, величин, перемещений, типов материалов, разных решений проблемы или отдельных ее частей, искать пробелы или новые комбинации.

14. Определить идеальное решение, разрабатывать возможные.

15. Видоизменить решение проблемы с точки зрения времени (быстрее или медленнее), размеров, форм, вязкости и т. д.

16. В воображении залезть внутрь системы, устройства.

17. Определить альтернативные проблемы и системы, которые исключают определенное звено из цепи и, таким образом, создают нечто совершенно иное, уводя в сторону от нужного решения.

18. Чья это проблема? Почему моя, а не кого-то другого?

19. Кто придумал это первый? История вопроса. Какие ложные толкования этой проблемы раньше имели место?

20. Кто еще решал эту проблему? Чего он добился?

21. Определить общепринятые граничные условия и причины их установления.

Приведенный список контрольных вопросов может быть дополнен перечнем приемов преодоления технических противоречий применительно к проектированию технических систем. В каждом конкретном случае может оказаться такая ситуация, что никакая совокупность приемов данного списка (или другого) не позволит преодолеть возникающие технические противоречия. В таком случае

необходим поиск новых творческих (эвристических) приемов. Выбор из списка наилучших приемов применительно к каждому конкретному случаю также требует творческого подхода. В любых списках контрольных вопросов последние сформулированы настолько одинаково, что требуется для конкретных технических задач выявить наиболее приемлемую форму вопроса (приема). Это возможно лишь на основе нестандартного творческого подхода к решению поставленной изобретательской либо разработческой проблемы. Естественно, что каждый проектировщик или изобретатель вооружается арсеналом наиболее удобных и отработанных приемов на базе накопленного практического опыта и анализа результативности метода.

15.6. Синектика

***Синектика*—это комплекс методов психологической активизации творческого процесса**. Она предполагает создание постоянных групп специалистов, осуществляющих «мозговой штурм» на определенных этапах проектирования (разработки), решения задач в изобретательской практике (АРИЗ). Такие группы, накапливая приемы, опыт, повышают эффективность поиска новых технических решений. При этом широко используются аналогии и ассоциации. Обычно при реализации метода синектики применяются личная, символическая и фантастическая аналогии.

Метод синектики предложил Гордон (США). Назначение метода связано с тем, что методика, разработанная Гордоном, впервые была реализована в 1960 г. фирмой «Синектик инкорпорейтид», которая с 1960 по 1970 г. обучила 2 тыс. специалистов. Само слово «***синектика***» (греч.) — ***совмещение разнородных элементов***. Синектика является наиболее сильной из созданных методик психологической активизации разработчиков. По существу метод синектики является дальнейшим развитием известного метода «мозгового штурма». Обычно метод синектики предполагает, как и «мозговой штурм», проведение синектического заседания специалистов, занимающихся разработкой проблемы в той или иной области. В качестве примера на рис. 15.4 изображена одна из типовых структур синектического заседания.

Рассмотрим последовательно проводимые 12 операций метода. Первые четыре операции осуществляют логический и творческий переход от состояния «Проблема, как она дана» (ПКД) к состоянию «Проблема, как ее понимают» (ПКП). Эта эвристическая задача решается постановкой проблемы в общем виде; анализом проблемы с тем, чтобы сделать ее знакомой (понятной); отсеиванием первых неудачных решений.

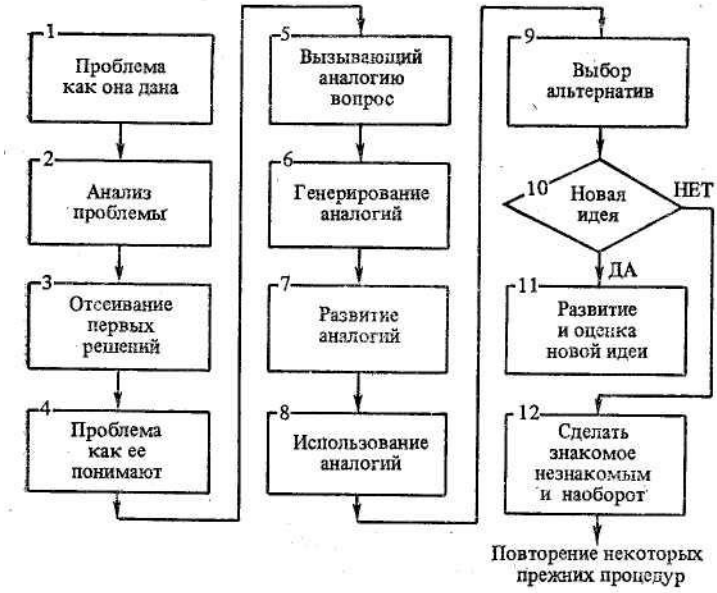


Рис. 15.4. Структура синектического заседания, интерпретирующая метод синектики

Пятая операция предполагает применение метода аналогий «Вызывающий аналогию вопрос» (ВАВ). Далее производится генерирование следующих аналогий: прямой, личной («эмпатии») и символической. В качестве примера символической аналогии рассмотрим выбор с помощью списка ключевых слов наиболее удачного названия книги (табл. 15.2).

Предполагается, что искомое название должно содержать парадокс, а также вызывать интерес читателей.

Седьмая операция метода основана на дальнейшем развитии упомянутых аналогий, обыгрывании их, выявлении тех или иных значений. На этом этапе можно применить методы морфологического анализа, мозгового штурма, фокальных объектов.

Следующий этап заключается в использовании аналогий. При этом формулируются понятия аналогий к состояниям ПКД и ПКП с целью генерирования новых идей.

Таблица 15.2

Ключевое слово	Название
Гарантия	Оптимизация гарантии управления
Игра	Теоретико-игровой синтез систем
Случай	Статистическая теория случайных процессов
Конфликт	Теория радиопротиводействия
Код	Теория кодирования сигналов
Цифра	Цифровая фильтрация изображений
Восприимчивость	Оптимальный прием сигналов
Приспособляемость	Адаптивная нелинейная фильтрация
Благоприятность	Минимаксность распределения вероятностей при различении случайных процессов
Цель	Исследование целевой функции «стоимость — эффективность»
Аппарат	Минимизация аппаратурной сложности систем
Опыт	Адаптивная фильтрация в условиях априорной неопределенности

Девятый этап состоит в выборе наиболее оригинальных (удачных) альтернатив. После этого 10-я процедура завершает цикл творчества дилеммой «есть новая идея или нет». В случае положительного ответа выполняется 11-я процедура, заключающаяся в развитии и оценке новой идеи. Здесь снова можно применять другие известные методы коллективного творчества. Если результат поиска отрицательный (новой идеи нет), то производится 12-я процедура «сделать знакомое

незнакомым (и наоборот)». Последнее достигается следующими способами:

— поиском новых аналогий путем новых вызывающих аналогию вопросов;

— повторением процедур 7 и 8;

— возвращением к состояниям ПКП и ПКД новых ВАВ, повторением этапов 7 или 8;

—формированием нового аспекта ПКП, повторением процедур 2, 5 и 8.

15.7. Комплексный метод поиска новых технических решений

Этот метод является дальнейшим развитием синектики и представляет интерес как средство управления процессом поиска новых технических решений и активизации эвристической деятельности разработчиков. Структурная схема комплексного метода поиска новых технических решений изображена на рис. 15.5.

Наряду с основными блоками в распоряжении разработчика имеются вспомогательные блоки операторов массивов информации, к которым обращаются в процессе анализа или синтеза решаемой задачи в основных блоках для выбора того или иного рецепта методологии творчества. При этом широко используются методы аналогии, эмпатии, фантазии, инверсии, морфологического анализа, мозгового штурма, индукции, дедукции.

Рассмотрим последовательность операций (действий) разработчика при использовании основных блоков, определяющих этапы творчества.

1. **Постановка и уточнение задачи**:

— описать исходную проблемную ситуацию, указав техническую систему (ТС), подлежащую рассмотрению, отразив сущность конфликта (что плохо?);

— определить конечную цель решения задачи (в чем заключается конечный результат решения, идеальный конечный результат (ИКР));

—определить главные ограничения (какие средства заведомо неприменимы, нельзя изменять или обязательно должны быть использованы?);

— определить направление решения. Наметить возможные направления достижения ИКР. Сравнить намеченные направления с ограничениями, перейти к минимальной задаче: «Все, что есть, минус недостатки». Если ограничения разрешают реализацию нескольких направлений, сравнить между собой эти направления и выбрать наиболее предпочтительное;

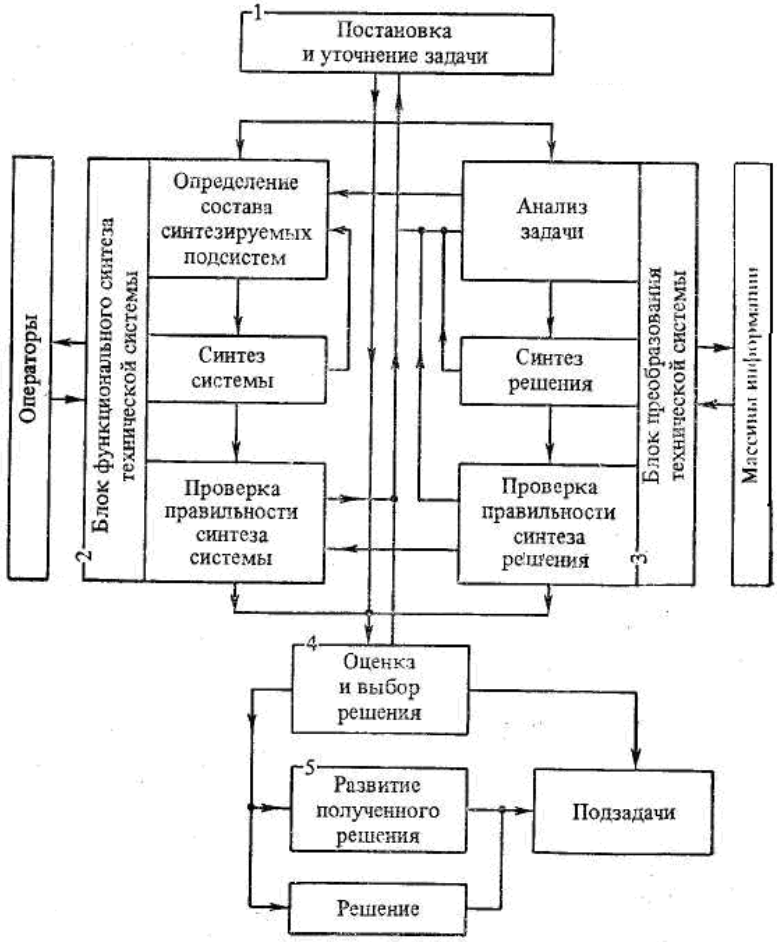


Рис. 15.5. Структурная схема комплексного метода поиска новых технических решений

— для выбранного направления решения уточнить ограничения. (Какие характеристики заведомо нельзя изменять? Какие «способности», кроме функций, должна иметь искомая ТС? Какие требования налагаются конкретными условиями, в которых предполагается реализация решения? Какова допустимая степень сложности решения? Определить требуемые количественные пока-

затели, характеризующие функционирование искомой ТС. Определить требуемые экономические, энергетические, экологические показатели, например допустимые затраты);

— записать условие задачи, соответствующей выбранному направлению, без использования специальных терминов [например, дана ТС, состоящая из элементов (указать); при условии (указать) возникает нежелательный (НЭ) эффект (указать)];

— использовать стандартные решения;

— использовать известные решения аналогичных задач.

Алгоритм функционирования блока постановки и уточнения задачи показан на рис. 15.6.

Как видно из этого рисунка, при решении некоторых задач разработчику необходимо обращаться к операциям других блоков, например к блоку функционального синтеза и преобразования ТС. Эти связи (прямые и обратные) изображены стрелками на рис. 15.6.

2. **Блок функционального синтеза технической схемы**

Определение *состава* синтезируемых подсистем:

— составить перечень подсистем, которые необходимо построить(создать);

— определить необходимые входы и выходы искомой ТС или достраиваемой части ее (отметить энергопотоки, проходящие через систему и подсистемы и требования к ним, циркуляции сигнала и помех, особенности пространственно-временной организации);

— определить необходимые взаимосвязи между подсистемами, обеспечивающие преобразование входов в выходы. Составить структурную схему искомой ТС и ее подсистем;

— определить входы и выходы подсистемы;

— разделить совокупность подсистем на группы степени влияния на выполнение главной полезной функции **(ГПФ)** системы. Выделить среди них центральную подсистему, которая в наибольшей степени влияет на показатели работы и перспективы развития ТС.

Синтез системы:

—наметить возможные варианты подсистем (указать физически возможные способы и соответствующие им структуры, реализующие получение требуемых выходов при заданных входах);

—выбрать варианты подсистем. Объединить и взаимно увязать подсистемы. При выборе вариантов подсистем учесть обеспечение работоспособности системы в целом, общность форм движения материи в подсистемах, возможность объединения элементов различных подсистем;

—описать полученную ТС, указать состав и взаимодействие ее элементов.

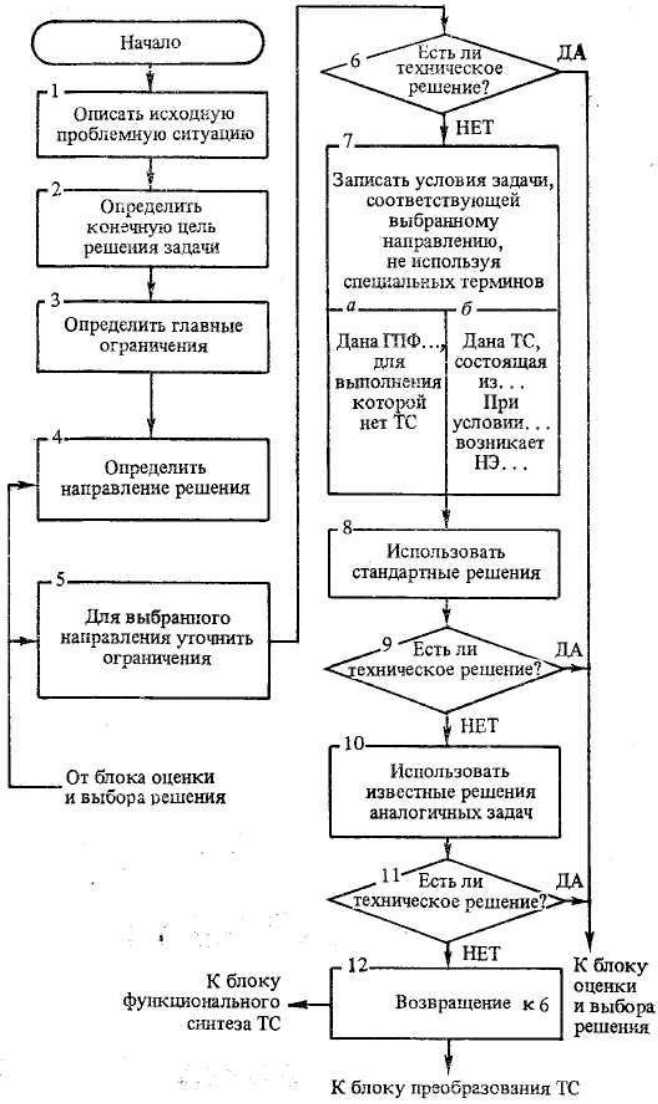


Рис. 15.6. Структурная схема блока постановки и уточнения задачи

Проверка правильности синтеза технической системы:

—выполнить анализ полученной ТС (проверить энергетическую и функциональную полноту, определить входы и выходы);

—выявить отличия получившихся характеристик системы от заданных (недостающие звенья энергоцепей недостающие полезные выходы (отклики), дополнительные входы, дополнительные неполезные выходы, отступления от требований ограничений);

—устранить недопустимые отличия получившихся характеристик системы от заданных (выделить явно недопустимые отличия, видоизменить состав и структуру системы устранением недопустимых отличий);

—описать полученную после видоизменений ТС, изобразить полученную структуру графически.

На рис. 15.7 приведен алгоритм работы блока функционального синтеза с его связями, входами и выходами.

3. Блок преобразования технической системы

***Анализ задачи*:**

—выявить природу нежелательного эффекта (НЭ), данного в условиях задачи;

—построить модель задачи;

—определить направление разрешения противоречия (физического или технического);

—построить модель идеального решения (ИКР), записать формулировку ИКР в форме: элемент (указать) сам устраняет НЭ (указать), не вызывая других ухудшений, сохраняя способность выполнять полезное действие (указать);

—выделить часть элемента, которая решает ИКР;

—сформулировать и проверить на совместимость физические требования к выделенной части элемента ИКР;

—составить формулировку физического противоречия (ФП).

Синтез решения

—разрешить ФП и сформулировать принципиальное решение;

—сформулировать физическое решение, реализующее условия достижения ИКР;

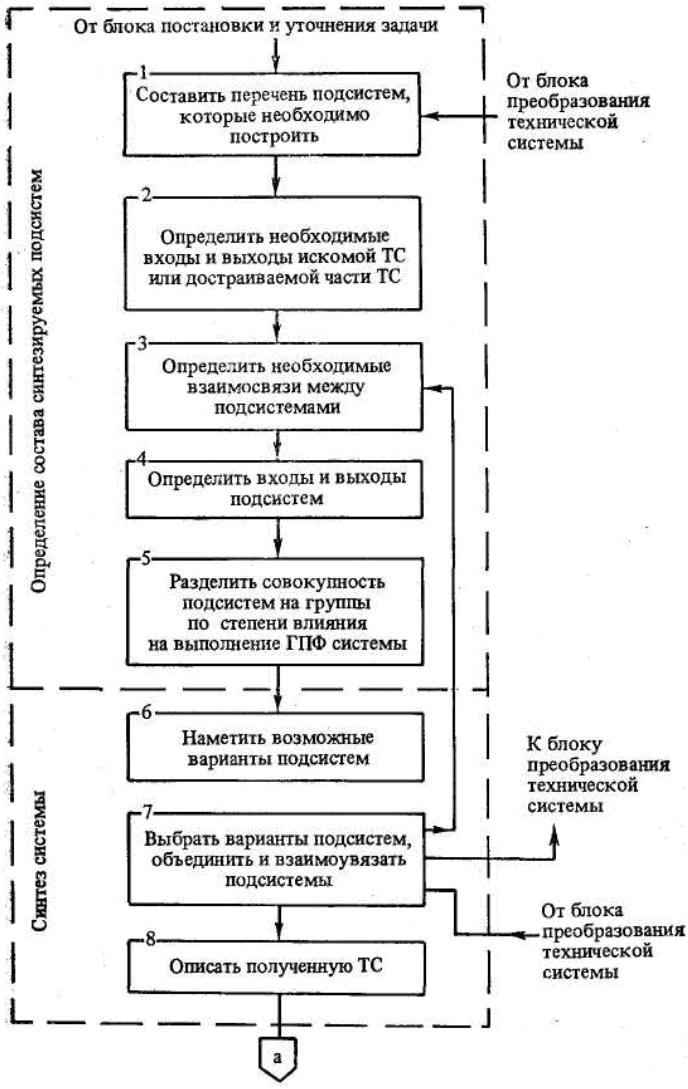
—сформулировать техническое решение (ТР) (способ, реализующий ТР, указать конкретные средства реализации, описать полученную ТС).

Проверка правильности синтеза решения:

—выполнить анализ полученной ТС, т. е. проверить энергетическую полноту, функциональную полноту, степень управляемости, достигается ли ИКР и т. п.;

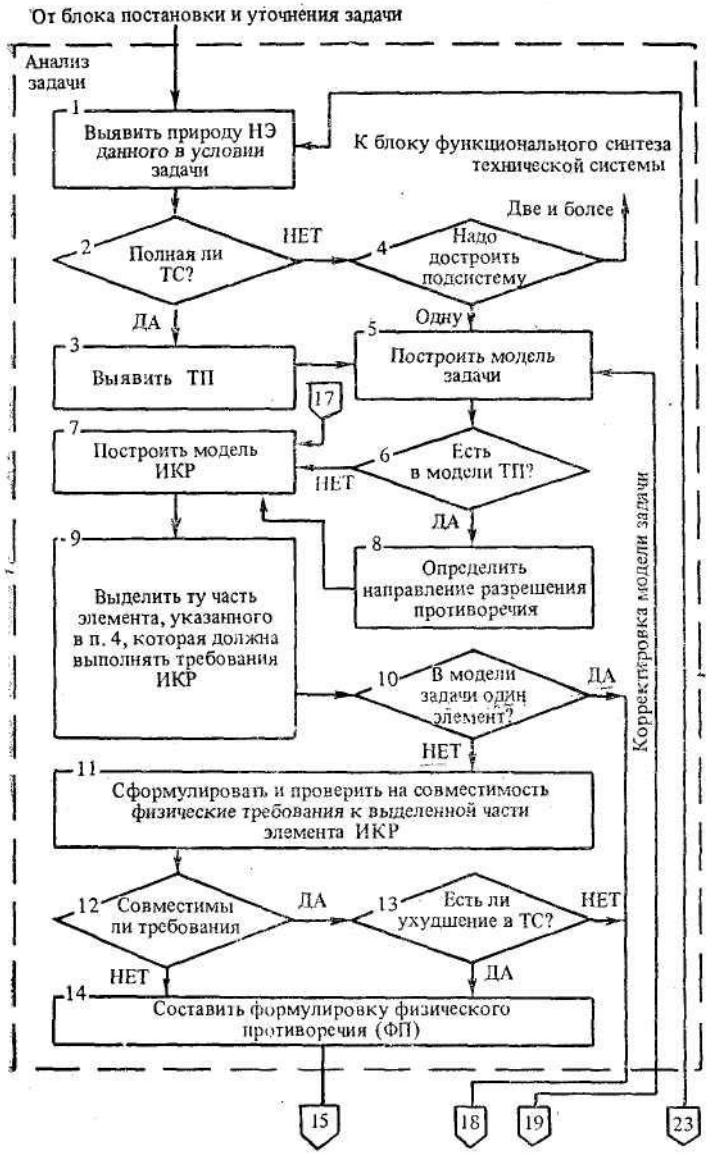
—устранить выявленные отклонения ТС от требуемого состояния, видоизменяя состав и структуру системы;

—описать полученную после видоизменений ТС (или ее подсистемы), изобразить полученную схему графически.



15.7. Алгоритм работы блока функционального синтеза технической системы

Алгоритм функционирования блока 3 изображен на рис. 15.8.



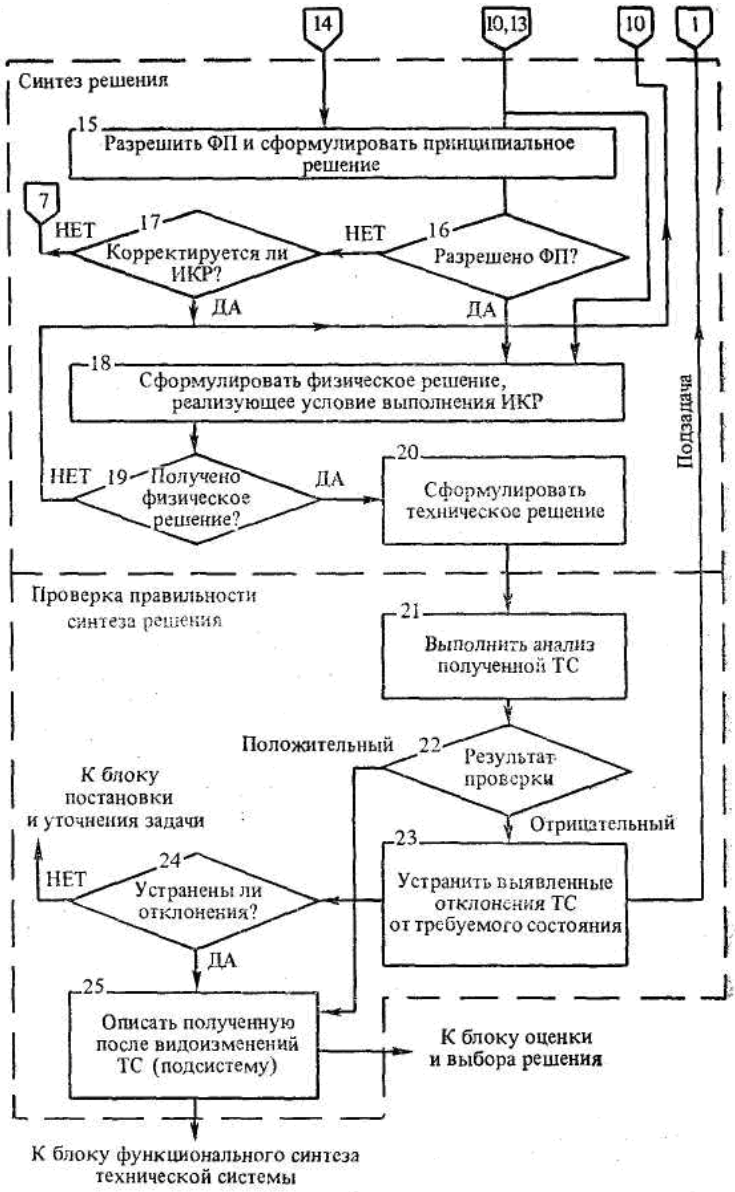


Рис. 15.8. Алгоритм функционирования блока преобразования технической системы

4. Оценка и выбор решения:

—оценить степень улучшения и ухудшения, выбрать вариант системы;

—выполнить анализ степени идеальности выбранной ТС; если нужно, то необходимо видоизменить систему;

—произвести оценку количественных показателей системы;

—сформулировать полученное решение с учетом произведенных изменений, описать полученную ТС, дать схему полученного устройства (способа);

— сформулировать подзадачи, которые могут возникнуть при технической разработке и реализации решения (изобретательские, конструкторские, технологические, организационные).

Следует учитывать, что степень сложности подзадач не должна превышать сложности основной (решаемой) задачи.

Алгоритм функционирования блока оценки и выбора-решения изображен на рис. 15.9.

5. Развитие полученного решения:

а) Определить новые возможности, полученные в результате решения:

—какие новые «способности» появились у ТС, у суперсистемы (надсистемы)?

— как должна быть изменена суперсистема, чтобы максимально реализовать новые возможности системы (суперсистемы)?

— как по-новому можно применить полученную систему (подсистему) в данной или в других отраслях техники?

б) Расширить область применения системы, рассмотрев ее модификации:

— выявить наиболее существенные параметры и признаки системы, определяющие ее функционирование (взаимное расположение элементов); последовательность действий; физические эффекты и явления, используемые в системе);

— построить «морфологический ящик» (матрицу) возможных модификаций системы, используя выявленные параметры и признаки (их градации);

— рассмотреть наиболее интересные модификации или группы модификаций, определить область возможного их применения.

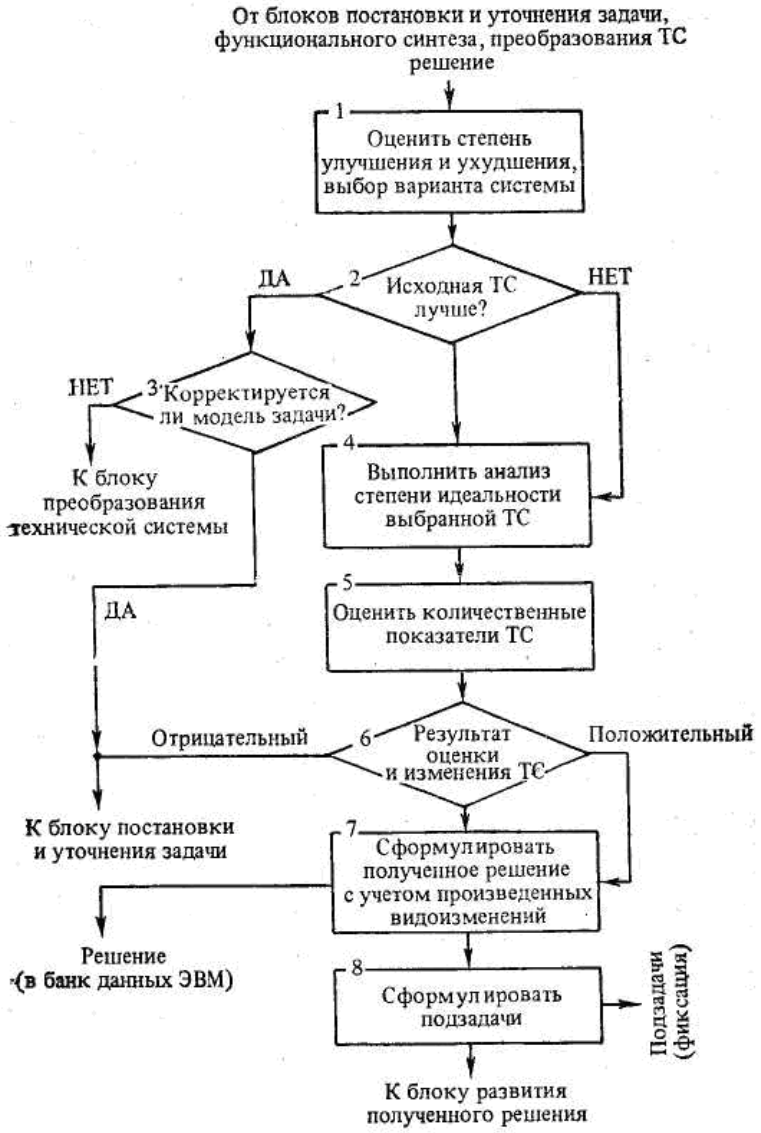


Рис. 15.9. Алгоритм функционирования блока оценки и выбора решения

в) Выявить новую информацию, полученную в результате решения:

— рассмотреть возможность использования идеи решения (или обратной ей идеи) для решения других задач;

— выявить из числа примененных при поиске решения технических операторов неизвестные ранее операторы или наиболее интересные их комбинации; если найдены такие комбинации или модификации системы (суперсистемы), то необходимо откорректировать решение задачи (подзадач);

— выявленную новую информацию занести в картотеку или в массивы информации.

Алгоритм функционирования блока 5, а также его связи с процессами решения задачи и подзадач показан на рис. 15.10.

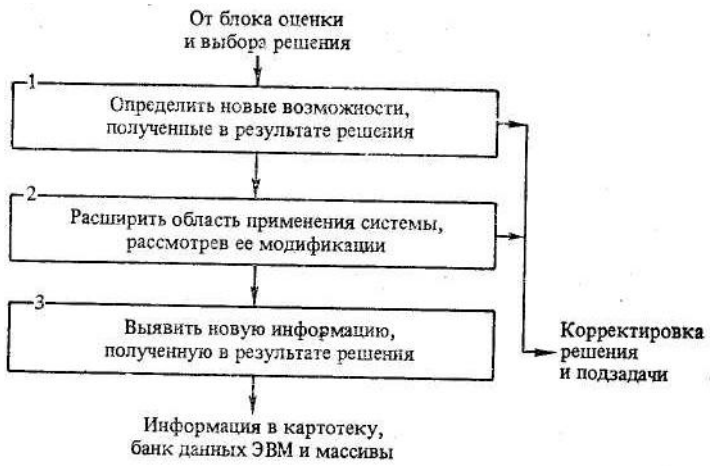


Рис. 15.10**.** Алгоритм работы блока развития полученного решения

Поскольку вспомогательные блоки операторов и массивов информации имеют самостоятельное значение в развитии методов технического творчества, их структуры рассмотрены в 15.8 и 15.9.

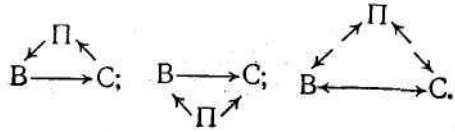
15.8. Операторы

Блок операторов как составная часть комплексного метода поиска новых технических решений содержит набор стандартных приемов (операторов), способствующих активизации процесса эвристической деятельности разработчиков. К различным операторам этого блока обращаются на многих этапах анализа и синтеза технической системы.

Вепольный оператор (вепольный анализ).

Веполь — система из трех основных компонентов: вещество, поле, среда.

Название происходит от сокращения двух первых компонентов. Условно веполи записывают структурными формулами: вещество (В) — в строку, поле (П) — сверху или снизу, среда (С) — в строку. Ниже показаны примеры развернутых веполей:

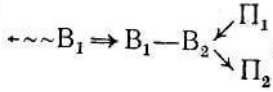


В табл. 15.3 приведен типовой набор стандартным структурных преобразований при проведении вепольного анализа.

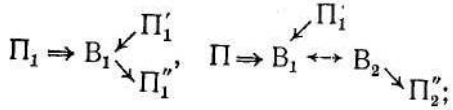
Для решения более сложных задач вепольного анализа табл. 15.3 может быть дополнена новыми обозначениями действий разработчика (изобретателя). Рассмотрим некоторые наиболее типовые модели задач, которые решаются с помощью вепольного оператора. Здесь будем акцентировать внимание лишь на тех задачах, которые имеют радиотехническое приложение или близки к этой области техники. Для решения этих задач используются действия вепольного анализа, условные обозначения которых приведены в табл. 15.3.

Рассмотрим некоторые типовые примеры использования вепольного анализа:

а) достройка веполя (введение второго вещества и поля)



б) преобразование исходного поля (электрического или магнитного) с помощью вещества-преобразователя или двух взаимодействующих веществ:



в) введение вещества, которое меняет свои свойства под действием поля $П_1$ причем это изменение легко обнаруживается с помощью поля $П_2$, действующего на то же вещество,

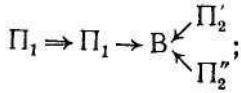


Таблица 15.3

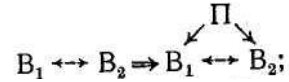
Условное обозначение операции (преобразования)	Сущность действия при проведении вепольного анализа
———	Связь
—→ ←—	Действие (направленное)
←→	Взаимодействие
⇝ ⇜	Неудовлетворительное действие, которое нужно изменить
⇒	Переход от условий задачи «дано» к результату «получено»
====⇒	Желаемый переход
П′, П″	Состояние поля на входе и на выходе (меняются лишь параметры, но не физическая природа поля).
В′, В″	Состояние вещества на входе и на выходе
$В' — В'', \overset{\sim}{П}$	Переменное состояние вещества и переменное поле
У →—	Управляющее воздействие
-/→	Менее сильное воздействие
-//→	Более сильное воздействие
$В_1$ —→ ←— $В_2$	Контактное взаимодействие
$В_у$, $П_у$	Хорошо управляемые (изменяемые) вещество и поле
△	Развернутый веполь

г) вещество обладает двумя конфликтующими свойствами; требуется улучшить одно свойство, не ухудшая другого, увеличить высоту антенны, не увеличивая ее массы, т. е. высокая антенна должна быть такой же легкой, как низкая,

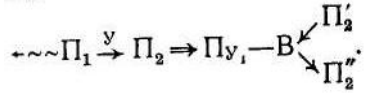
$$\overset{\sim}{\sim}\overset{\sim}{\sim}\overset{\sim}{\sim} В_1 \Rightarrow \sim\sim В_1' \Rightarrow В_1' \overset{П}{\triangle} В_2.$$

Как видно из преобразований вепольных операторов, данная задача решается переводом в классы задач *а* и *б* путем замены исходного вещества $В_1$ на новое вещество $В'_1$ которому заранее придано одно из сопряженных свойств;

д) два вещества взаимодействуют; требуется улучшить второе (дополнительное) взаимодействие, не ухудшая первого,



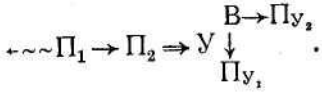
е) поле $П_1$ не управляет полем $П_2$; требуется обеспечить управление



Из обозначений процедуры вепольного анализа следует, что управление достигается введением вещества, которое обеспечивает требуемое управление.

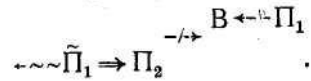
Эти же рецепты вепольного анализа можно применять при решении более сложных задач функционального синтеза систем. Ниже приведены решения типовых задач:

а) необходимо обеспечить изменение одного поля под действием другого поля, причем построение прямой энергоцепи от изменяющего элемента к изменяемому невозможно:



Задача решена введением дополнительного вещества в основную энергоцепь так, что изменяемый и изменяющий элементы (поля) не соединены прямой энергоцепью;

б) необходимо измерить трудноизмеряемое поле:



Задача решена воздействием на систему легкоизмеряемым полем $П_2$ таким образом, чтобы компенсировалось действие трудноизмеряемого поля $П_1$. Для этого введено вспомогательное вещество, на которое воздействуют упомянутые поля. По величине легкоизмеряемого поля $П_2$ в момент компенсации судят об объекте измерения.

В необходимых случаях задачи функционального синтеза, решаемые с помощью вепольных операторов, вводят в массив стандартных решений блока массивов информации (15.9).

Оператор групповых эвристических приемов обобщенного алгоритма поиска новых технических решений. В этот оператор входят следующие группы стандартных приемов: 1) количественные изменения; 2) преобразования формы; 3) преобразования в пространстве; 4) преобразования во времени; 5) преобразования движения; 6) преобразования материала; 7) преобразования исключением; 8) преобразования добавлением; 9) преобразования заменой; 10) преобразования интеграцией; 11) преобразования дифференциацией; 12) преобразования с помощью профилактических мер; 13) преобразования использованием резервов; 14) преобразования по аналогии; 15) комбинирование; 16) иерархическое ранжирование; 17) преобразования изменением управляемости; 18) преобразования изменением динамичности; 19) преобразования переходом с макроуровня на микроуровень (и наоборот); 20) преобразования переходом от однофункциональной к многофункциональной системе (суперсистеме).

Операторы групповых эвристических приемов широко используются в разработке, в изобретательской практике. Так, например, практика патентной экспертизы выявила около 50 признаков новизны технических решений, которые обеспечиваются только первыми 15 из перечисленных эвристических приемов. При анализе 900 решений конструкторско-изобретательских задач установлено, что 80% случайно взятых приемов позволяют решить более 80% таких задач. Присоединение к ним еще 6 специально подобранных групповых приемов расширяет эти возможности до 96 % .

Оператор определения конечной цели решения (оператор ИКР). Этот оператор базируется на совокупности приемов преодоления технических противоречий, рассмотренных в 15.1, а также на групповых эвристических приемах обобщенного алгоритма поиска новых технических решений. Для удобства составляется матрица индивидуальных или групповых приемов (табл. 15.4). Она выглядит таким образом: в боковике таблицы приводится перечень показателей (например, помехоустойчивость, пропускная способность, надежность, разрешающая способность, стоимость и т. п.), которые необходимо улучшить; в головке таблицы перечисляются показатели качества технической системы, которые нельзя ухудшить (те же параметры, что и в боковике таблицы-матрицы); в графах таблицы указывает номера приемов, взятых из предварительно составленного списка (индивидуальных или групповых).

Анализ такой матрицы (таблицы) дает возможность разработчику определить, какой совокупностью сочетающихся (непротиворечивых)

или антагонистических приемов достигается конечная цель решений или идеальный конечный результат. В некоторых случаях имеют место несколько групп сочетающихся приемов, внутри каждой из них все приемы могут быть сочетающимися, но не все приемы одной группы сочетаются с приемами других групп. В таких ситуациях существует несколько вариантов получения ИКР. В дальнейшем необходимо отыскать оптимальный вариант, используя теоретические и экспериментальные методы, методы АРИЗ и др.

Таблица 15.4

Показатели, которые необходимо улучшить	Показатели, которые нельзя ухудшить					
	Помехоустойчивость	Пропускная способность	Надежность	Разрешающая способность	...	Стоимость
Помехоустойчивость		1, 3 8, 12	5, 9 28, 34	43, 46	... ...	27, 40
Пропускная способность	1, 5 43		4, 11 29, 46	18, 19 36, 40	...	22, 36 43, 46
Надежность	2, 3 28, 31	33, 42 44, 46		4, 5 10, 17	...	7, 13 14, 19
Разрешающая способность	5, 16 20, 26	22, 23 44, 46	14, 21 36, 42		...	1, 3 30, 40
...	...	...	...	...	...	...
Стоимость	27, 40 45	5, 8 10, 18	16, 22 25, 44	32, 40 46	...	

Примечание. В графах указаны номера приемов преодоления технических противоречий, приведенных в 15.1; номера сочетающихся (непротиворечивых) приемов подчеркнуты.

Оператор моделирования «маленькими человечками». Применение этого оператора основано на представлении отдельных частей объекта (технической системы) из «толпы маленьких человечков», которые по приказу изобретателя (разработчика) могут выполнять различные действия: браться за руки, чувствовать, видеть, переносить груз, совершать различные движения и т. п. При этом «маленькие человечки» не должны ассоциироваться ни с кристаллической решеткой вещества, ни с молекулами, ни с атомами, которым присущи определенные физические законы и категории.

Рассмотрим следующую задачу. К внутренним стенкам полой замкнутой диэлектрической трубки попарно подведены контакты (рис. 15.1).

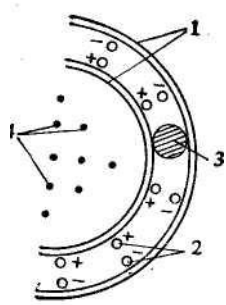


Рис. 15.1. Схема переключателя:
1- стенки полой диэлектрической трубки; *2* — контактные пары; *3* — ртутный шарик; *4* — электромагнитное поле, действующее перпендикулярно плоскости трубки

Для замыкания контактов используется ртутный шарик, который перемещается под действием лоренцовой силы, возникающей при взаимодействии постоянного тока с электромагнитным полем. Постоянный ток подается через любую из контактных пар, а полая диэлектрическая трубка помещена в поле электромагнита. Здесь имеет место недостаток: слишком часто расположить контактные пары нельзя, иначе будут замыкаться две пары контактов одновременно; кроме того, если шарик окажется в промежутке между нормально расположенными контактовыми парами, то цепь постоянного тока разрывается и шарик может остановиться. Такой переключатель (коммутатор) сможет нормально работать только в условиях вибраций, когда замыкание контактов вызывается механически .

Для устранения основного недостатка — прерывания цепи постоянного тока — воспользуемся методом моделирования «маленькими человечками».

На рис. 15.2, *а* изображена модель переключателя, выполненного согласно рис. 15.1. Контактные пары здесь смоделированы маленькими человечками К-1, К-2, К-3, К-4. Ртутный шарик моделируется маленькими человечками Ш-1, Ш-2, Ш-3. Положение шарика соответствует отсутствию протекания постоянного тока через него.

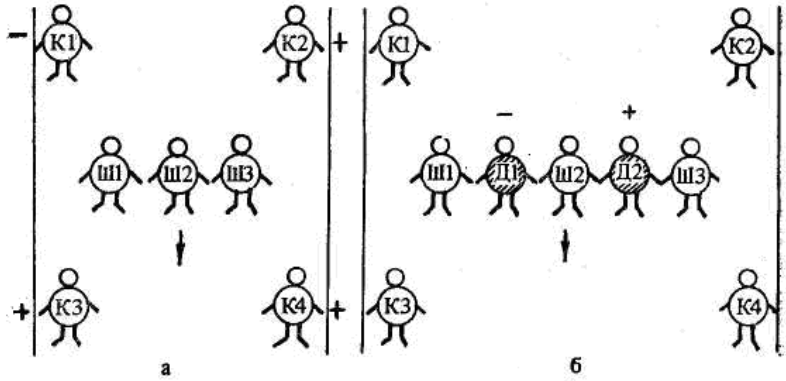


Рис. 15.2. Моделирование процесса коммутации;
а — старый вариант; б—новый вариант

Что нужно сделать для того, чтобы ток через шарик протекал независимо от положения последнего в трубке? Пусть эту задачу решают маленькие человечки (группы человечков) Д-1 и Д-2, через которые осуществляется непрерывная подача тока на шарик (рис. 15.2,б). Так, если Д-1 соответствует плюсу, то Д-2 — минусу цепи постоянного тока. Теперь разрыва цепи постоянного тока не происходит, поскольку группа маленьких человечков шарика, дополненная группой маленьких человечков токовой цепи, движется одновременно. Конструктивно задача решается введением в диэлектрическую трубку двух дополнительных токопроводящих шин, изолированных от контактных пар. Новый переключатель изображен на рис. 15.3.

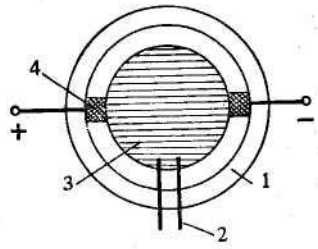


Рис. 15.3. Схема нового переключателя:
1 — стенки полой диэлектрической трубки; *2* — контактные пары;
3— ртутный шарик; *4* — дополнительные токопроводящие шины

Таким образом, данный оператор помогает заменить невыгодный зрительный образ (жесткий, сопротивляющийся изменениям) выгодным (гибким, готовым к любым изменениям). Этим оператором можно решать и более сложные задачи.

Оператор РВС. Психологическая инерция обусловлена не только терминами, в которых задается объект (техническая система), но и привычными пространственно-временными представлениями о нем. Размеры объекта и продолжительность его действия либо прямо указаны в условиях задачи, либо подразумеваются сами собой. Достаточно сказать «антенна», и мы представляем конструкцию определенной формы и размера (не менее 0,5 м и не более 600 м высотой). Достаточно сказать «производство радиоаппаратуры», и нам представляется непрерывный процесс, протекающий в течение определенного времени в зависимости от степени сложности аппаратуры (часы, дни, месяцы).

Существует еще одно измерение, в котором мыслится объект,— стоимость. Если мы говорим «транзисторный радиоприемник», то нам представляется прибор стоимостью в несколько десятков или несколько сотен рублей.

Оператор РВС — серия мысленных экспериментов, помогающих преодолевать привычные представления об объекте. При использовании оператора РВС последовательно рассматривают изменения трех параметров: размеров (Р), времени (В) и стоимости (С).

Рассмотрим, например, применение оператора РВС к задаче: «Найти способ обнаружения обрыва жил в коаксиальном кабеле». Для решения этой задачи рассмотрим вариации основных параметров: размера кабеля, времени обнаружения и стоимости обнаружения обрыва (табл. 15.5). При мысленных экспериментах с задачей по оператору РВС ответы могут быть совершенно различными. Это зависит от фантазии, знаний, опыта, т. е. от индивидуальных качеств человека. В данном примере не получено четко очерченного решения задачи. Однако в процессе решения найдена серия идей, довольно точно направленных в сторону поиска идеального конечного результата. Эти идеи помогают преодолеть психологические барьеры при дальнейшем анализе задачи другими методами.

Кроме перечисленных операторов могут применяться и другие, например: операторы выбора направления решения, сравнения альтернатив, терминологический, переноса решений, предметно-функционального анализа, выявления противоречия, разрешения противоречий, отрицания и т. п.

Таблица 15.5

Шаги решения	Операция	Изменение объекта (или процесса)	Метод решения измененной задачи	Принцип, использованный в решении
1а	$p \to 0$	Длина кабеля меньше 10 см	Рентгеноскопия, ультразвуковая дефектоскопия	Визуализация места повреждения
1б	$p \to \infty$	Длина кабеля больше 1000 км	Обнаружение на расстоянии — локация: радиолокация, светолокация, термолокация	Радиолокация, локация в обычных и инфракрасных лучах, двухсторонняя локация
2а	$B \to 0$	Обнаруживать нужно за 0,001с	Исключается рентгеноскопия, механические и химические способы. Остаются электромагнитные и оптические	Излучение электромагнитное или оптические
2б	$B \to \infty$	Обнаруживать нужно за 10 ч	Разъединение соединительных муфт (разъемов) и проверка строительных длин кабеля	Обнаружение дефекта при делении кабеля на части
3а	$C \to 0$	Стоимость обнаружения близка к нулю	В материал жил кабеля вводятся радиоактивные изотопы. Нарушение химической реакции позволяет найти место повреждения	Самообнаружение, самосигнализация
3б	$C \to \infty$	Стоимость обнаружения около 1 млн. р.	На каждый метр длины кабеля установлен дорогостоящий прибор, выполняющий роль индикатора и сигнализатора повреждения; создается постоянная система сигнализации на главном пульте управления	Добавление индикаторных приборов и создание общей системы сигнализации

15.9. Массивы информации

Массивы информации входят в качестве вспомогательного блока структуры комплексного метода поиска новых технических решений и представляют собой списки типовых (стандартных) приемов и решений для активизации эвристической деятельности разработчиков. Такими списками могут быть, например, приемы преодоления технических противоречий (см. 15.1), стандартные решения задач методом вепольного анализа (см. 15.8), рекомендации АРИЗ, «контрольные вопросы» и др. Ниже приводятся типовые массивы информации которые используются при поиске новых технических решений.

Массив типовых приемов разрешения противоречий в технических системах. В качестве такого массива можно использовать список типовых приемов, разработанный Л. С. Гуткиным (см. 15.1), а также список операторов групповых эвристических приемов (см. 15.8). При пользовании списками типовых приемов разработчик последовательно решает следующие основные задачи:

- выбор типовых приемов (одного или нескольких);
- последовательное рассмотрение всех выбранных приемов, начиная с наиболее часто повторяющегося;
- видоизменение технической системы в соответствии с рекомендациями приема с дополнениями этих рекомендаций известной информацией до получения физического или технического решения.

Массив стандартных решений состоит из трех основных групп действия:

1) изменение состояния объекта (системы), повышение управляемости;
2) получение информации о состоянии объекта (системы), обнаружение и измерение, синтез «измерительных» систем;
3) устранение (предотвращение) вредных воздействий и вредных последствий воздействия (взаимодействия). Пример построения списка стандартных решений приведен в табл. 15.6.

В каждой из трех основных групп табл. 9.6 приведены лишь два примера стандартных решений. Практически в более полных массивах информации их может быть десятки и даже сотни.

Таблица 15.6

Ограничительная часть	Предписывающаяся часть
Группа 1	
1. Необходимо повысить степень управляемости (изменяемости) системы, причем всю систему сделать легкоизменяемой невозможно	Сделать легкоизменяемой часть системы, выделив из имеющихся (или введя вновь) соответствующую подсистему: $\leftarrow\!\sim\!\sim \Pi \Rightarrow \Pi' - \Pi''_y$
2. В системе не используются ферромагнитные свойства элементов	Ввести магнитное (электромагнитное) поле $\leftarrow\!\sim\!\sim B \Rightarrow \begin{matrix} & B_1 \\ \Pi_y & \nearrow \end{matrix}$
Группа 2	
1. Необходимо получить легкоизменяемое поле, несущее информацию о состоянии объекта (системы)	Использовать скрытые способности вещества излучать такое поле самостоятельно или после активизации (после действия, повышающего внутреннюю энергию вещества) $B \Rightarrow B' \rightarrow \Pi_y$
2. Необходимо сравнить объект с эталоном	Использовать оптические копии и характерные сигналы, имеющие взаимнокомпенсирующий характер (противоположные знаки, полярности, поляризации и т. п.)
Группа 3	
1. Необходимо преодолеть запрет на изменение размеров объекта	Придать объекту одно из требуемых состояний (сделать объект постоянно большим или малым), противоположное состояние обеспечить изменением формы объекта или формы проявления свойств объекта
2. Необходимо преодолеть принципиальные препятствия, мешающие интенсификации происходящих в системе процессов и повышению качественных характеристик системы	Перейти к принципиально новой системе, обеспечивающей выполнение той же функции (ввести канал управления, канал обратной связи, другие модемы и кодеки)

Массив принципов идеальности. Сущность этого массива отражена в табл. 15.7.

Таблица 15.7

Принцип идеальности	Правила построения и видоизменения технической системы, соответствующие принципам идеальности
Стремиться получить полезный результат от действия или средства без самого действия или средства	Прежде чем строить ТС или подсистему, проверить, нельзя ли выполнить требуемую функцию за счет использования скрытых (побочных) свойств или действия других, чаще всего соседних, объектов, подсистем и систем путем изменения связей в системе или суперсистеме
Требуемые свойства и взаимодействия в ТС должны быть распределены только в тех областях пространства и моментах времени, которые необходимы для главной полезной функции или ИКР	Повысить степень неоднородности частей системы и суперсистемы в пространстве и времени, повысить степень динамичности (вплоть до отброса и регенерации частей) и управляемости (вплоть до самоорганизации и саморегулирования) системы и ее подсистем, согласовать пространственные и временные ритмы подсистем (устройств)
Необходимо максимально использовать вещества, поля и свойства элементов, имеющихся в системе (суперсистеме), устранять потери и отходы	а) Использовать неполезные выходы других систем и подсистем; б) использовать скрытые (побочные) свойства подсистем (довести степень загрузки подсистем до максимума; в) вместо введения в систему новых элементов использовать видоизменение имеющихся элементов или внешней среды (введение добавок, воздействие полями); г) максимально использовать пространство путем увеличения числа возможных измерений (использовать принцип «матрешки»); д) максимально использовать время за счет повышения непрерывности процессов, полезного использования рабочего цикла; е) стремиться к уменьшению числа преобразований энергии в энергоцепях, числа преобразований сигнала

Продолжение таблицы 9.7

Принцип идеальности	Правила построения и видоизменения технической системы, соответствующие принципам идеальности
Необходимо доводить до максимума скорость всех проходящих в системе процессов, обеспечивающих получение полезного результата (ИКР)	Повышать степень «отзывчивости» системы и ее элементов к процессу за счет предварительного исполнения части требуемых действий. Вместо последовательно протекающих процессов использовать параллельные (совмещать процессы), например, вместо последовательных систем обработки информации применять параллельные и т. п.

Массив правил построения энергопотоков в технических системах. В активно функционирующих технических системах (ТС) должны быть организованы энергетические потоки, обеспечивающие необходимый для правильного (нужного) функционирования ТС подвод энергии к соответствующим подсистемам и устройствам. Последнее необходимо для получения полезного результата превращения энергии и ее изменения в пространстве и времени. В работоспособной ТС должно быть, как правило, два энергопотока: основной и управляющий.

Основной энергопоток обеспечивает подвод энергии к системе (подсистеме) или проход энергии через нее. Управляющий энергопоток обеспечивает целенаправленное изменение основного энергопотока путем подвода энергии к одному из элементов (устройств) системы (подсистемы).

На рис. 15.4 изображен пример энергоцепи от источника энергии до «изделия» (замыкающего элемента).

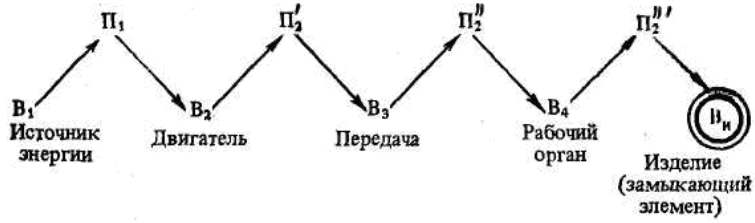


Рис. 15.4. Пример энергоцепи:

B_1 — источник энергии; B_2 — двигатель; B_3 — передача; B_4 — рабочий орган; $B_и$ — изделие (замыкающий элемент)

Символами П с различными индексами показаны соответствующие поля, воздействующие на составные элементы энергоцепи.

Изделием считается объект, изменение состояния которого является целью функционирования данной ТС. В самоуправляющихся ТС основной и управляющий потоки совмещены.

Массив правил построения энергопотоков содержит ряд конкретных рекомендаций по оптимальному управлению энергопотоками. Основные из них состоят в следующем:

- для осуществления управления энергопотоком необходим в составе основной энергоцепи хотя бы один хорошо управляемый элемент (вещество, легко изменяющееся под действием управляющего поля);
- интенсивности «измерительных» и управляющих энергопотоков должны быть по возможности минимальными;
- вещества основной энергоцепи не должны быть восприимчивы к «посторонним» полям, не используемым в основном энергопотоке (например, выполнение требований электромагнитной совместимости радиосистем);
- при построении энергоцепей необходимо стремиться к уменьшению числа элементов и преобразований энергии в энергоцепи:

— необходимо стремиться к реализации минимальных (экономичных) энергоцепей (рис. 15.5, *а, б*);

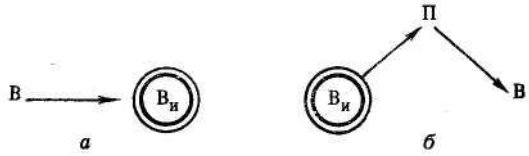


Рис. 15.5. Примеры реализации наиболее экономических энергоцепей

— из двух энергоцепей, соответствующих основному и управляющему энергопотоку, начинать построение следует с основной энергоцепи.

Массив физических эффектов и явлений. Для использования этого массива в распоряжении разработчика имеются три таблицы (табл. 15.8...15.10). В табл. 15.8 приведены типовые поля (виды энергии) на входе подсистемы и типовые (стандартные) функции, которые необходимо выполнить для преодоления технических или физических противоречий. В табл. 15.9 представлены типовые поля, связывающие виды энергии на входе подсистемы с видами энергии на выходе подсистемы. В табл. 15.10 дано краткое описание физических эффектов или явлений с соответствующим набором типовых выполняемых функций, перечисленных в табл. 15.8.

Таблица 15.8

Вид энергии (на входе подсистемы)	Выполняемая функция									
	1. Экранировка	2. Изменение рабочего режима	3. Изменение схемы, конструкции	4. Нейтрализация паразитных элементов	5. Улучшение фильтрации источников питания	6. Индикация положения и перемещения	7. Изменение длины волны	...	*n*. Контроль свойств поверхности
Механическая энергия:									
движение, разделение, перемешивание, стабилизация	1, 2, 3					4,5			
изменение формы, размеров, массы силовое воздействие, создание давления	1, 2, 3		1, 2, 3						
Колебания, звук, ультразвук	5	1, 2, 3	1, 2, 3	1, 2, 3	1, 2, 3	4	4,5 1, 2, 3		5
Внутренняя энергия (состояние, свойство вещества):		1, 2, 3							
тепловая		1, 2, 3							
электрическая	1, 2, 3								
магнитная	1, 2, 3								
электромагнитная						4 1, 2, 3	5		6
элементарных частиц	1, 2, 3	1, 2							

Примечание. Цифры в таблице обозначают номера физических эффектов или явлений согласно табл. 15.10

Таблица 15.9

Вид энергии (на входе подсистемы)	Вид энергии на выходе подсистемы										
	Движение, разделение, перемешивание, сталкивание	Изменение формы, размеров, массы	Силовое воздействие, создание давления	Колебания, звук, ультразвук	Внутренняя энергия	Тепловая энергия	Электрическая энергия	Магнитная энергия	Электромагнитная энергия	Энергия элементарных частиц
Движение, разделение, перемешивание, стабилизация									4,6	
Изменение формы, размеров, массы									5	
Силовое воздействие, создание давления				1,2,3,4,5						
Колебания, звук, ультразвук					1,2,3					
Внутренняя энергия (состояние, свойство вещества)						1,2,3				
тепловая							1,2,3			
электрическая								1,2,3		
магнитная									1,2,3 6	
электромагнитная										1,2
элементарных частиц										

Примечание. Цифры в таблице обозначают номера физических эффектов или явлений согласно табл. 15.10

Таблица 15.10

Физический эффект или явление	Сущность физического эффекта или явления (кратко)	Типовые выполняемые функции (действия) согласно табл. 15.8
1. Самовозбуждение	Возникновение в усилителе высокой или сверхвысокой частоты в результате паразитных связей автоколебаний на рабочей частоте или в диапазоне рабочих частот усилителя	1,2,3,4,5,7
2. Коротковолновая паразитная автогенерация	Возникновение в усилителе, работающем в относительно длинноволновом диапазоне, паразитных автоколебаний в более коротковолновом диапазоне	1,2,3,4,5,7
3. Длинноволновая паразитная автогенерация	Возникновение в усилителе, работающем в относительно коротковолновом диапазоне, паразитных автоколебаний в более длинноволновом диапазоне	1,2,3,4,5,7
4. Эффект Допплера	Изменение частоты колебаний при взаимном перемещении источника и приемника колебаний	6,7
5. Дифракция	Огибание волной препятствия	3,6,7
6. Голография	Получение объемных изображений путем освещения объекта когерентным светом и фотографирования интерференционной картины взаимодействия рассеянного объектом света с когерентным излучением источника	6,7,*n*

16. Информационный поиск

16.1. Источники научно-технической информации

Источники информации отличаются большим разнообразием. Если информация каким-либо способом зафиксирована и имеется возможность ее считывать повторно, то такой источник представляет собой документ.

Термин «документ» произошел от латинского *docu-mentum* (доказательство, поучительный пример) и был введен в русский язык

Петром I, который перевел это слово как «письменное свидетельство». Таким образом, вначале документы имели сугубо правовое значение и к ним причислялись разные деловые бумаги, имеющие юридическую силу. С развитием техники документами стали считать всю печатную информацию: книги, журналы, брошюры и т. п. В настоящее время под документом понимают любой материальный носитель с закрепленной информацией.

Как показано на схеме рис. 16.1, все документальные источники научно-технической информации делятся прежде всего на первичные и вторичные.

Первичные документы могут быть публикуемые и непубликуемые. К публикуемым документам относятся различного рода издания. Издание — произведение печати, прошедшее редакционно-издательскую обработку и предназначенное для передачи содержащейся в нем информации.

Характеристиками документальных источников информации являются полнота и достоверность данных, наличие теоретических обобщений, сроки их опубликования и возможность получения енмих источников. Каждый из источников имеет спои достоинства и недостатки.

Публикуемые документы. Наиболее распространенными документальными источниками информации являются книги и брошюры. Книга представляет собой непериодическое издание. Может издаваться однократно или многократно (переиздаваться). Вследствие значительного времени, необходимого для написания и издания книги, занимающего несколько лет, а также из-за помещения в ней ранее опубликованных материалов, к моменту выхода в свет информационная ценность книги значительно снижается. Достоинством книги являются ***систематичность и полнота изложения,*** не присущие статьям периодических изданий. В виде книг издается научно-техническая, научно-методическая, научно-популярная, производственно-техническая, учебная, справочно-энциклопедическая и официально-документальная литература.

К непериодическим изданиям относятся монографии, сборники, материалы научных конференций, семинаров школ и т. д. (рис. 16.1).

Монография представляет собой научный труд, опубликованный одним или несколькими авторами и посвященный специальному вопросу науки, разработанному с максимальной полнотой.

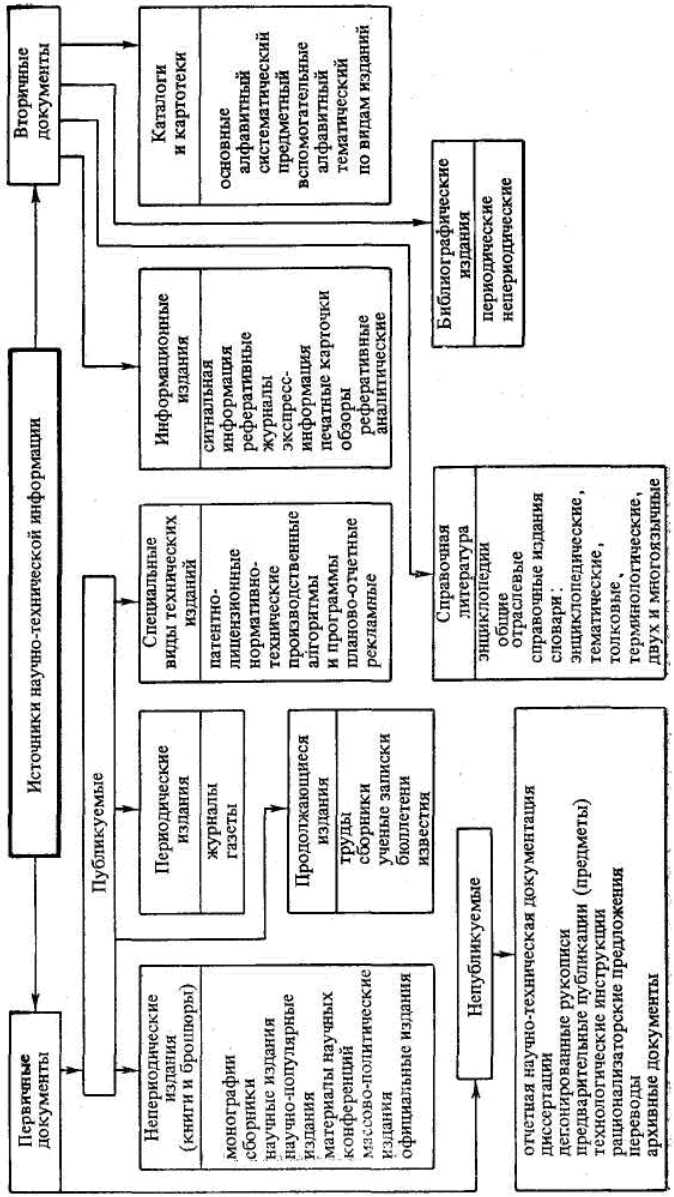


Рис. 16.1. Классификация источников научно-технической информации

Сборник является изданием, составленным из отдельных работ разных авторов или одного автора, посвященных, как правило, одному направлению научных исследований. Сборник может не охватывать всей темы в целом, а освещать только отдельные ее стороны.

Периодические издания представляют собой важные, и сравнительно оперативные, источники информации. Для специалистов любой отрасли науки и техники наибольший интерес представляют именно *журналы.* По сравнению с книгами они во много раз быстрее сообщают сведения о научно-технических достижениях и передовом производственном опыте. Статья о новой системе или устройстве и результатах его исследования публикуется в журнале в течение нескольких месяцев. В книге же эти материалы могут появиться только через несколько лет. Журналы дают также информацию о только возникающих проблемах, освещают еще не созревшие вопросы.

Однако журналам присуща большая, чем требуется для отдельного специалиста, широта тематики. Материалы по конкретной теме опубликованы во многих журналах.

По содержанию журналы бывают научные, научно-популярные и производственные.

Продолжающиеся издания занимают промежуточное положение между книгами и журналами. Это сборники трудов научных учреждений, вузов, публикуемые без строгой периодичности, бюллетени, ученые записки и т. п.

Специальные виды технических изданий также занимают важное место среди публикуемых источников научно-технической информации.

Патентно-лицензионные издания, относящиеся к рассматриваемым документам, включают описания изобретений к авторским свидетельствам и патентам, описания открытий, официальные патентные бюллетени. Техническая документация в виде чертежей и краткого описания сущности изобретения является приложением к авторскому свидетельству. В описании указывается номер авторского свидетельства или патента, классификационный индекс, фамилия и инициалы изобретателя, а также дата подачи заявки на изобретение и дата выдачи авторского свидетельства. Сведения о выданных авторских свидетельствах и патентах публикуются в патентных бюллетенях. В научно-исследовательской работе невозможно обойтись без изучения патентной литературы. Любой исследователь и разработчик, принимающий участие в исследовании и разработке новых систем, приборов и узлов, обязан ознакомиться с отечественной и зарубежной

патентной литературой соответствующей области и изучить уже известные научные и технические решения. Научно-техническая информация, содержащаяся в патентно-лицензионных изданиях, представляет собой сведения обо всех достижениях человечества за последние 200 лет.

В нормо-технических и производственных изданиях публикуются стандарты, технические условия, нормали, промышленные каталоги и т. д.

Стандарт — нормативно-технический документ, устанавливающий требования к группам однородной продукции и в необходимых случаях требования к конкретной продукции, правила, обеспечивающие ее разработку, производство и применение, а также требования к иным объектам стандартизации.

Нормативно-технические документы, определяющие требования к объектам стандартизации подразделяются на следующие категории:

— государственные стандарты — ГОСТ;

— отраслевые стандарты — ОСТ;

— технические условия — ТУ.

Установлены следующие виды технических условий: отраслевые (ОТУ), предприятий (ТУ). Технические условия содержат характеристику изделия, правила приемки и методы испытаний.

При отсутствии государственных, отраслевых стандартов или технических условий центральные органы организаций могут разрабатывать технические условия на продукцию подведомственных им предприятий либо обеспечивать производство такой продукции непосредственно на основе технической документации (конструкторской, технологической, проектной).

Нормали определяют конструкцию, размеры, материалы и другие технические данные узлов и деталей машин, механизмов и приборов, а также технологической оснастки в процессе проектирования и производства. Действуют следующие виды нормалей: межотраслевые (МН), отраслевые (ОН) и заводские (Н).

Стандарты, технические условия и нормали разрабатываются научными организациями и проектно-технологическими институтами на основе последних достижений науки и техники.

Учет и регистрацию государственных, отраслевых стандартов и технических условий ведет Государственный комитет по стандартам.

Промышленные каталоги как производственные издания служат своеобразными краткими справочниками по новейшей технике, выпускаемой тем или другим предприятием. Они содержат

технические характеристики изделий и адреса предприятий-изготовителей.

Непубликуемые документы. В соответствии со схемой классификации источников научно-технической информации (рис. 16.1) непубликуемые первичные документы представляют собой научно-технические отчеты, информационные карты, диссертации, депонированные рукописи, препринты и т. д. Обычно непубликуемые работы остаются в рукописи или размножаются в небольшом количестве экземпляров.

Научно-технический отчет оформляется на основе результатов выполненной научно-исследовательской либо опытно-конструкторской работы. В отчете излагается постановка задачи, анализируются методы ее решения, приводится анализ теоретических и экспериментальных данных. В научно-исследовательских отчетах, как правило, содержится важная научно-техническая информация .

Информационные карты в краткой форме содержат сведения о законченных научно-исследовательских и опытно-конструкторских работах, о новых изделиях, внедренных в производство.

Научно-технические отчеты и информационные карты поступают в центральные и отраслевые органы научно-технической информации.

Кандидатские и докторские диссертации представляют интерес для специалистов, так как они содержат научно-техническую информацию, отличающуюся научной новизной и практической полезностью. Депонированные (от латинского *deponere* — отдавать на хранение) рукописи находятся на хранении в органах научной и технической информации и могут быть размножены для удовлетворения поступающих запросов. Депонированию могут подлежать рукописи статей, обзоров, монографий узкоспециального характера. Депонированные работы юридически приравниваются к опубликованным.

Препринты — оттиски еще не опубликованных статей, докладов, сообщений, изготовленные для апробации содержащихся в них данных. Препринты позволяют заранее подготовиться к предстоящему обсуждению определенных вопросов.

Не следует путать понятие препринта с репринтом. Репринты (от английского *reprint* — оттиск) — это копии ранее опубликованных документов со ссылкой на оригинал издания. В качестве репринтов могут служить авторские оттиски статей, получаемых авторами от редакций научных журналов.

К непубликуемым документам относятся также технологические инструкции, рационализаторские предложения, переводы тех или иных

документов, опубликованных на иностранных языках, архивные документы.

Вторичные документы. Их еще называют вторичными источниками информации. Они содержат информацию, полученную на основе переработки и систематизации первичных документов. Вторичные документы содержат информацию первичных источников как бы в свернутом виде и облегчают тем самым информационный поиск в потоке опубликованных и депонированных документов, помогают преодолеть языковые барьеры.

В соответствии с показанной на рис. 16.1 классификацией ко вторичным документам относятся информационные издания, каталоги и картотеки, библиографические издания и справочная литература.

Информационные издания — это сигнальная информация, реферативные журналы, экспресс-информация, обзоры, печатные карточки.

Сигнальная информация (СИ) имеет своим основным назначением оперативное сообщение о новых публикациях и, что очень важно, обеспечивает заказы на их копии. Бюллетени сигнальной информации включают в себя библиографические описания отечественных и зарубежных первоисточников по определенным отраслям знаний. *Реферативные журналы* (РЖ) представляют собой периодические издания, в которых публикуются, преимущественно рефераты, иногда аннотации и библиографические описания литературы, представляющие наибольший интерес для науки и практики. В РЖ ежегодно публикуются сведения более чем о миллионе статей, описаний изобретений, книг и других документах.

Экспресс-информация является периодическим изданием, содержащим расширенные рефераты статей, описание изобретений и других публикаций, позволяющих получить информацию о сущности их содержания, не обращаясь к первоисточнику. Предназначена экспресс-информация для широкого круга инженеров и техников, для научных работников, преподавателей, аспирантов и студентов. Обзоры содержат в собранном виде сведения по отдельным темам за определенный период времени. Бывают обзоры аналитические и реферативные. Аналитические обзоры на основе анализа материала дают его оценку. В реферативном обзоре приводятся сведения о новейших достижениях в той или иной отрасли. Обзоры удобны для знакомства с научно-техническими достижениями как в основной, так и в смежных областях.

Печатные библиографические карточки содержат полное библиографическое описание источников информации. Из карточек составляют каталоги и картотеки библиотек.

Каталог представляет собой состоящий из библиографических карточек перечень имеющихся в библиотеке книг, журналов и других печатных материалов.

Картотека — перечень всех материалов, выявленных по какой-то определенной тематике. Обычно в библиотеке имеется система каталогов и картотек. Кроме основного могут быть вспомогательные каталоги и картотеки, к оформлению и структуре которых не предъявляется никаких единых требований. Работу в библиотеке следует начинать с изучения имеющейся в ней системы каталогов и картотек. Карточки каталогов и картотек располагаются в специальных ящиках. Обычно имеется как минимум два каталога — алфавитный и систематический.

Алфавитный каталог занимает ведущее место. Карточки систематизируются по первому слову библиографического описания источника: фамилии автора или названию книги, не имеющей автора. Карточки авторов однофамильцев располагаются в алфавитном порядке их инициалов. На разделителях алфавитного каталога указываются буквы алфавита, фамилии наиболее известных авторов.

Систематический каталог позволяет определить, по каким отраслям знаний и какие именно источники имеются в библиотеке. Карточки каталога сгруппированы по отдельным отраслям знаний.

Предметный каталог по своему назначению близок к систематическому. Разница состоит в том, что карточки в предметном каталоге сгруппированы не по отдельным отраслям знаний, как в систематическом, а по отдельным вопросам. Поэтому карточки по отдельным отраслям знаний, например по физике и радиотехнике, могут стоять рядом, если в них освещается один и тот же вопрос.

Библиографические издания обеспечивают полную информацию о новых публикациях по любому вопросу. Они содержат библиографические указатели — перечни литературы. Растет библиография сейчас такими же темпами, как и объем печатной продукции. Основные издания общей библиографии выпускает Книжная палата, получающая из всех типографий контрольные экземпляры всех издаваемых печатных произведений — книг, журналов, карт, нот и т. д. Кроме того, эту работу проводят крупные библиотеки, институты научно-технической информации, многие научные учреждения и учебные заведения. Поэтому имеется

большое многообразие библиографических указателей — общих, специализированных, отраслевых, тематических и т. д. Приведем некоторые из них.

Сведения о книгах и брошюрах по всем отраслям знаний дает «Книжная летопись», издаваемая Книжной палатой. Ее выпуски, выходящие еженедельно, информируют о научной, научно-технической, научно-популярной, производственной и художественной литературе, а также о различных продолжающихся изданиях. Дополнительный выпуск, издаваемый ежемесячно, информирует об официально-документальных, ведомственных изданиях, о программах, памятках, инструкциях и т. д.

Кроме «Книжной летописи» в двух томах выходит «Ежегодник книги». В первом томе перечисляются книги по общественно-политической тематике, учебно-педагогической, художественной литературе, физкультуре и спорту, языкознанию, искусству, печати, библиотечному делу и библиографии; во втором — по естествознанию, технике, промышленности, сельскому хозяйству, транспорту, связи, торговле, коммунальному хозяйству и медицине.

Информацию о периодических и продолжающихся изданиях содержит выходящая еженедельно «Летопись журнальных статей». В ней помещены перечни статей, опубликованных в научных журналах, «Трудах», «Докладах», «Ученых записках» и т. д.

Сведения о рецензиях на книги и статьи, опубликованные в журналах, газетах, сборниках, входят в «Летопись рецензий», выходящую ежеквартально. Библиографический указатель «Депонированные рукописи» издает Институт научной и технической информации (ИНИТИ).

За новинками зарубежной литературы позволяет следить ежемесячный журнал «Новые книги за рубежом», и ежемесячный библиографический указатель «Новые зарубежные книги», издаваемый Государственной публичной научно-технической библиотекой (ГПНТБ).

Ответ на вопрос о том, в какой библиотеке имеется тот или иной иностранный журнал или газета, можно найти в указателе «Сводный каталог зарубежных периодических изданий», издаваемый ГПНТБ. Здесь же указаны адреса, по которым можно заказать необходимые копии. Указатели переводов научно-технической литературы издаются Центром переводов научно-технической литературы и документации.

Полные сведения о самих библиографических изданиях, которые публикваны, можно найти в ежегодниках «Библиография

библиографии» и «Каталоге библиографических указателей по технике».

В состав справочной литературы, относящейся ко вторичным документам (рис. 16.1), входят экнциклопедии, справочные издания и различного рода словари.

Эти издания имеют широкое распространение и хорошо известны.

16.2. Универсальная десятичная классификация источников информации

Вся опубликованная информация в печати и других документах систематизирована по так называемой универсальной десятичной классификации (УДК). УДК является международной системой. Она позволяет рационально размещать книги, статьи, патенты и другие документы в хранилищах и осуществлять их поиск по каталогам при помощи цифровых индексов, обозначающих определенные области знаний. При помощи УДК осуществляется также обмен информацией между странами.

Впервые таблицы УДК были опубликованы в 1905 г. в Брюсселе на французском языке. УДК возникла на базе «Десятичной классификации» Мельвиля Дьюи , которой пользуются до сих пор в некоторых европейских странах и США. Ее индексы проставляются на карточках, выпускаемых Библиотекой Конгресса США.

В 1895 г. в Брюсселе была созвана 1 Международная библиографическая конференция, на которой было принято решение создать «Универсальный библиографический репертуар»— карточный каталог литературы, имеющейся во всем мире по всем отраслям знаний. Для осуществления этой задачи организован Международный библиографический институт (МБИ).

Инициаторами создания «Репертуара», а также руководителями МБИ были Поль Отле и Анри Лафонтен. Они же создали УДК. В 1931 г. МБИ был переименован в Международный институт документации, а в 1938 г. преобразован в Международную Федерацию по документации (МФД). Под контролем МФД стали выходить полные, средние, сокращенные и отраслевые издания УДК.

В СССР УДК была введена постановлением в 1962 г. как обязательная для публикаций в области естественных и технических наук. Это дало возможность обеспечить единообразие в организации справочно-информационных фондов научных и научно-технических библиотек страны.

Система УДК развивается непрерывно и получает дополнения не только от издания к изданию, но и в промежутках между ними. Развитием УДК занимается Международная федерация по документации (МФД). В России связь с МФД и руководство работой по внедрению и усовершенствованию УДК осуществляет Междуведомственная комиссия по классификации (МКК) Государственного комитета по науке и технике. Все вступившие в силу изменения и дополнения публикуются в специальном периодическом издании МФД «Дополнения и изменения УДК» *(«Extensions and Corrections to the UDC»).*

Структура УДК и определение индексов. Все накопленные человечеством знания в соответствии с УДК делятся на 10 классов, обозначаемые цифрами 0, 1, 2, ..., 9. В инженерных разработках и научно-технических исследованиях чаще всего приходится обращаться к классам. Например:

5 — Математика. Естественные науки;

6 — Прикладные науки. Медицина. Техника.

В УДК каждый класс делится на 10 разделов, каждый раздел, в свою очередь, еще на 10 разделов, а последние еще на 10 и так далее. Каждому из классов, а затем каждому из разделов присваивается своя цифра десятичной системы. Цифры по порядку присваиваются друг за другом. После каждой из трех цифр для удобства считывания ставится точка. Цифры, обозначающие разделы УДК, называются *индексами*. На содержание индекса точка не влияет.

На примере класса 6 рассмотрим образование разделов. Следует отметить, что классы 5 и 6 тесно взаимосвязаны, и при индексировании часто возникают трудности в выборе индекса. В этих случаях следует руководствоваться тем, что класс 5 отражает вопросы теоретического характера, исследования общих законов физики, химии, биологии и т. д., а класс 6 посвящен вопросам практического использования этих законов, воплощению их в технике, медицине, сельском хозяйстве. Класс 6 является самым обширным из 10 основных классов УДК. Это объясняется разносторонностью его содержания и большим количеством документов (книг, статей, описаний патентов, фирменных каталогов и т. д.).

Класс 6 разбит на 10 разделов следующим образом:

60 — Прикладные науки. Общие вопросы;

61 — Медицина;

62 — Инженерное дело. Техника в целом; и т. д.

Пусть нам необходимо определить индекс УДК источников информации, содержащих сведения о конкретных радиотехнических

устройствах, например, о генераторах на полупроводниковых элементах. В этом случае представляет интерес раздел 62. Последний разбит на 10 разделов, обозначенных цифрами 620, 621, ..., 629. Из их рассмотрения следует, что генераторы на полупроводниковых элементах, находящие применение в таких областях, как радиотехника, электроника и автоматика, могут быть только в разделе 621 — Общее машиностроение. Ядерная техника. Электротехника. Технология машиностроения в целом.

Этот раздел включает электротехнику, к которой, согласно рассматриваемой классификации, относятся радиотехника, электроника и автоматика, а следовательно, и генераторы на полупроводниковых элементах. Очередное десятичное деление содержит раздел 621.3 — Электротехника. Отметим появление точки в индексе в соответствии с указанным выше правилом. В этом разделе при его дальнейшем десятичном делении встречаются индексы:

621.37 — Радиотехника. Техника электромагнитных колебаний;

621.38 — Электроника. Фотоэлектроника. Электронные лампы, трубки. Рентгенотехника. Ускорители частиц;

621.39 — Электросвязь. Техника электросвязи.

Среди приведенных разделов научно-техническую информацию о генераторах на полупроводниковых элементах следует искать при дальнейшем делении индекса УДК 621.37.

Следуя общему принципу организации структуры системы УДК, этот раздел имеет свои следующие 10 разделов:

621.370— (Свободен);

621.371 — Ненаправленное распространение электромагнитных колебаний;

621.372—Направленное распространение электромагнитных колебаний;

621.373 — Генераторы электромагнитных колебаний и импульсов. Автогенераторы. Импульсные генераторы;

621.374 — Импульсная техника. Умножители частоты. Делители частоты;

621.375 — Усилители;

621.376 —Модуляция. Демодуляция. Способы и аппаратура;

621.377 — Устройства задержки. Устройства хранения электрической информации (накопители);

621.378 —(Свободен);

621.379 —(Свободен).

Наконец, обращаемся в таблицах УДК к необходимому нам разделу под индексом 621.373 и находим следующее продолжение его деления:

621.373.0 —(Свободен);
621.373.1—Генераторы в целом (вне зависимости от активного элемента);
621.373.2 —(Исключен в 1976 г.);
621.373.3 — Неэлектронные генераторы;
621.373.4 — Ламповые генераторы. Генераторы на газоразрядной трубке;
621.373.5 — Генераторы на полупроводниковых элементах;
621.373.6—(Свободен);
621.373.7 —Параметрические генераторы;
621.373.8 — Кваитовомеханические генераторы;
621.373.9 — Прочие генераторы.

Таким образом, любые источники научно-технической информации, содержащие сведении о генераторах на полупроводниковых элементах, имеют индекс УДК 621.375.5.

По рассмотренному принципу в сооответствии с общепринятой структурой системы УДК определяются индексы документов, относящихся к любым другим областям знаний. При этом индексы могут быть и более полными. Они присваиваются источникам информации по более конкретным вопросам данной области. Так, в рассматриваемом примере разновидность импульсных генераторов на полупроводниковых элементах имеет более полный индекс УДК 621.375.54. В то же время источникам информации, содержащим сведения из нескольких областей, присваивается общий, т. е. более краткий, индекс. Например, книге, в которой имеются сведения по проектированию не только генераторов, а и других различных радиотехнических устройств, присваивается более краткий индекс УДК 621.37 «Радиотехника. Техника электромагнитных колебаний».

Рассмотренный процесс определения индекса выполнен по основным таблицам УДК. Кроме основных в состав УДК входят вспомогательные таблицы и алфавитно-предметный указатель. Основные таблицы содержат индексы, при помощи которых материалы систематизируются по содержанию. Во вспомогательных таблицах помещены описания определителей и знаков УДК.

Определители и знаки. Основные таблицы УДК не отражают качественные характеристики источников информации или описываемых в них объектов. Если бы таблицы удовлетворяли и этому требованию, то они были бы необозримо большого объема. В УДК эта задача остроумно решена путем использования еще одного вида индексов —так называемых *общих и специальных определителей*. Определители приписываются к основному индексу. Отдельно от

индекса, самостоятельно, они не употребляются. Чтобы отличать определители в составе индекса, используются условные знаки: точки, скобки, дефис — каждый определитель со своим знаком. В результате получаем индекс, который указывает не только к какой области знаний относится тот или иной источник информации, но, благодаря определителю, вошедшему в индекс, и на каком языке опубликован интересующий нас документ, а также вид его (учебник, статья, справочник и т. д.). Различают две группы определителей: *общие и специальные*. Общие определители применяются во-всех разделах УДК. Специальные, или, как их иногда называют, аналитические, определителииспользуются только в некоторых разделах УДК. Помещаются они в начале этих разделов и выделяются жирной вертикальной линией со стороны полей.

Наряду со знаками, позволяющими в составе индексов отличать определители, в УДК используется еще один вид знаков для соединения индексов. При их помощи индексы УДК могут соединяться несколькими способами. Описания знаков соединения индексов, как и знаков определителей, помещены во вспомогательных таблицах УДК, имеющих алфавитную нумерацию 1*a*,1*b*, 1*c*, ..., 1*k*, 11*a*, 11*b*, 11*c*. В таблицах 1*a*, 1*b* описаны знаки соединения, в таблицах 1*c*,1*d*, ..., 1*k* — знаки общих определителей, и, наконец, знаки специальных определителей расены в таблицах 11*a*, 11*b*, 11*c*. Всего в УДК 8 общих определителей: *языка, формы, места, народов, времени, заимствованных обозначений, точки зрения и так называемый определитель с дефисом.*

Рассмотрим вначале некоторые из наиболее часто встречающихся в научно-технической информации по радиотехнике общие и специальные определители с их знаками, а затем знаки соединения.

Наиболее употребительные общие определители и их знаки. Определители *языка* указывают, на каком языке опубликован документ. Каждому языку присвоен свой индекс, стоящий непосредственно за условным знаком.

Таким знаком для определителя языка служит знак равенства «=». Например, индекс УДК 621.375.5=956 обозначает техническую информацию по генераторам на полупроводниковых элементах на японском языке.

Определители *формы* предназначены для классификации источников информации по форме и характеру изложения: учебник, статья, отчет, справочник, патент,карта и т. д. Эти определители имеют условный знак в виде круглых скобок и начинаются с нуля. Пишутся

определители внутри скобок. Например, учебник по курсу радиоприемных устройств имеет индекс УДК 621.396.62 (075).

Определители *места* применяются при индексировании публикаций, для которых требуется географическая конкретизация. Условным знаком этих определителей также являются круглые скобки, но в отличие отопределителей формы они никогда с цифры «0» не начинаются. Сочетание определителя с индексом выглядит, например, следующим образом: 621.396 (73) «Аппаратураи методы радиосвязи в США».

Определители *точки зрения* необходимы для выделения и группировки материала по различным аспектам в определенной отрасли или под единой точкой зрения из различных областей. Определители имеют отличительный знак в виде точки и двух нулей «.00» перед значащей цифрой, например:

.001.1 —Теория;

.001.5 — Научно-исследовательские работы.

Присоединяя эти определители к упоминавшемуся индексу, получаем

621.373.5.00 — Теория генераторов на полупроводниковых элементах,

621.373.5.001.5 — Научно-исследовательские работы по генераторам на полупроводниковых элементах.

Специальные определители необходимы, как уже отмечалось, для обозначения понятий только в отдельных разделах УДК. Имеются специальные определители трех видов: с дефисом, с точкой ноль и с апострофом. Наиболее широко в разделе 62 «Инженерное дело. Техника в целом» используются первые два определителя. Рассмотрим их.

Специальные определители с дефисом имеют отличительный символ (знак) в виде цифры от 1 до 9 с дефисом впереди, т. е. от -1 до -9 (0 здесь не используется, он находит применение в общих определителях с дефисом). Например, специальный определитель -182.3 «Подвижные установки» в случае присоединения к индексу УДК 621.397.7 «Установки для фототелеграфии и телевидения» запишется как 621.397.7 -182.3 «Подвижные установки для фототелеграфии и телевидения».

Специальные определители с точкой ноль обозначены отличительным знаком в виде цифры с точкой ноль впереди от «.01» до «.09». Например, в разделе УДК 621.3 находим:

621.3.037 — Специальные определители для техники электромагнитных колебаний;

621.3.037.3 — Виды представления информации;

621.3.037.33 — Аналоговое представление;

621.3.037.37 — Дискретное представление.

Знаки соединения индексов. Кроме знаков общих и специальных определителей в УДК имеются знаки соединения индексов. Последние обеспечивают фиксацию отношений между понятиями, отраженными в документах. Всего таких знаков *пять*.

Знак *присоединения* + (читается «и») указывает, что в документе содержится две и более независимых друг от друга темы или две и более формальных особенностей документа. Знак + применяется для соединения как основных индексов, так и определителей.

Например, сборник статей по генераторам на полупроводниковых элементах (621.375.5) и по усилителям 1 (621.375) получает индекс 621 (375.5 + 375).

Знак распространения / (читается «косая черта» или «от — до») предназначен для сокращения нотации и обобщения ряда последовательных индексов. Благодаря знаку распространения происходит слияние нескольких следующих строго друг за другом частных понятий в общее, например:

621.37/.39 — Радиоэлектроника;

621.37 — Радиотехника. Техника электромагнитных колебаний;

621.38 — Электроника. Фотоэлектроника. Электронные лампы, трубки, рентгенотехника, ускорители частиц;

621.39— Электросвязь. Техника электросвязи.

В этом примере точка после знака распространения означает, что следующие за ней цифры являются делениями раздела 621, а не самостоятельными цифрами. Нельзя ставить знак распространения для обобщения подряд идущих индексов, если они не имеют общего содержания. Например, недопустимо объединять индексы:

621.313.322—Синхронные генераторы;

621.313.323 — Синхронные электродвигатели.

В таблицах УДК знак распространения используется и формально, например, при обозначении специальных определителей -1/-9.

Знак отношения : (читается «двоеточие» или «отношение к») предназначен для отражения любых связей между понятиями. При помощи этого знака любой индекс каждого из разделов может быть привлечен для детализации другого индекса, например;

621.372.8 — Волноводы;

621.315.55 — Проводники из металлов или их сплавов;

621.315.61—Электроизоляционные материалы. Диэлектрики;

621.372.8:621.315.55 — Металлические волноводы;

621.372.8:621.315.61 —Диэлектрические волноводы.

Индекс со знаком отношения называется *составным*. На первом месте составного индекса следует помещать индекс, отражающий основной предмет документа. Присоединяемые с помощью двоеточия индексы только уточняют, детализируют основное понятие. Составные индексы с двоеточием могут быть и обратимыми, т. е. части такого индекса можно менять местами.

Знак двойного отношения :: (читается «двойное двоеточие» или «двойное отношение») служит для закрепления определенного порядка двух и более компонентов в составном индексе, т. е. когда индекс со знаком отношения необратим. Так, сочетание двух индексов

621.397 — Передача изображений. Телевидение

629.783 — Искусственные спутники дает новые понятия:

621.397::629.783 —Передача изображений при помощи спутников;

629.783::621.397— Телевидение на спутниках (спутниковое телевидение).

Квадратные скобки [ ], в которые заключается индекс,— это знак, применяющийся во всех разделах УДК в сложных и составных индексах. В сложных индексах за квадратную скобку выносится определитель, присвоенный двум и более индексам. Например, патенты на радиоприемники и телевизоры индексируются

[621.396.62 + 621.397.62] (088.8),

а не

621.396.62 (088.8)+621.397.62(088.8).

За квадратные скобки выносится также повторяющийся индекс, к которому дается знак отношения от других индексов. Например, сборник статей по применению генераторов на полупроводниковых элементах (индекс УДК 621.373.5) и направленного распространения электромагнитных колебаний (индекс УДК 621.372) в медицине (индекс УДК 61) может получить свой индекс

[621.372 + 621.373.5] : 61.

Индексы со знаками : или + часто при написании не могут разместиться на одной строке. Переносить на другую строку можно как те, так и другие индексы, но при этом во второй строке необходимо повторять стоящий перед индексом +, : или :: .

Для наглядности приведем рассмотренные знаки УДК в виде табл. 16.1.

Таблица 16.1.

Номер вспомогательной таблицы УДК	Значение	Произношение	Знаки	Примеры	
	1. Знаки соединения индексов				
1a	Присоединение	и (плюс)	+	621.373. + 621.375	Генераторы и усилители
1a	Распространение	от — до (косая черта)	/	621.375.2/.9	Виды усилителей
1b	Общее, обратимое отношение	Двоеточие	:	621.373.5 : 621.382.2	Генераторы на полупроводниковых диодах
1b	Закрепление порядка элементов	Двойное двоеточие	::	621.397. : : 629.783	Передача изображений при помощи спутников
1b	Группирование индексов	Квадратные скобки	[...]	[621.372. + 621.373.5] 61	Генераторы на полупроводниковых элементах и направленное распространение электромагнитных колебаний в медицине
	2. Знаки общих определителей				
1r	Языка документа	Знак равенства	=...	621.37 = 20	Работы по радиотехнике на английском языке
1d	Формы документа	Скобка ноль	(0...)	621.396.62 (075)	Учебник по радиоприемным устройствам
1e	Места	Скобки	(...)	631.396 (73)	Аппаратура и методы радиосвязи в США
1i	Точки зрения	Точка ноль ноль	.00	621.373.5.002.2	Производство генераторов на полупроводниковых элементах
	3. Знаки специальных определителей				
IIa	С дефисом	От дефис 1 до дефис 9	-1/-9	621.397.7 -182.3	Подвижные установки для фототелеграфии и телевидения
IIb	С точкой ноль	От точка ноль один до точка ноль девять	.01/.09	621.375.026	Усилители мощности

16.3. Информационный поиск.

16.3.1. Работа со специальной литературой

Научная работа – не только получение новой информации из результатов наблюдения и опыта. Она сама базируется на огромном массиве информации, полученной ранее другими людьми. Умение извлечь из этого материала нужные сведения, быстро сориентироваться в них и рационально ими распорядиться, чтобы не повторять уже проделанную кем-то работу, характеризует работу исследователя.

Знакомство с полученной ранее информацией может идти разными путями. Участие в конференциях и симпозиумах, командировки в различные организации, личные контакты – каждый из этих источников информации важен и нужен. Однако ценнее всего знакомство со специальной литературой. ***Поэтому необходимо систематическое чтение специальной литературы и обучение методам правильной работы с ней. Желательно выделить для этого занятия определённое время. Контроль этого времени и его обеспечение являются основой личной организации исследовательского процесса. Чтение преследует не ответ на вопросы исследователя, а само эти вопросы формирует***.

Систематическое чтение литературы, во-первых, позволяет оценивать уровень работ в своей и смежной областях, знакомит с новыми идеями и методиками, экспериментальными, техническими и технологическими приёмами и аппаратурой. Систематическое чтение, расширяя кругозор, может подсказать области применения идей и результатов, полученных исследователем***. Систематическое чтение литературы – это и обеспечение запаса идей на будущее, а также до известной степени заготовка ответов на вопросы, которые могут возникнуть в дальнейшем.***

Во-вторых, задачей чтения является поддержание определённого уровня представлений о ходе развития не только ***своего, но и смежных разделов науки и техники в целом***, т.е. непрерывное развитие научного и технического мировоззрения. Заранее трудно предсказать, что и где понадобится исследователю в будущем. В то же

время даже людям, далёким от исследовательской работы, известно, что информационные потоки сейчас резко выросли.

Журналы поставляют примерно 40% научно-технической информации. Некоторая её доля поступает к исследователю через книги. Около 24% всех мировых публикаций приходится на долю естественных наук. В этом потоке доля химии составляет 27,8%, то есть 6,7% от всех публикаций. Но считается, что через печатные каналы проходит только 50% научной информации. Остальная её часть содержится в отчётах, авторских заявках, регламентах и т.п.

16.3.2. Поиск, накопление и обработка научно-технической информации

При чтении научной литературы необходимо следовать определённой иерархической системе. А именно:

1. Ряд вопросов должен контролироваться по возможности полностью;
2. Некоторый более широкий круг проблем должен только регистрироваться по литературным источникам без детального ознакомления с ними;
3. О более далёких вещах судят по обзорам или просматривая монографии;
4. Для усвоения ещё более далёких идей обращаются к рекламной и научно-популярной литературе. В случае необходимости популярная и обзорная литература могут явиться исходным пунктом для серьёзной проработки вопроса.

Просмотренный материал может пригодиться в будущем. Поэтому необходимо, чтобы при возникновении потребности, материал можно было легко найти и восстановить в памяти. Соответственно возникает проблема записи и хранения, т.е. систематизации, не только прочитанного, но и просмотренного материала.

Между полученной и осмысленной информацией существует большое различие. Поскольку поиск сопряжён с большими затратами труда, не следует жалеть ещё сколько-то времени на осмысливание тех дополнительных сведений, которые в настоящий момент в вашей работе не нужны, но уже попали вам в руки. Важно сохранить не только саму информацию, но и отношение к ней, т.е. мысли, возникшие при первом соприкосновении с новыми фактами.

Информационные продукты –

1. Базы данных (библиографические, фактографические).
2. Информационные сети.

Научные документы и издания: - текстовые; - графические; - аудиовизуальные; - машиночитаемые.

Считается, что учёный должен тратить до 25% рабочего времени на работу с научно-технической литературой. Известно, что многие учёные наиболее высокой квалификации отдают этой работе ещё больше времени (поиск и выдача научной информации – до 60% времени, проведение эксперимента – до 70%). Начинающий исследователь, особенно если он работает на производстве, почти никогда не может систематически выделять столько времени информационно-поисковой работе, и вопрос о наиболее эффективной организации этой работы приобретает для него большое значение.

Имеется четыре основных этапа в работе с литературой:

1) отыскание в потоке информации необходимых источников;
2) непосредственная работа с источником;
3) выделение нужных сведений;
4) обеспечение и хранения.

При работе с текущей литературой нужен иерархический подход:

1) прежде всего нужно просматривать все узкоспециальные журналы, имеющие прямое отношение к вашей непосредственной работе;
2) общие журналы по проблеме;
3) обзорные журналы по соответствующим отраслям знания;
4) реферативные издания и новые книжные поступления.

Довольно быстро обнаруживается, что основная масса публикаций по конкретному вопросу сосредоточена в малом числе журналов. Именно за ними необходимо пристально следить. Также можно определить группу журналов, где статьи по интересующему вас вопросу появляются периодически. Небольшая часть публикаций остаётся разбросанной по массе смежных и даже случайных журналов. Выявить публикуемые в них интересные для вас работы помогут реферативные журналы.

Полезно просматривать как российские, так и зарубежные реферативные издания. Так например, для эколога такими являются «Экология» (РФ) и «Chemical Abstracts» (США). В ряде случаев рефераты химических статей попадают в РЖ смежных наук. Полезным источником могут явиться «Летопись журнальных статей» и подобные ей библиографические издания.

16.3.3 Методы информационного поиска

Одну и ту же поисковую задачу можно решить разными путями. В ряде случаев исследователь тратит на поиск нужной ему

информации часы, в то время как другой, обладающий той же профессиональной квалификацией, затрачивает на подобный поиск дни и даже недели.

Основными для исследовательской практики являются два типа информационно-поисковых задач:

1) получение краткой конкретной справки;
2) обширный литературный поиск с целью проработки широкого вопроса.

Между этими крайними случаями имеется множество промежуточных.

Как при наведении краткой справки, так и при широком литературном поиске первым шагом должен быть просмотр собственной картотеки.

Краткая справка может касаться, например, поиска какой-либо константы. Если в личной картотеке нужные данные отсутствуют, дальнейший поиск констант начинают со справочников. До начала поиска следует проанализировать необходимые требования к точности и надёжности констант. Это определяет выбор литературы и ее характер.

Обращаясь к справочникам, в особенности, если речь идёт о данных, не требующих большой точности, следует начинать с простейших – типа «Химического энциклопедического словаря», «Краткого химического справочника», «Таблиц физических величин» и т.д.

Для ответственных расчетов лучше всего перейти к более серьёзным изданиям, нередко многотомным (Бельштейн, Гмелин, Ландольт и др.). Многие из них являются продолжающимися, т.е. каждый год выпускаются тома дополнений и уточнений к ранее опубликованным значениям. Ценность больших справочников также и в том, что в них приводятся подробные ссылки на первоисточники.

При литературном поиске может оказаться, что исследователю знакомы фамилии одного - двух известных учёных, работающих по близкой тематике. Тогда, пользуясь авторскими указателями к РЖ, полезно найти и просмотреть рефераты их работ.

Одним из способов получения оценочных данных по свойствам вещества (или процесса) являются аналогии с другими веществами (процессами), схожими с изучаемым по другим свойствам той же группы, что и неизвестное (плотность, вязкость). При этом в зависимости от группы свойств для одного и того же вещества нужно брать различные аналоги.

В практике исследовательской работы часто встречаются затруднения математического плана. Они зависят от степени математической подготовки исследователя; ряд из них, в особенности трудности вычислительного характера (решения дифференциальных уравнений, вычисление интегралов и т.д.), могут быть преодолены с помощью справочной литературы. Имеется справочная литература, рассчитанная на любой уровень математической подготовки. Простейшие математические справочники всегда должны быть под рукой. С помощью этих справочников полезно контролировать себя и тогда, когда математическая сторона проблемы затруднений не вызывает.

Во многих математических справочниках помимо непосредственного ответа на вопрос, имеются и краткие указания на то, каким способом этот ответ получен. Полезно воспользоваться этими указаниями и получить необходимый результат собственными силами. Это не только развивает владение математическим аппаратом и углубляет понимание проблемы, но и даёт возможность избежать досадных случайных ошибок, связанных с опечатками и другими возможными погрешностями справочников.

Широкий литературный поиск. Его полезно начинать с учебников, хороших пособий, обзоров и монографий. Поиск их можно вести с помощью предметного каталога библиотеки, нужно только определить те рубрики каталога, которые могут иметь отношение к проблеме.

При широком литературном поиске полезно исходить из обзоров по самой рассматриваемой проблеме или по смежным. Это, в частности, позволит выявить фамилии «лидеров» и вести поиск, пользуясь авторскими указателями. Полезно просмотреть важнейшие журналы и издания, специализирующие на публикации обзоров. Обзоры, учебники и энциклопедии знакомят с терминологией, рядом основополагающих работ и с фамилиями наиболее известных исследователей.

В исследовательской работе периодически возникает необходимость ознакомления с методами расчёта, техникой эксперимента или данными, хорошо известными в других сферах исследовательской деятельности. Если исходным моментом для таких поисков послужил какой-либо документ, то в нём обычно содержится указание на один – два первоисточника, где вопрос освещается подробнее. Просмотрев их, можно использовать для дальнейшего поиска приводимую в них библиографию.

На практике всегда возникает вопрос о необходимой глубине поиска, т.е. о том, на сколько лет назад целесообразно его проводить. Строгих рекомендаций здесь нет. Однако существует некий средний «срок жизни» публикаций. Он определяется как среднее число лет, в течение которых идут ссылки на документы в определённой области знания. После этого периода материал либо устаревает, либо входит в справочники, монографии, обзоры и последующие публикации. Для оценки среднего срока жизни публикации можно воспользоваться так называемым полупериодом жизни публикации. Этим термином определяют время, в течении которого была опубликована половина используемой (цитируемой) в данный момент литературы для соответствующей области знания. Считается, что для публикаций по физике это примерно 4,6 года, по математике - 10,5 лет, по химии - 8,1 года.

Во многих учреждениях имеются специальные библиографические службы. Начинающему исследователю следует прибегать к их помощи для консультаций по технике библиографической работы.

16.4. Источники научно-технической информации

Традиционный способ поиска – работа с библиотечными каталогами. Основных структур каталога, т.е. способов группировки в нём материала, три.

В *алфавитном* каталоге материал располагается в алфавитном порядке фамилий авторов и названий издающих учреждений (коллективный автор), а также заглавий документов. С помощью алфавитного каталога определяется наличие нужного документа в библиотеке и его шифр (индекс).

В *систематическом* каталоге описания документов группируются в соответствии с отраслями знания, с которыми связано их содержание. Внутри отраслевого отдела идёт группировка по классам, затем по подклассам и т.д. Структура каталога определяется принятой библиотечно-библиографической классификацией. Для облегчения работы к систематическому каталогу обычно составляется «ключ», т.е. алфавитно-предметный указатель. В нём в алфавитном порядке приводятся все рубрики систематического каталога.

В *предметном* каталоге, как и в систематическом, расположение материала определяется содержанием документов. Однако, если в систематическом каталоге записи располагаются по отраслям знания (науки), то в предметном каталоге документы располагаются в соответствии с алфавитным расположением вопросов

(предметов). При этом под одним и тем же заголовком собираются документы, относящиеся к различным отраслям знания.

Следует отметить также каталог *продолжающихся изданий*, в котором находятся названия периодических журналов, сборников работ, библиографической информации и каталог *изданий на иностранных языках*.

Таким образом, рекомендуется при поиске и хранении информации выполнять следующие операции:

1. Определить предмет поиска (ключевые слова, химические формулы, «лидеров» в данной области);
2. Составить карту поиска (конкретизировать, уточнить все аспекты предмета поиска);
3. Задать глубину поиска;
4. Выбрать источники информации;
5. Провести поиск информации;
6. Организовать отбор и хранение найденной информации.

Например, библиотека УГТУ-УПИ получает следующие экологические журналы: «Инженерная экология», «Экология», «Экология и промышленность России», «Экотехнологии и ресурсосбережение», «Энергосбережение и водоподготовка». Также библиотека УГТУ-УПИ обеспечивает доступ к электронным базам данных. Новости по экологическим проблемам можно найти в Интернете на сайте ecoportal.ru/news, экологическую информацию – ecoinfo.spb.ru и др. Из электронных источников следует отметить Электронную библиотеку диссертаций Российской государственной библиотеки, содержащую полнотекстовые копии диссертаций с 2002 года (доступ через библиотеку им. В.Белинского).

Реферативные базы данных ВИНИТИ, в которых содержатся реферативные материалы по естественным, точным и техническим наукам с 1981 года по настоящее время, базы данных по материалам периодических изданий, книг, фирменных изданий, материалов конференций, тезисов, патентов, нормативных документов, депонированных научных работ.

Информационное агентство ИНТЕГРУМ предлагает полные тексты 480 журналов с 1994 г. издания, 200 газет с 1992 г. издания.

Научная электронная библиотека предлагает полнотекстовыми электронными версиями научных журналов на английском, немецком и русском языках.

Рубрикон. Доступ к электронным версиям важнейших энциклопедий и словарей (57 штук), универсальным и тематическим справочным изданиям.

16.5. Патентный поиск

Научно-техническая информация, содержащая описания открытий, патентов, авторских свидетельств на изобретения, носится к специальным видам публикуемых первичных документов и называется патентной информацией. Патентный поиск заключается в изучении патентных документов. Большое значение патентный поиск имеет при разработке новых направлений в науке и технике. Рассмотрим основные патентные документы.

Открытие — установление не известных ранее объективно существующих закономерностей, свойств и явлений материального мира, вносящих коренные изменения в уровень познания. Диплом на открытие выдается на имя автора и удостоверяет: признание выявленных закономерностей, свойств и явлений материального мира открытием, приоритет открытия и авторство на открытие.

Изобретение — новое и обладающее существенными отличиями техническое решение задачи в любой области народного хозяйства, дающее положительный эффект.

Авторское свидетельство на изобретение выдается на имя автора (авторов) и удостоверяет признание предложения изобретением, приоритет изобретения, авторство на изобретение.

Патент удостоверяет: признание предложения изобретением, приоритет изобретения, авторство на изобретение и исключительное право патентообладателя на изобретение.

Патент выдается на срок до 15 лет, считая со дня подачи заявки. Обладатель исключительного права осуществляет право пользования и распоряжение изобретением.

Быстрый рост объема мирового патентного фонда вместе с развитием международного сотрудничества привели к необходимости разработки единой системы Международной классификации изобретений (МКИ). Текст первой редакции МКИ был создан в соответствии с положениями Европейской конвенции о международной патентной классификации в 1954 г.

МКИ по своей структуре представляет ступенчатую иерархическую систему. Все классифицируемые области образуют разделы, подразделы, классы, подклассы, группы и подгруппы. Разделы обозначены заглавными латинскими буквами. Всего имеется 8 следующих разделов :

A. Удовлетворение жизненных потребностей человека;
B. Различные технологические процессы;
C. Химия и металлургия;

D. Текстиль и бумага;

E. Строительство;

F. Прикладная механика, освещение, отоплениеи двигатели и насосы; оружие и боеприпасы;

Ю. Техническая физика;

H. Электричество.

Подразделы имеют только заголовки без индексов. Каждый из разделов делится на классы. Они снабжены заголовками и индексами. Индекс класса состоит из индекса соответствующего раздела и двузначного арабского числа. Например, раздел Н «Электричество» состоит из следующих пяти классов:

H01. Основные элементы электротехнического оборудования;

H02. Производство, преобразование и распределение электрической энергии;

H03. Электронные схемы общего назначения;

H04. Техника электрической связи;

H05. Специальные области электротехники, не отнесенные к другим классам.

Наибольшее развитие в МКИ получили разделы, посвященные различным областям техники, таким как радиоэлектроника, вычислительная, ядерная техника и др. Структура МКИ предусматривает ее дальнейшее развитие. Каждый из разделов может содержать до 99 классов. Классы делятся на подклассы. Каждый подкласс также имеет заголовок и индекс, состоящий уже из индексов соответствующего раздела и класса, к которым приписывается заглавная буква латинского алфавита. Например, класс H04 «Техника электрической связи» состоит из следующих подклассов:

H04B. Передача сигналов;

H04H. Радиовещание;

H04J. Многоканальные системы связи;

H04K. Секретная связь; создание искусственных помех;

H04L. Передача дискретной информации, например, телеграфная связь;

H04M. Телефонная связь;

H04N. Передача изображений; телевидение;

H04Q. Избирательные устройства;

H04R. Электромеханические преобразователи;

H04S. Стереофонические системы.

Подклассы делятся на подразделения, именуемые рубриками. Среди рубрик имеются группы и подгруппы. Группы обозначаются, как правило, нечетными однозначными числами и символом /00. Это дает

возможность составить индекс подгруппы в виде продолжения индекса группы. Например, подкласс H04N «Передача изображений, телевидение» делится на следующие группы:

H04N/00. Передача изображений, например, при фототелеграфии;

H04N/00. Элементы телевизионных систем, осуществляющие развертку;

H04N/00. Элементы телевизионных систем;

H04N7/00. Телевизионные системы;

H04N9/00. Цветное телевидение, стереоскопическое телевидение; конструктивные элементы для них.

Подгруппы образуют рубрики, подчиненные основной группе. Индексы подгруппы являются продолжением индекса группы в виде последовательности четных цифр. Например, группа H04N7/00 «Телевизионные системы» имеет подгруппы:

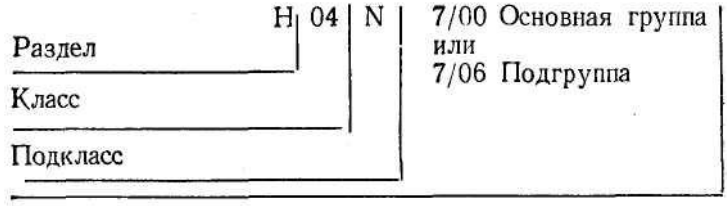
H04N7/02. Контроль, испытание или измерение (приемников или записывающих устройств 5/13);

H04N/04. Устройства для передачи одного телевизионного сигнала (как составляющей изображения, так и составляющей звукового сопровождения) с помощью несущей частоты;

H04N7/06. Системы для одновременной передачи телевизионного сигнала с помощью более чем одной частоты.

Среди групп и подгрупп используется иерархическая структура. Точка между индексом и текстом рубрики заменяет текст старшей группы. При этом цифры индексов могут быть одно-, двух-, трехзначными числами. Каждую последующую цифру после наклонной черты следует понимать как дальнейшее десятичное деление предыдущей цифры. При необходимости могут быть введены новые рубрики путем использования нечетных цифр после наклонной черты в индексах подгрупп.

Приведем состав полного классификационного индекса МКИ на примере:



В соответствии с рубриками МКИ патентные документы размещаются в официальных периодических изданиях. Назовем

основные из них. Официальный бюллетень «Открытия, изобретения, промышленные образцы, товарные знаки» выходит четыре раза в месяц. В нем публикуются сведения о зарегистрированных открытиях, об изобретениях, на которые выданы авторские свидетельства и патенты, сведения о выдаче охранных документов на промышленные образцы и товарные знаки, а также об изменениях в правовом положении охранных документов. «Библиографический указатель патентов» издается ежегодно и позволяет осуществлять проверку различных объектов техники на патентную чистоту.

Реферативный журнал «Изобретения в России и за рубежом» (до 1978 г.— «Изобретения за рубежом») содержит сведения об изобретениях шести стран: СССР, США,ФРГ, Франции, Великобритании и Японии. Журнал выходит два раза в месяц. В соответствии со 11G классами МКИ журнал имеет 116 тематических выпусков. В первой части журнала в переводе на русский язык помещаются публикации иностранных патентных бюллетеней и в переводе на английский язык публикации официального бюллетеня «Открытия, изобретения, промышленные образцы, товарные знаки». Во второй части журнала публикуются нумерационные и систематические указатели.

16.6. Техничекие средства поиска информации

Методы и средства поиска информации превращатились в специальную отрасль знаний. Она приобрели важное значение как в области научных исследований и опытно-конструкторских разработок, так и в процессе производства промышленной и сельскохозяйственной продукции.

Поиск информации требует специализированных средств, переросших в сложные системы. Система поиска входит как составная часть в общую систему научно-технической информации. Последняя включает средства копирования, хранения, размножения, поиска, приема и передачи информации.

Использование технических средств для поиска документов осуществляется на различных уровнях. Поиск же необходимых фактов даже при помощи современной информационной техники наталкивается на серьезные трудности, но в этой области имеются значительные успехи.

Одним из наиболее простых средств поиска информации являются картотеки и каталоги. Устройство различного рода картотек и каталогов представляет собой соответствующим образом хранящиеся наборы стандартных размеров карт, выполненных из плотной бумаги, тонкого картона или пластмассы. Картотеки и каталоги ручной

сортировки позволяют помещать и отыскивать необходимые карточки при помощи краевой перфорации, щелевых и просветных перфокарт. В механизированной картотеке лотки карт на стол оператора подаются автоматически по его заказу.

Для транспортировки необходимых документов применяются лифтовые подъемники, горизонтальные и вертикальные, конвейерные и тележечные транспортеры, электромагнитная и пневматическая почты.

Наиболее эффективными и перспективными техническими средствами поиска информации являются системы с использованием мощных ЭВМ. Разрабатываются такие системы в виде универсальных или специализированных средств поиска информации. На ЭВМ в таких системах возлагаются операции не только запоминания, хранения, распределения и поиска информации, но и ряд подготовительных операций, относящихся к вводу данных в ЭВМ, формирование банков данных.

Технические средства и процесс поиска информации во многом зависят от вида носителя информации. Долгое время основным носителем информации являлась бумага. Это имело существенные недостатки — малая плотность информации, низкая степень автоматизации различных процессов и, как следствие,— большие затраты ручного труда.

Применение микроформ на пленочных основах как носителей информации позволило в значительной мере уменьшить эти недостатки. Роликовые микроформы (микрофильмы) обеспечили компактное хранение больших объемов информации. Плоские микроформы в виде микрофишей более удобны при использовании сравнительно небольшого количества информации. Емкость современной микрофиши 96 машинописных страниц, т. е. 2 млн. бит. Ультрафиши обладают увеличенной более чем в 2 раза емкостью. В ЭВМ долгосрочная память реализуется на машинных носителях.

Для хранения информации в зависимости от вида носителя используется различное специализированное оборудование в виде одно- и двухярусных стеллажей, фильмостатов для хранения коробок с микрофильмами и магнитными носителями. Механизацию, автоматизцию поиска и выдачи документов в соответствии с заказами, а также другие операции, связанные с вводом, хранением и выбором информации, осуществляют автоматизированные информационно-поисковые системы (АИПС) на базе ЭВМ. Современные АИПС обеспечивают также реферирование информации. Такие АИПС обеспечивают режим «совместного» человеко-машинного поиска В

этом режиме осуществляется диалог человека с машиной путем постановки ей вопросов и получения в том или ином виде ответом. АИПС на основе современных ЭВМ обеспечивают переработку миллионов документов и фактографических данных в реальном режиме времени.

В качестве примера современной АИПС можно привестим автоматизированную систему информации о науке и технике по непубликуемым источникам (АСИНИТ). По принципу работы система относится к классу человеко-машинных систем. АСИНИТ имеет девять следующих функциональных подсистем: ввод документов, издание, база данных, ретроспективный поиск, т. е. поиск за определенный интервал времени, избирательное распространение информации, статистика, копия, анализ, управление. Выделение отдельных видов обеспечений предусматривает возможность дальнейшего интегрирования систем. Информация в АСИНИТ может вводиться и храниться в машиночитаемом виде. Вся эта информация, команды по ее обработке и результаты содержатся в банках данных, документов и информации. Банк данных необходим для самой машины и содержит информацию в машиночитаемой форме. Он позволяет осуществлять селективный вызов, сортировку, обработку текстов, изображений и т. д. *Банк документов* — это хранилище документов в традиционной форме. *Банк информации* — аналог библиотечного абонемента. Здесь постоянно идет процесс упорядочения и обновления информации. Хранится информация в естественной и машиночитаемой формах. Банк информации обеспечивает потребителям выдачу копий на различных носителях информации.

АСИНИТ оснащена техникой цифровой связи. После преобразования информации в цифровые сигналы осуществляется сжатие данных, запись в накопителях и передача.

16.7. Оформление и представление результатов научно-исследовательских работ

16.7.1. Структура научно-исследовательской работы

В России определяется ГОСТ 7 32 01. Все материалы, полученные в процессе исследования, систематизируют и оформляют в виде научной работы. Отчет о НИР — научно-технический документ, который содержит систематизированные данные о научно-исследовательской работе, описывает состояние научно-технической проблемы, процесс и/или результаты научного исследования. Материал должен быть изложен четко и в логической последовательности, убедительно аргументирован, формулировки должны быть краткими и точными,

исключающими возможность неоднозначного толкования, рекомендации и предложения – обоснованными.
Структурными элементами отчета о НИР являются:
- титульный лист;
- список исполнителей;
- **реферат**;
- содержание;
- нормативные ссылки;
- определения;
- обозначения и сокращения;
- **введение**;
- **основная часть**;
- **заключение**;
- список использованных источников;
- приложения.

Обязательные структурные элементы выделены полужирным шрифтом. Остальные структурные элементы включают в отчет по усмотрению исполнителя НИР.

Требования к содержанию структурных элементов отчета

Титульный лист

Титульный лист является первой страницей отчета о НИР и служит источником информации, необходимой для обработки и поиска документа.

На титульном листе приводят следующие сведения:
- наименование вышестоящей организации;
- наименование организации-исполнителя НИР;
- индекс Универсальной десятичной классификации (УДК);
- коды Высших классификационных группировок Общероссийского классификатора промышленной и сельскохозяйственной продукции для НИР (ВКГОКП), предшествующих постановке продукции на производство;
- номера, идентифицирующие отчет;
- грифы согласования и утверждения;
- наименование работы;
- наименование отчета;
- вид отчета (заключительный, промежуточный);
- номер (шифр) работы;
- должности, ученые степени, ученые звания, фамилии и инициалы руководителей организации-исполнителя НИР, руководителей НИР;
- место и дату составления отчета.

Список исполнителей

В список исполнителей должны быть включены фамилии и инициалы, должности, ученые степени, ученые звания руководителей НИР, ответственных исполнителей, исполнителей и соисполнителей, принимавших творческое участие в выполнении работы.

Реферат

Реферат должен содержать:

- сведения об объеме отчета, количестве иллюстраций, таблиц, приложений, количестве частей отчета, количестве использованных источников;
- перечень ключевых слов;
- текст реферата.

Перечень ключевых слов должен включать от 5 до 15 слов или словосочетаний из текста отчета, которые в наибольшей мере характеризуют его содержание и обеспечивают возможность информационного поиска. Ключевые слова приводятся в именительном падеже и печатаются строчными буквами в строку через запятые.

Текст реферата должен отражать:

- объект исследования или разработки;
- цель работы;
- метод или методологию проведения работы;
- результаты работы;
- основные конструктивные, технологические и технико-эксплуатационные характеристики;
- степень внедрения;
- рекомендации по внедрению или итоги внедрения результатов НИР;
- область применения;
- экономическую эффективность или значимость работы;
- прогнозные предположения о развитии объекта исследования.

Если отчет не содержит сведений по какой-либо из перечисленных структурных частей реферата, то в тексте реферата она опускается, при этом последовательность изложения сохраняется.

Содержание

Содержание включает введение, наименование всех разделов, подразделов, пунктов (если они имеют наименование), заключение, список использованных источников и наименование приложений с указанием номеров страниц, с которых начинаются эти элементы отчета о НИР.

Нормативные ссылки

Структурный элемент “Нормативные ссылки” содержит перечень стандартов, на которые в тексте стандарта дана ссылка.

Определения

Структурный элемент “Определения” содержит определения, необходимые для уточнения или установления терминов, используемых в НИР.

Обозначения и сокращения

Структурный элемент “Обозначения и сокращения” содержит перечень обозначений и сокращений, применяемых в данном отчете о НИР. Запись обозначений и сокращений проводят в порядке приведения их в тексте отчета с необходимой расшифровкой и пояснениями.

Введение

Введение должно содержать оценку современного состояния решаемой научно-технической проблемы, основание и исходные данные для разработки темы, обоснование необходимости проведения НИР, сведения о планируемом научно-техническом уровне разработки, о патентных исследованиях и выводы из них, сведения о метрологическом обеспечении НИР. Во введении должны быть показаны актуальность и новизна темы, связь данной работы с другими научно-исследовательскими работами.

Во введении промежуточного отчета по этапу НИР должны быть приведены цели и задачи этапа исследований, их место в выполнении НИР в целом.

Во введении заключительного отчета о НИР помещают перечень наименований всех подготовленных промежуточных отчетов по этапам и их инвентарные номера.

Основная часть

В основной части отчета приводят данные, отражающие сущность, методику и основные результаты выполненной НИР.

Основная часть должна содержать:

а) выбор направления исследований, включающий обоснование направления исследования, методы решения задач и их сравнительную оценку, описание выбранной общей методики проведения НИР;

б) процесс теоретических и (или) экспериментальных исследований, включая определение характера и содержания теоретических исследований, методы исследований, методы расчета, обоснование необходимости проведения экспериментальных работ, принципы действия разработанных объектов, их характеристики;

в) обобщение и оценку результатов исследований, включающих оценку полноты решения поставленной задачи и предложения по дальнейшим направлениям работ, оценку достоверности полученных результатов и их сравнение с аналогичными результатами отечественных и зарубежных работ, обоснование необходимости проведения дополнительных исследований, отрицательные результаты, приводящие к необходимости прекращения дальнейших исследований.

Представление в отчете данных о свойствах веществ и материалов проводятся по ГОСТ 7.54, единицы физических величин — по ГОСТ 8.417.

Заключение

Заключение должно содержать:

- краткие выводы по результатам выполнений НИР или отдельных ее этапов;
- оценку полноты решений поставленных задач;
- разработку рекомендаций и исходных данных по конкретному использованию результатов НИР;
- оценку технико-экономической эффективности внедрения;
- оценку научно-технического уровня выполненной НИР в сравнении с лучшими достижениями в данной области.

Список использованных источников

Список должен содержать сведения об источниках, использованных при составлении отчета. Сведения об источниках приводятся в соответствии с требованиями ГОСТ 7.1.

Приложения

В приложения рекомендуется включать материалы, связанные с выполненной НИР, которые по каким-либо причинам не могут быть включены в основную часть. В приложения могут быть включены:

- промежуточные математические доказательства, формулы и расчеты;
- таблицы вспомогательных цифровых данных;
- протоколы испытаний;
- описание аппаратуры и приборов, применяемых при проведении экспериментов, измерений и испытаний;
- заключение метрологической экспертизы;
- инструкции, методики, разработанные в процессе выполнения НИР;
- иллюстрации вспомогательного характера;
- копии технического задания на НИР, программы работ, договора или другого исходного документа для выполнения НИР;
- протокол рассмотрения выполненной НИР на совете;
- акты внедрения результатов НИР и др.

16.7.2. Правила оформления работы

Общие требования

Изложение текста и оформление отчета выполняют в соответствии с требованиями настоящего стандарта, ГОСТ 2.105 и ГОСТ 6.38. Страницы текста отчета о НИР и включенные в отчет иллюстрации и таблицы должны соответствовать формату А4 по ГОСТ 9327.

Отчет о НИР должен быть выполнен любым печатным способом на пишущей машинке или с использованием компьютера и принтера на одной стороне листа белой бумаги формата А4 через полтора интервала. Цвет шрифта должен быть черным, высота букв, цифр и других знаков — не менее 1,8 мм (кегль не менее 12).

Текст отчета следует печатать, соблюдая следующие размеры полей: правое — 10 мм, верхнее — 20 мм, левое и нижнее — 20 мм.

Разрешается использовать компьютерные возможности акцентирования внимания на определенных терминах, формулах, теоремах, применяя шрифты разной гарнитуры.

Вне зависимости от способа выполнения отчета качество напечатанного текста и оформления иллюстраций, таблиц, распечаток с ПЭВМ должно удовлетворять требованию их четкого воспроизведения.

При выполнении отчета необходимо соблюдать равномерную плотность, контрастность и четкость изображения по всему отчету. В отчете должны быть четкие, нерасплывшиеся линии, буквы, цифры и знаки.

Опечатки, описки и графические неточности, обнаруженные в процессе подготовки отчета, допускается исправлять подчисткой или закрашиванием белой краской и нанесением на том же месте исправленного текста (графики) машинописным способом или черными чернилами, пастой или тушью — рукописным способом.

Фамилии, названия учреждений, организаций, фирм, название изделий и другие имена собственные в отчете приводят на языке оригинала. Допускается транслитерировать имена собственные и приводить названия организаций в переводе на язык отчета с добавлением (при первом упоминании) оригинального названия.

Сокращение русских слов и словосочетаний в отчете — по ГОСТ 7.12.

Построение отчета

Основную часть отчета следует делить на разделы, подразделы и пункты. Пункты, при необходимости, могут делиться на подпункты. При делении текста отчета на пункты и подпункты необходимо, чтобы каждый пункт содержал законченную информацию.

Разделы, подразделы, пункты и подпункты следует нумеровать арабскими цифрами и записывать с абзацного отступа.

Разделы должны иметь порядковую нумерацию в пределах всего текста, за исключением приложений.

Пример — 1, 2, 3 и т. д.

Номер подраздела или пункта включает номер раздела и порядковый номер подраздела или пункта, разделенные точкой.

Пример — 1.1, 1.2, 1.3 и т. д.

Номер подпункта включает номер раздела, подраздела, пункта и порядковый номер подпункта, разделенные точкой.

Пример - 1.1.1.1, 1.1.1.2, 1.1.1.3 и т. д.

После номера раздела, подраздела, пункта и подпункта в тексте точку не ставят.

Разделы, подразделы должны иметь заголовки. Пункты, как правило, заголовков не имеют. Заголовки должны четко и кратко отражать содержание разделов, подразделов.

Нумерация страниц отчета

Страницы отчета следует нумеровать арабскими цифрами, соблюдая сквозную нумерацию по всему тексту отчета. Номер страницы проставляют в центре нижней части листа без точки.

Титульный лист включают в общую нумерацию страниц отчета. Номер страницы на титульном листе не проставляют.

Иллюстрации и таблицы, расположенные на отдельных листах, включают в общую нумерацию страниц отчета.

Иллюстрации и таблицы на листе формата А3 учитывают как одну страницу.

Иллюстрации

Иллюстрации (чертежи, графики, схемы, компьютерные распечатки, диаграммы, фотоснимки) следует располагать в отчете непосредственно после текста, в котором они упоминаются впервые, или на следующей странице.

Иллюстрации могут быть в компьютерном исполнении, в том числе и цветные.

На все иллюстрации должны быть даны ссылки в отчете.

Чертежи, графики, диаграммы, схемы, иллюстрации, помещаемые в отчете, должны соответствовать требованиям государственных стандартов Единой системы конструкторской документации (ЕСКД). Допускается выполнение чертежей, графиков, диаграмм, схем посредством использования компьютерной печати.

Фотоснимки размером меньше формата А4 должны быть наклеены на стандартные листы белой бумаги.

Иллюстрации, за исключением иллюстрации приложений, следует нумеровать арабскими цифрами сквозной нумерацией.

Если рисунок один, то он обозначается “Рисунок 1”. Слово “рисунок” и его наименование располагают посередине строки.

Иллюстрации, при необходимости, могут иметь наименование и пояснительные данные (подрисуночный текст). Слово “Рисунок” и наименование помещают после пояснительных данных и располагают следующим образом: Рисунок 1 — Детали прибора.

Таблицы

Таблицы применяют для лучшей наглядности и удобства сравнения показателей. Название таблицы следует помещать над таблицей слева, без абзацного отступа в одну строку с ее номером через тире.

При переносе части таблицы название помещают только над первой частью таблицы, нижнюю горизонтальную черту, ограничивающую таблицу, не проводят.

Таблицу следует располагать в отчете непосредственно после текста, в котором она упоминается впервые, или на следующей странице.

На все таблицы должны быть ссылки в отчете. При ссылке следует писать слово “таблица” с указанием ее номера.

Таблицы, за исключением таблиц приложений, следует нумеровать арабскими цифрами сквозной нумерацией.

Заголовки граф и строк таблицы следует писать с прописной буквы в единственном числе, а подзаголовки граф — со строчной буквы, если они составляют одно предложение с заголовком, или с прописной буквы, если они имеют самостоятельное значение. В конце заголовков и подзаголовков таблиц точки не ставят.

Допускается применять размер шрифта в таблице меньший, чем в тексте.

Оформление таблиц в отчете должно соответствовать ГОСТ 1.5 и ГОСТ 2.105.

Формулы и уравнения

Уравнения и формулы следует выделять из текста в отдельную строку.

Формулы в отчете следует нумеровать порядковой нумерацией в пределах всего отчета арабскими цифрами в круглых скобках в крайнем правом положении на строке.

Пример ***A=a:b,*** (1)

Ссылки в тексте на порядковые номера формул дают в скобках.

Ссылки

Ссылки на использованные источники следует приводить в квадратных скобках.

Список использованных источников

Сведения об источниках следует располагать в порядке появления ссылок на источники в тексте отчета и нумеровать арабскими цифрами без точки и печатать с абзацного отступа.

Образец оформления списка использованных источников (по ГОСТ 7.1-84)

Статья в серийном издании:

Авторов не более трех:

Иванов И.И.,Петров А.А.,Сидоров И.В. Исследование процессов течения// Изв.АН СССР.Сер."Э".- 1982.-№ 2-С.71-77.

Авторов не более четырех:

Исследование процессов течения/ И.И.Иванов, А.А.Петров, И.В.Сидоров, Е.К.Зайцев//МТТ,сер.11.-1985.-№ 3-С.11-12.

Авторов более четырех:

Исследование процессов течения/ И.И.Иванов, А.А.Петров, И.В.Сидоров и др.// Вест.МГУ.Сер.5.-1985.-Том 3; № 4.-С.11-12.

Статья в книге и сборнике:

Исследование процессов релаксации / И.И.Иванов, Е.И.Зайцев//механика деформирования: Сборник научи.трудов ИПМ.-М.,1983.-Вып.3-С.94-96.

Зайцев В.И. Разрушение пластмасс // Прочность:учебное пособие/ А.В.Петров,И.И.Сидоров,В.А.Сухов и др.-М.,1983.-С.155-166.

Статья на депоненте:

Лисипин Л.Г..Медведев А.И. Определение характеристик/ ЦНИИ.-М.,1933. -18с.- Деп.в ЦНИИНТИ 27.02.83; № 13924.

Определение характеристик/ Л.Г.Лисицин.А.И.Медведев; ЦНИИ.-М.,1333.-18с.- Деп.в ЦНИИНТИ 27.02.83; № 13924.- Реф.в ИНПЛ.-1984.-вып.4.-С. 9-10.

Перевод статьи и др.материалов:

Исследование систем/ ВЦП.- № 4314.-М.,13.04.84.-34с.-Пер.ст. из журн.:МММ-1980.- 19; № 4.-Р.478-487.

Исследование систем / ВЦП.-№ 4314.-34с.-Пер.ст.

Исследование систем / ВЦП.-№ 4314.-34с.-Пер.материала фирмы:МММ -1978.-29р.США.

Исследование систем / ВЦП.- № 4314.-М.,13.04.84.-34.-Пер.кн.: МММ 1977.-215р.

Авторское свидетельство:

А.С.10079 СССР, МКИ В25М25/00. Устройство систем / А.К.Киселев.- № 3160005/25-28; заявл.23.11.81; Опубл.30.03.83; Приоритет 26.06.82.

Нормативные документы типа ГОСТ, ОСТ, РСТ, СТП, ТУ. РД:

ГОСТ 12.1 003-76. Способ списания.- Взамен ГОСТ 12.1.001-70; Введ.01.01.78 до 01.07.84.-9с.-Группа 019.

Программы ОФАП САПР, методические рекомендации; инструкции:

Математическое моделирование: программа / ЦНИИ; Е.К.Зайцев.- Инв.№ 3445.- М.,1978.-25с.- Реф.в Бюлл.Алгоритмы и программы САПР.- 1980.-№19.- С.44-45.

Расчет премии: программа / НПО "Ель";А.В.Кедров.-Инв.№48834.- Пермь,1980.-21с.-.Деп.в ЦНИИ;ОФАП САПР 06.06.80; Рег.№789;Инв.№48003 ДО.- Реф в Бюлл.Алгоритмы и программы САПР.-1981.-№20.- С.13.

Методическое руководство по расчету на прочность / ЦНИИ; НПО "Ели - Инв.№11102.- М.,1971.-112с.

Отчеты одной организации:

Отработка системы: Отчет о НИР (заключит.)/ ЦНИИ; Руководитель Ю.И.Краснов; И.И.Иванов, П.П.Петров, С.С.Сидоров и др.-Шифр темы "Талант"; ГР № Я 677789; Инв.№46773.- М.,1985.-77с.

Отработка системы: Отчет о НИР (заключит.)/ ЦНИИ; Руководитель Ю.И.Краснов.- Шифр темы "Талант"; ГР №Я 677789; Инв.№46773.-М., 1985.-77с.-Отв.исполн. И.И.Иванов,П.П.Петров,С.С.Сидоров и др.

более одной организации :

Разработка комплекса: Отчет о НИР(заключит.)/ ЦНИИ; Руководитель Ю.И.Краснов.- Шифр темы "Атлас"; ГР № Я 677788; Инв.№46772.- М.,1985.-88с.- Отв.исп.И.И.Иванов,П.П.Петров, С.С.Сидоров и др.; Соисполн.: НПО"Свема",Е.Л.Зайдев, В.Л.Лисицин; НПО"Ель", Р.Л.Кукушкин.

Разработка комплекса: Отчет о НИР(заключит.)/ ЦНИИ, НПО"Свема", НПО"Ель"; Руководитель Ю.И.Краснов; И.И.Иванов, П.П.Петров, С.С.Сидоров и др.- Шифр темы "Атлас"; ГР № Я 677788; Инв.№46772.- М.,1985.-88с.

Книга: количество авторов не более трех

Прохоров И.В. Исследование процессов.- М.: Наука,1978.-321с.

авторов не более четырех:

Надежность: учебное пособие / И.И.Иванов,П.П.Петров,С.С.Сидоров, Е.М.Заицев;МГУ.М.,1983.-120с.

авторов более четырех:

24. Сотрудничество /И.И.Иванов,П.П.Петров,С.С.Сидоров и др:АН СССР. ИПМ.- Киев; Наук.думка,1933.- 270с.

Диссертация и автореферат:

Иванов И.И. Методы исследования: Дис... канд.техн.наук.-М.,1982.-212с.

Петров П.П. Методы прогнозирования: Автореф.дис...д-ра техн. наук.-М.,1983.-2.7с.

Петров П.П. Методы прогнозирования: Дис...д-ра техн.наук/ЦНИИ.-Инв.№46667.-М.,1983.-273с.

Приложения

Приложение А

КАТАЛОГ МНОГОФАКТОРНЫХ РЕГУЛЯРНЫХ ПЛАНОВ ЭКСПЕРИМЕНТОВ

Каталог включает важные с точки зрения приложений факторные планы для различных типов моделей. Значительное число планов (несколько тысяч) не позволяет записать их в каталоге. Вместо этого в каталоге приведены следующие 4 раздела. Каталог приводится из книги С.Г. Радченко «Устойчивые методы оценивания статистических моделей».

Раздел I содержит вспомогательные матрицы, которые могут быть преобразованы в различные факторные планы.

В разделе II описаны способы получения регулярных равномерных планов с помощью вспомогательных матриц раздела I. Планы раздела II являются *D*- и *Q*-оптимальными (функция эффективности φ для них равна единице). В качестве примера рассмотрим способ получения регулярного равномерного плана главных эффектов $4^5//16$. По таблице симметричных планов раздела II находим, что искомый план образуют с 16-го по 20-й столбцы вспомогательной матрицы $\mathbf{D}_{16}$. Этот план записан в табл. А1.

Таблица А1.

Построение планов с помощью каталога

План $4^5//16$					Нерегулярный план $2^4\times3\times4^2//16$							Регулярный план $2^4\times3\times4^2//16$						
0	0	0	0	0	0	1	1	0	0	0	0	0	1	1	0	0	0	0
2	0	2	1	3	1	1	0	0	0	1	3	1	1	0	0	1	1	3
3	0	3	3	1	0	0	0	0	0	3	1	0	0	0	0	0	3	1
1	0	1	2	2	1	0	1	0	0	2	2	1	0	1	0	1	2	2
0	2	2	3	2	0	1	1	1	0	3	2	0	1	1	1	1	3	2
2	2	0	2	1	1	1	0	1	0	2	1	1	1	0	1	0	2	1
3	2	1	0	3	0	0	0	1	0	0	3	0	0	0	1	1	0	3
1	2	3	1	0	1	0	1	1	0	1	0	1	0	1	1	0	1	0
0	3	3	2	3	0	1	1	2	1	2	3	0	1	1	2	0	2	3
2	3	1	3	0	1	1	0	2	1	3	0	1	1	0	2	1	3	0
3	3	0	1	2	0	0	0	2	1	1	2	0	0	0	2	0	1	2
1	3	2	0	1	1	0	1	2	1	0	1	1	0	1	2	1	0	1
0	1	1	1	1	0	1	1	0	1	1	1	0	1	1	0	1	1	1
2	1	3	0	2	1	1	0	0	1	0	2	1	1	0	0	0	0	2
3	1	2	2	0	0	0	0	0	1	2	0	0	0	0	0	1	2	0
1	1	0	3	3	1	0	1	0	1	3	3	1	0	1	0	0	3	3

Раздел III содержит таблицы преобразований регулярных равномерных планов для получения различных регулярных и нерегулярных планов. Регулярные планы получаются в том и только том случае, когда при преобразовании любого фактора в l новых факторов либо $l = 1$, либо (при $l > 1$) эффективность $\varphi = 1$.

Эффективность полученного после преобразования плана можно вычислить по формуле

$$\varphi = \frac{k}{1 - n + \sum_{i=1}^{n} \frac{1 + \sum_{r=1}^{m_i} (s_r - 1)}{\varphi_i}}, \qquad \text{(A1)}$$

где φ - коэффициент эффективности получаемого плана эксперимента;

k - число коэффициентов (главных эффектов, включая x_0) в модели, которую предполагается построить;

n - число преобразований, включая и тождественные преобразования, для которых $\varphi_i = 1$, факторов $F_1, ..., F_n$ исходного преобразуемого плана;

r - текущий номер нового фактора, вводимого с помощью i-го преобразования, $1 \le i \le n$;

m_i - число новых факторов, вводимых с помощью i-го преобразования;

s_r - число уровней r-го фактора, вводимого с помощью i-го преобразования;

φ_i - коэффициент эффективности i-го преобразования (в каталоге указан в процентах, раздел III).

Как пример использования этих преобразований рассмотрим способ получения факторного плана главных эффектов $2^4 \times 3 \times 4^2//16$, который может быть построен преобразованием регулярного плана 4//16. Действительно, можно использовать следующие два варианта преобразований. В первом варианте первый четырехуровневый фактор плана $4^5//16$ заменяем тремя двухуровневыми с помощью преобразования 2а (см. раздел III); второй четырехуровневый фактор заменяем на двухуровневый и трехуровневый с помощью преобразования 3а:

$$\left.\begin{matrix}0\\1\\2\\3\end{matrix}\right\}\rightarrow\left\{\begin{matrix}0&1&1\\1&0&1\\1&1&0\\0&0&0,\end{matrix}\right.\qquad\left.\begin{matrix}0\\1\\2\\3\end{matrix}\right\}\rightarrow\left\{\begin{matrix}0&0\\0&1\\1&0\\2&1.\end{matrix}\right.$$

Третий четырехуровневый фактор плана $4^5//16$ вычеркиваем, а четвертый и пятый факторы оставляем без изменений. В результате таких преобразований получим факторный план $\mathbf{K}_1$ главных эффектов $2^4\times3\times4^2//16$ (табл. А1).

Поскольку преобразование 3а не является 100%-ным ($\varphi<1$), полученный план $2^4x3x4^2//16$ нерегулярен. Можно, однако, построить регулярный план, используя второй вариант преобразований плана $4^5//16$. Первый, четвертый и пятый факторы этого плана преобразуем так же, как ранее. Второй четырехуровневый фактор заменяем трехуровневым в соответствии с преобразованием 3б. Третий четырехуровневый фактор заменяем двухуровневым в соответствии с преобразованием 2в. В результате получим регулярный, но не равномерный план $\mathbf{K}_2$ главных ффектов $2^4\times3\times4^2//16$ (табл. А1). Эффективность полученных планов можно вычислить по формуле (А1). Значения входящих в нее параметров для планов $\mathbf{K}_1$ и $\mathbf{K}_2$ даны в табл. А2:

Таблица А2

План	$\mathbf{K}_1$					$\mathbf{K}_2$				
Исходный фактор	F_1	F_2	F_3	F_4	F_5	F_1	F_2	F_3	F_4	F_5
φ_i	1	0,6	–	1	1	1	0,9	1	1	1
m_i	3	2	–	1	1	3	1	1	1	1
s_1	2	3	–	4	4	2	3	2	4	4
s_2	2	2	–	–	–	2	–	–	–	–
s_3	2	–	–	–	–	2	–	–	–	–
k	13					13				
n	4					5				
φ	0,83					0,98				

В разделе IV приведены многофакторные регулярные *последовательные* планы эксперимента с числом опытов N = 54, 50, 64. *Такие планы не известны* по публикациям и каталогам планов экспериментов.

В табл. А8 приведен последовательный план N = 54 с числом уровней до S_i= 3 со столбцами 1, 2, 7, 8, ортогональными для числа опытов N = 9; 18 и коррелированными со столбцами 3, 5, 9, 10 с $r_{ij\max}$ = 0,25 для числа опытов N = 18.

Столбцы 1, 2, 7, 8, 3, 5, 9, 10, 4, 6, 11, 12, 25 ортогональны друг к другу для числа опытов N =27. При дополнении числа опытов до N = 54 все столбцы с 1 по 25 ортогональны друг к другу.

В табл. А9 для факторов с числом уровней до s_i= 5 и N = 25 столбцы 1, 2, 3, 4, 5, 6 ортогональны для N = 25; 50 и коррелированы с $r_{ij\max}$ = 0,2 со столбцом 8 для N = 25; с $r_{ij\max}$ = 0,3 со столбцами 7, 10 для N = 25; с $r_{ij\max}$ = 0,4 со столбцами 9, 11для N=25. Все столбцы с 1 по 11 ортогональны друг к другу для N = 50.

В табл. А10 для факторов с числом уровней до s_i= 4 и N = 16 столбцы 1, 2, 8, 12 ортогональны; столбцы 1, 2, 8, 12, 4, 21 коррелированы с $r_{ij\max}$ =0,45 для N = 16.

Столбцы 1, 2, 8, 12, 4, 21, 7, 20 ортогональны для N=32 и коррелированы с $r_{ij\max}$ = 0,45 со столбцами 9, 14. Все столбцы 1,..., 21 ортогональны для N = 64.

В табл. А11 приведен план эксперимента $4^{16}x16^{1}//64$, позволяющий разбивать эксперимент на 16 ортогональных блоков с числом опытов 4 в каждом блоке.

Все приведенные планы в случае использования их как равномерных планов имеют статистическую эффективность 100 %.

При необходимости в приведенных в IV разделе последовательных планах экспериментов можно провести оптимальное преобразование регулярных равномерных планов.

I. ВСПОМОГАТЕЛЬНЫЕ МАТРИЦЫ

$D_4=$

1	2	3
0	0	0
1	0	1
0	1	1
1	1	0

$D_8=$

1	2	3	4	5	6	7	8
0	0	0	0	0	0	0	0
1	0	0	1	1	0	1	1
0	1	0	1	0	1	1	2
1	1	0	0	1	1	0	3
0	0	1	0	1	1	1	3
1	0	1	1	0	1	0	2
0	1	1	1	1	0	0	1
1	1	1	0	0	0	1	0

$D_9=$

1	2	3	4
0	0	0	0
1	0	1	1
2	0	2	2
0	1	1	2
1	1	2	0
2	1	0	1
0	2	2	1
1	2	0	2
2	2	1	0

$D_{12}=$

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16
1	1	0	1	1	1	0	0	0	1	0	0	0	0	1	6
0	1	1	0	1	1	1	0	0	0	1	0	1	1	1	7
1	0	1	1	0	1	1	1	0	0	0	1	1	0	1	8
0	1	0	1	1	0	1	1	1	0	0	1	0	1	0	9
0	0	1	0	1	1	0	1	1	1	0	0	0	2	1	10
0	0	0	1	0	1	1	0	1	1	1	0	1	3	1	11
1	0	0	0	1	0	1	1	0	1	1	1	1	2	1	12
1	1	0	0	0	0	1	0	1	1	0	1	1	0	3	13
1	1	1	0	0	0	0	1	0	1	1	0	1	1	0	4
0	1	1	1	0	0	0	0	1	0	1	1	0	1	5	15
1	0	1	1	1	0	0	0	0	1	0	1	1	1	4	14
0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1	0	5	5

$D_{16}=$

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20	21	22	23	24
0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
1	0	0	0	1	1	1	0	0	0	0	1	1	1	0	1	2	0	2	1	3	1	1	1
0	1	0	0	1	0	0	1	1	0	1	1	0	1	1	3	0	3	3	1	2	1	1	2
1	1	0	0	0	1	1	1	1	0	0	0	1	1	0	1	0	1	2	2	3	1	1	3
0	0	1	0	0	1	0	1	0	1	1	0	1	1	1	0	2	2	3	2	4	1	1	4
1	0	1	0	1	1	0	0	1	1	0	1	1	0	0	3	2	1	0	3	6	1	1	5
0	1	1	0	1	1	0	0	1	0	1	1	0	1	1	0	0	3	2	1	7	1	1	6
1	1	1	0	0	0	1	0	1	1	1	0	0	0	1	1	2	3	1	0	7	1	2	3
0	0	0	1	0	0	1	0	0	1	1	1	1	0	3	3	2	3	2	3	0	1	2	3
1	0	0	1	1	1	0	0	1	1	1	0	0	1	0	2	3	1	3	0	1	1	2	4
0	1	0	1	1	0	1	1	0	1	1	0	1	1	0	0	3	3	0	1	2	2	2	5
1	1	0	1	0	1	0	1	0	1	0	1	0	0	1	1	3	2	0	1	3	2	2	6
0	0	1	1	0	1	1	1	1	0	1	1	0	0	0	0	1	1	1	1	4	1	2	7
1	0	1	1	1	0	0	1	1	0	0	0	1	0	1	2	1	3	0	2	5	1	3	8
0	1	1	1	1	1	1	0	0	0	0	0	0	1	1	3	1	2	2	0	6	1	3	9
1	1	1	1	0	0	0	0	0	0	1	1	1	0	1	1	0	3	3	7	1	2	3	10

$D_{18}=$

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18
0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
0	1	1	1	1	1	1	0	0	1	1	1	0	0	1	1	1	1
0	2	2	2	2	2	2	2	0	0	2	2	2	0	0	2	2	2
1	0	0	1	2	1	2	0	1	1	2	0	1	1	2	0	0	1
1	1	1	2	0	2	0	0	1	2	0	1	2	0	1	2	0	1
1	2	2	0	1	0	1	0	1	0	1	0	1	2	0	1	2	1
0	0	1	0	2	2	1	1	2	2	1	0	1	2	1	0	1	0
0	1	2	1	0	0	2	1	2	0	2	1	2	0	2	1	0	1
0	2	0	2	1	1	0	1	2	1	0	2	1	0	2	1	0	2
1	0	2	2	0	1	1	1	0	0	0	3	1	0	0	0	1	1
1	1	0	0	1	2	2	1	0	1	1	4	1	2	1	1	1	2
1	2	1	1	2	0	0	1	0	2	2	5	1	0	0	2	2	3
0	0	1	2	1	0	2	2	1	1	2	3	1	2	2	1	2	4
0	1	2	0	2	1	0	2	1	2	2	4	1	0	2	1	2	5
0	2	0	1	0	2	1	2	1	2	1	5	1	2	1	0	2	6
1	0	2	1	1	2	0	2	2	2	1	3	1	2	2	1	3	7
1	1	0	2	2	0	1	2	2	2	1	4	1	2	2	2	4	8
1	2	1	0	0	1	2	2	2	1	0	5	1	2	2	3	5	9

$D_{20}=$

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20
1	1	0	0	1	1	1	1	0	1	0	1	0	0	0	0	1	1	0	7
0	1	1	0	0	1	1	1	1	0	1	0	1	0	0	0	0	1	1	8
1	0	1	1	0	0	1	1	1	0	1	0	1	0	0	0	0	0	1	9
1	1	0	1	1	0	0	1	1	1	1	0	1	0	1	0	0	0	0	10
0	1	1	0	1	1	0	0	1	1	1	0	1	0	1	0	0	1	0	11
0	0	1	1	0	1	1	0	0	1	1	1	0	1	0	1	0	0	1	12
0	0	0	1	1	0	1	1	0	0	1	1	1	0	1	0	1	0	0	13
0	0	0	0	1	1	0	1	1	0	0	1	1	1	0	1	0	1	0	14
1	0	0	0	0	1	1	0	1	1	0	0	1	1	1	0	1	0	1	15
0	1	0	0	0	0	1	1	0	1	1	0	0	1	1	1	0	1	0	16
1	0	1	0	0	0	0	1	1	0	1	1	0	0	1	1	1	0	1	17
0	1	0	1	0	0	0	0	1	1	0	1	1	0	0	1	1	1	0	18
1	0	1	0	1	0	0	0	0	1	1	0	1	1	0	0	1	1	1	19
1	1	0	1	0	1	0	0	0	0	1	1	0	1	1	0	0	1	1	20
1	1	1	0	1	0	1	0	0	0	0	1	1	0	1	1	0	0	1	21
0	1	1	1	0	1	0	1	0	0	0	0	1	1	0	1	1	0	0	22
0	0	1	1	1	0	1	0	1	0	0	0	0	1	1	0	1	1	0	23
1	0	0	1	1	1	1	0	1	0	1	0	0	0	0	1	1	0	1	24
0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	25

D_{24} =

```
                                1111111111122222222
      12345678901234567890123456789012345678
     |11111010110011001010000000000|
     |01111101011001100101000100011|
     |00111111010110011001010001021|
     |00011111010110011001010110030|
     |00001111110101100110010100131|
     |10000111111010110011001010120|
     |01000011111010110011001011110|
     |10100001111101010110011001101|
     |01010000111111010110011000002|
     |00101000011111010110011001013|
     |10010100001111101011001010023|
     |11001010000111111010110011032|
     |01100101000011111101011000133|
     |00110010100001111110101110122|
     |10011001010000111111010101112|
     |11001100101000011111101011103|
     |01100110010100001111110100004|
     |10110011001010000111111010015|
     |01011001100101000011111101025|
     |10101100110010100001111111034|
     |11010110011001010000111001135|
     |11101011001100101000011110124|
     |11110101100110010100001011114|
     |00000000000000000000000011105|
```

D_{25} =

```
     123456
    |000000|
    |101111|
    |202222|
    |303333|
    |404444|
    |011234|
    |112340|
    |213401|
    |314012|
    |410123|
    |022413|
    |123024|
    |224130|
    |320241|
    |421302|
    |033142|
    |134203|
    |230314|
    |331420|
    |432031|
    |044321|
    |140432|
    |241043|
    |342104|
    |443210|
```

D_{27} =

```
                 11111
      123456789012345
     |000000000000000|
     |100111100111111|
     |200222200222222|
     |010120011121230|
     |110201111202040|
     |210012211010150|
     |020210022212160|
     |120021122020270|
     |220102222101080|
     |001001212112200|
     |101112012220010|
     |201220112001120|
     |011212220200130|
     |111202020011240|
     |211010120122050|
     |021211201021060|
     |121022001102170|
     |221100101210280|
     |002002121221100|
     |102110221002210|
     |202221021110020|
     |012122102012030|
     |112200202120140|
     |212011002201250|
     |022212110100260|
     |122020210211070|
     |222101010022180|
```

D_{28} =

```
                                1111111111122222222
      12345678901234567890123456789012345678
     |10111110000100010011101011010|
     |11011100000011001000111101101|
     |01111100010001001010101101110|
     |00010111100101000110111010101|
     |00011011110000011001100111101|
     |00001111101010001001110101011|
     |11100010100100101010110111010|
     |11100011010010000111011011001|
     |11100001101001010001101110111|
     |01000100111010110110111110001|
     |00110010000111101101101110001|
     |10001001010101101101111110001|
     |00101000110111010100010101111|
     |10000110011001111100001101111|
     |01010001001110101100001111101|
     |00100101010111011101110001011|
     |10010000111011001111100001101|
     |01001010001101110111100001101|
     |11010110110111110000100010011|
     |01111011011011100000110010010|
     |10101101101111100010001000101|
     |10111010100010111100101000101|
     |11001111000011011110000110010|
     |01110101100001111110101000101|
     |10110111011100010100100101010|
     |11011001111100011010010000101|
     |01101110111100001101001010010|
     |00000000000000000000000000000|
```

$$
D_{32}=
\begin{array}{c}
\begin{array}{cccccccccccccccccccccccccccccccc}
1&1&1&1&1&1&1&1&1&1&1&2&2&2&2&2&2&2&2&2&2&3&3&3&3&3&3&3&3&3&4&4\\
1&2&3&4&5&6&7&8&9&0&1&2&3&4&5&6&7&8&9&0&1&2&3&4&5&6&7&8&9&0&1&2
\end{array}\\
\left|\begin{array}{cccccccccccccccccccccccccccccccc}
0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0\\
1&0&0&0&0&1&1&1&1&0&0&0&0&0&0&0&1&1&1&1&0&0&0&0&1&1&1&0&1&0&2&2\\
0&1&0&0&0&1&0&0&0&1&1&1&0&0&0&1&1&1&0&0&0&1&1&1&0&1&1&1&0&1&1&0\\
1&1&0&0&0&0&1&1&1&1&1&0&0&0&0&0&0&1&1&1&1&0&0&0&0&1&1&0&0&3&2&2\\
0&0&1&0&0&0&1&0&0&1&0&0&1&1&0&1&0&0&1&1&0&1&1&0&1&1&1&0&0&1&1&1\\
1&0&1&0&0&1&0&1&1&1&0&0&1&1&0&0&1&1&0&0&1&1&1&0&1&0&0&1&0&1&0&0\\
0&1&1&0&0&1&1&0&0&0&0&1&1&1&1&0&0&1&1&1&0&0&0&0&1&1&0&0&1&1&1&3\\
1&1&1&0&0&0&0&1&1&0&1&1&1&1&0&1&0&0&0&0&1&0&0&1&1&1&1&0&0&0&1&0\\
0&0&0&1&0&0&0&1&0&0&1&0&1&0&1&0&1&0&1&1&0&1&1&1&0&1&1&1&1&2&2&1\\
1&0&0&1&0&1&1&0&1&0&1&0&1&0&1&0&1&0&1&1&0&1&0&0&1&0&2&0&3&2&1&3\\
0&1&0&1&0&1&0&1&0&1&1&0&1&0&1&1&0&1&0&1&0&1&0&1&0&1&0&0&2&3&1&0\\
1&1&0&1&0&0&1&0&1&1&0&1&0&1&1&0&0&1&0&0&1&0&1&1&0&1&0&0&1&2&1&3\\
0&0&1&1&0&0&1&1&0&1&1&1&0&0&1&1&0&1&1&0&0&1&1&0&0&0&2&2&0&3&2&3\\
1&0&1&1&0&1&0&0&1&1&1&0&0&1&1&1&0&1&1&0&0&1&1&0&0&0&1&2&0&3&0&2\\
0&1&1&1&0&1&1&1&0&0&0&1&0&1&1&0&0&0&1&0&0&0&1&1&1&0&2&1&2&1&2&0\\
1&1&1&0&0&0&0&1&0&0&1&0&1&0&1&1&1&1&0&1&0&0&1&0&0&0&0&1&1&1&0&2\\
0&0&0&0&1&0&0&0&1&0&0&1&0&1&1&0&0&1&0&1&1&1&0&1&0&1&1&1&1&1&1&2\\
1&0&0&0&1&1&1&1&0&0&0&1&0&1&1&1&1&0&1&0&1&1&1&0&0&0&1&0&1&3&0&1\\
0&1&0&0&1&1&0&0&1&1&1&0&0&1&1&1&0&0&1&1&1&0&0&1&0&0&1&0&2&3&3&2\\
1&1&0&0&1&0&1&1&0&1&0&0&1&1&0&0&1&1&0&0&1&1&0&1&0&1&1&0&0&1&0&3\\
0&0&1&0&1&0&1&0&1&1&0&1&1&0&1&1&0&1&1&0&1&0&1&0&1&0&0&0&1&1&3&0\\
1&0&1&0&1&1&0&1&0&1&0&0&1&0&1&0&1&0&1&0&0&1&0&1&0&1&1&3&1&0&2&3\\
0&1&1&0&1&1&1&0&1&0&1&0&1&0&1&0&1&0&1&0&0&0&1&0&0&1&1&1&0&3&2&2\\
1&1&1&0&1&0&0&1&0&0&1&0&1&0&1&1&0&1&0&0&1&0&0&1&0&1&1&1&0&1&2&1\\
0&0&0&1&1&0&0&1&1&0&1&1&1&0&0&1&1&1&1&0&1&1&0&0&1&1&0&0&0&0&3&3\\
1&0&0&1&1&1&1&0&0&0&1&1&1&0&1&0&0&0&0&1&1&1&0&0&0&0&1&1&0&1&0&0\\
0&1&0&1&1&1&0&1&1&1&0&0&1&1&0&0&0&1&0&0&0&1&0&1&1&0&1&1&3&1&0&3\\
1&1&0&1&0&0&1&0&0&1&1&0&0&1&1&0&0&1&0&0&1&0&1&1&0&1&1&0&3&0&1&2\\
0&0&1&1&1&0&1&1&1&1&1&0&0&0&1&1&1&0&0&0&0&0&0&1&0&0&0&1&1&1&3&3\\
1&0&1&1&1&1&0&0&0&1&1&1&0&0&0&0&0&1&1&1&0&0&0&1&1&1&0&1&0&3&1&2\\
0&1&1&1&1&1&1&1&1&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&1&1&1&1&1&1&1&1&0&0&3&2&2\\
1&1&1&1&0&0&0&0&0&0&0&0&0&1&1&1&1&1&1&1&1&1&1&0&0&0&0&0&1&3&0&3
\end{array}\right|
\end{array}
$$

D_{36} =

1 2 3 4 5 6
0 0 0 0 0 0
0 1 1 1 0 1
2 1 1 2 0 2
2 1 0 3 0 3
1 0 1 4 0 4
1 0 0 5 0 5
2 1 0 0 1 1
1 0 0 1 1 0
1 0 1 2 1 3
0 0 1 3 1 5
0 1 1 4 1 2
2 1 0 5 1 4
1 0 1 0 2 2
2 1 0 1 2 5
2 0 0 2 2 0
0 1 1 3 2 4
0 1 0 4 2 1
1 0 1 5 2 3
0 0 1 0 3 3
1 1 1 1 3 4
1 0 0 2 3 1
2 0 0 3 3 0
2 1 0 4 3 5
0 1 1 5 3 2
2 1 0 0 4 4
0 0 0 1 4 3
0 1 1 2 4 5
1 0 1 3 4 2
1 0 0 4 4 0
2 1 1 5 4 1
1 1 1 0 5 5
2 0 1 1 5 2
0 1 0 2 5 4
1 1 0 3 5 1
2 0 1 4 5 3
0 0 0 5 5 0

D_{49} =

1 2 3 4 5 6 7 8
0 0 0 0 0 0 0 0
1 0 1 1 1 1 1 1
2 0 2 2 2 2 2 2
3 0 3 3 3 3 3 3
4 0 4 4 4 4 4 4
5 0 5 5 5 5 5 5
6 0 6 6 6 6 6 6
0 1 1 2 3 4 5 6
1 1 2 3 4 5 6 0
2 1 3 4 5 6 0 1
3 1 4 5 6 0 1 2
4 1 5 6 0 1 2 3
5 1 6 0 1 2 3 4
6 1 0 1 2 3 4 5
0 2 2 4 6 1 3 5
1 2 3 5 0 2 4 6
2 2 4 6 1 3 5 0
3 2 5 0 2 4 6 1
4 2 6 1 3 5 0 2
5 2 0 2 4 6 1 3
6 2 1 3 5 0 2 4
0 3 3 6 2 5 1 4
1 3 4 0 3 6 2 5
2 3 5 1 4 0 3 6
3 3 6 2 5 1 4 0
4 3 0 3 6 2 5 1
5 3 1 4 0 3 6 2
6 3 2 5 1 4 0 3
0 4 4 1 5 2 6 3
1 4 5 2 6 3 0 4
2 4 6 3 0 4 1 5
3 4 0 4 1 5 2 6
4 4 1 5 2 6 3 0
5 4 2 6 3 0 4 1
6 4 3 0 4 1 5 2
0 5 5 3 1 6 4 2
1 5 6 4 2 0 5 3
2 5 0 5 3 1 6 4
3 5 1 6 4 2 0 5
4 5 2 0 5 3 1 6
5 5 3 1 6 4 2 0
6 5 4 2 0 5 3 1
0 6 6 5 4 3 2 1
1 6 0 6 5 4 3 2
2 6 1 0 6 5 4 3
3 6 2 1 0 6 5 4
4 6 3 2 1 0 6 5
5 6 4 3 2 1 0 6
6 6 5 4 3 2 1 0

D_{50} =

1 1 1 1 2 3 4 5 6 7 8 9 0 1 2
0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0
0 0 1 1 2 3 4 1 1 1 1 1
0 0 2 2 4 1 3 2 2 2 2 2
0 0 3 3 1 4 2 3 3 3 3 3
0 0 4 4 3 2 1 4 4 4 4 4
0 1 0 1 1 1 1 1 2 3 4 0
0 1 1 2 3 4 0 2 3 4 0 1
0 1 2 3 0 2 4 3 4 0 1 2
0 1 3 4 2 0 3 4 0 1 2 3
0 1 4 0 4 3 2 0 1 2 3 4
0 2 0 2 2 2 2 2 4 1 3 0 2
0 2 1 3 4 0 1 0 2 4 1 3
0 2 2 4 1 3 0 1 3 0 2 4
0 2 3 0 3 1 4 2 4 1 3 0
0 2 4 1 0 4 3 3 0 2 4 1
0 3 0 3 3 3 3 4 2 0 3 1
0 3 1 4 0 1 2 0 3 1 4 2
0 3 2 0 2 4 1 1 4 2 0 3
0 3 3 1 4 2 0 2 0 3 1 4
0 3 4 2 1 0 4 3 1 4 2 0
0 4 0 4 4 4 4 1 0 4 3 2
0 4 1 0 1 2 3 2 1 0 4 3
0 4 2 1 3 0 2 3 2 1 0 4
0 4 3 2 0 3 1 4 3 2 1 0
0 4 4 3 2 1 0 0 4 3 2 1
1 0 0 1 3 2 4 0 3 2 2 3
1 0 1 2 0 0 3 1 4 3 3 4
1 0 2 3 2 3 2 2 0 4 4 0
1 0 3 4 4 1 1 3 1 0 0 1
1 0 4 0 1 4 0 4 2 1 1 2
1 1 0 2 4 3 0 3 4 1 4 3
1 1 1 3 1 1 4 4 0 2 0 4
1 1 2 4 3 4 3 0 1 3 1 0
1 1 3 0 0 2 2 1 2 4 2 1
1 1 4 1 2 0 1 2 3 0 3 2
1 2 0 3 0 4 1 2 1 1 2 4
1 2 1 4 2 2 0 3 2 2 3 0
1 2 2 0 4 0 4 4 3 3 4 1
1 2 3 1 1 3 3 0 4 4 0 2
1 2 4 2 3 1 2 1 0 0 1 3
1 3 0 4 1 0 2 2 4 2 1 1
1 3 1 0 3 3 1 3 0 3 2 2
1 3 2 1 0 1 0 4 1 4 3 3
1 3 3 2 2 4 4 0 2 0 4 4
1 3 4 3 4 2 3 1 3 1 0 0
1 4 0 0 2 1 3 3 3 4 1 4
1 4 1 1 4 4 2 4 4 0 2 0
1 4 2 2 1 2 1 0 0 1 3 1
1 4 3 3 3 0 0 1 1 2 4 2
1 4 4 4 0 3 4 2 2 3 0 3

II. РЕГУЛЯРНЫЕ РАВНОМЕРНЫЕ ПЛАНЫ

Таблица А3.

Планы мощности 2 (главных эффектов)

Симметричные планы				Несимметричные планы			
Номер плана	План	Способ построения: вспомогательная матрица	Способ построения: номера столбцов вспомогательной матрицы	Номер плана	План	Способ построения: вспомогательная матрица	Способ построения: номера столбцов вспомогательной матрицы
1	$2^3//4$	D_4	1–3	15	$2^4\times4//8$	D_8	1–3, 7, 8
2	$2^7//8$	D_8	1–7	16	$2^2\times6//12$	D_{12}	12–14
3	$2^{11}//12$	D_{12}	1–11	17	$2^8\times8//16$	D_{16}	4, 7 , 9, 10, 12–15, 21
4	$2^{15}//16$	D_{16}	1–15				
5	$2^{19}//20$	D_{20}	1–19	18	$2\times3^7//18$	D_{18}	1–8
6	$2^{23}//24$	D_{24}	1–23	19	$3^3\times6//18$	D_{18}	9–12
7	$2^{27}//28$	D_{28}	1–27	20	$2^3\times4\times6//24$	D_{24}	24–28
8	$2^{31}//32$	D_{32}	1–31	21	$3^9\times9//27$	D_{27}	3, 6–14
9	$3^4//9$	D_9	1–4	22	$2^6\times4^6\times8//3$	D_{32}	18, 19, 21–23, 31–37, 41
10	$3^{13}//27$	D_{27}	1–13				
11	$4^5//16$	D_{16}	16–20	23	$2^4\times4^9//32$	D_{32}	3, 16, 19, 22, 32–40
12	$5^6//25$	D_{25}	1–6				
13	$6^3//36$	D_{36}	4–6	24	$2^2\times6^3//36$	D_{36}	2–6
14	$7^8//49$	D_{49}	1–8	25	$3\times6^3//36$	D_{36}	1, 3–6
				26	$2\times5^{11}//50$	D_{50}	1–12

Таблица А4.

Планы мощности 3 *

Номер плана	План	Способ построения	Номер плана	План	Способ построения
27	$2^4//8$	1–3, 7 столбцы вспомогательной матрицы $\mathbf{D}_8$	31	$2^{20}//40$	$\begin{Vmatrix}\mathbf{0}_{20} & \mathbf{D}_{20}\\ \mathbf{I}_{20} & \mathbf{D}_{20}\end{Vmatrix}$
28	$2^8//16$	1–4, 11–14 столбцы вспомогательной матрицы $\mathbf{D}_{16}$	32	$2^{24}//48$	$\begin{Vmatrix}\mathbf{0}_{24} & \mathbf{D}_{24}(23)\\ \mathbf{I}_{24} & \mathbf{D}_{24}(23)\end{Vmatrix}$
29	$2^{12}//24$	$\begin{Vmatrix}\mathbf{0}_{12} & \mathbf{D}_{12}(11)\\ \mathbf{I}_{12} & \mathbf{D}_{12}(11)\end{Vmatrix}$	33	$3^4//27$	1–3, 10 столбцы вспомогательной матрицы $\mathbf{D}_{27}$
30	$2^{16}//32$	1–5, 16–25, 31 столбцы вспомогательной матрицы $\mathbf{D}_{32}$			

* $\mathbf{0}_N$. и $\mathbf{I}_N$ - вектор-столбцы размерности N из нулей и единиц соответственно; $D_N(N-1)$ - матрица, образованная первыми $N-1$ столбцами вспомогательной матрицы $\mathbf{D}_N$

Таблица А5.

Планы мощности 4

Номер плана	План	Способ построения: Вспомогательная матрица	Способ построения: номера столбцов вспомогательной матрицы	Номер плана	План	Способ построения: вспомогательная матрица	Способ построения: номера столбцов вспомогательной матрицы
34	$2^2//4$	$\mathbf{D}_4$	1, 2	37	$2^6//32$	$\mathbf{D}_{32}$	1–5, 31
35	$2^3//8$	$\mathbf{D}_8$	1–3	38	$3^2//9$	$\mathbf{D}_9$	1, 2
36	$2^5//16$	$\mathbf{D}_{16}$	1–4, 15	39	$3^3//27$	$\mathbf{D}_{27}$	1–3

Таблица А6.

Компромиссные планы

Номер плана	План	Оцениваемые эффекты взаимодействия	Способ построения	
			вспомогательная матрица	номера столбцов вспомогательной матрицы
40	$2^6//8$	F_{12}	$\mathbf{D}_8$	1–3, 5–7
41	$2^4//8$	F_{12}, F_{13}, F_{14}	$\mathbf{D}_8$	1–3, 6
42	$2^4//8$	F_{12}, F_{13}, F_{23}	$\mathbf{D}_8$	1–3, 7
43	$2^{14}//16$	F_{12}	$\mathbf{D}_{16}$	1–4, 6–15
44	$2^{12}//16$	F_{12}, F_{13}, F_{23}	$\mathbf{D}_{16}$	1–4, 7, 9–15
45	$2^9//16$	F_{12}, F_{13}, F_{23}, F_{14}, F_{24}, F_{34}	$\mathbf{D}_{16}$	1–4, 11–15
46	$2^8//16$	F_{12}, F_{13}, F_{14}, F_{15}, F_{16}, F_{17}, F_{18}	$\mathbf{D}_{16}$	1–4, 8–10, 14
47	$2^{30}//32$	F_{12}	$\mathbf{D}_{32}$	1–5, 7–31
48	$2^{28}//32$	F_{12}, F_{13}, F_{23}	$\mathbf{D}_{32}$	1–5, 8, 9, 11–31
49	$2^{25}//32$	F_{12}, F_{13}, F_{14}, F_{23}, F_{24}, F_{34}	$\mathbf{D}_{32}$	1–5, 9, 12, 14–31
50	$2^{21}//32$	F_{12}, F_{13}, F_{14}, F_{15}, F_{23}, F_{24}, F_{25}, F_{34}, F_{35}, F_{45}	$\mathbf{D}_{32}$	1–5, 16–31
51	$2^{16}//32$	F_{12}, F_{13}, F_{14}, F_{15}, F_{16}, F_{23}, F_{24}, F_{25}, F_{26}, F_{34}, F_{35}, F_{36}, F_{45}, F_{46}, F_{56}	$\mathbf{D}_{32}$	1–5, 31, 16–25
52	$2^7//32$	F_{34}, F_{35}, F_{36}, F_{37}, F_{45}, F_{46}, F_{47}, F_{56}, F_{57}, F_{67}	$\mathbf{D}_{32}$	1–5, 19, 23
53	$2^7//32$	F_{12}, F_{13}, F_{23}, F_{45}, F_{46}, F_{47}, F_{56}, F_{57}, F_{67}	$\mathbf{D}_{32}$	1–5, 16, 21
54	$2^{16}//32$	F_{12}, F_{13}, F_{14}, F_{15}, F_{16}, F_{17}, F_{18}, F_{19}, $F_{1\,10}$, $F_{1\,11}$, $F_{1\,12}$, $F_{1\,13}$, $F_{1\,14}$, $F_{1\,15}$, $F_{1\,16}$	$\mathbf{D}_{32}$	1–5, 10–15, 22–25, 30
55	$2^9//32$	F_{12}, F_{13}, F_{14}, F_{15}, F_{16}, F_{17}, F_{18}, F_{19}, F_{23}, F_{24}, F_{25}, F_{26}, F_{27}, F_{28}, F_{29}, F_{34}, F_{35}, F_{36}, F_{37}, F_{38}, F_{39}	$\mathbf{D}_{32}$	1–5 ,15, 26, 27, 31
56	$2^7//32$	F_{12}, F_{13}, F_{14}, F_{15}, F_{16}, F_{17}, F_{23}, F_{24}, F_{25}, F_{26}, F_{27}, F_{34}, F_{35}, F_{36}, F_{37}, F_{45}, F_{46}, F_{47}	$\mathbf{D}_{32}$	1–5, 26, 31
57	$3^{11}//27$	F_{12}	$\mathbf{D}_{27}$	1–3, 6–13
58	$3^7//27$	F_{12}, F_{13}, F_{23}	$\mathbf{D}_{27}$	1–3, 10–13
59	$3^5//27$	F_{12}, F_{13}, F_{14}, F_{15}	$\mathbf{D}_{27}$	1–3, 8, 9

Ш. ОПТИМАЛЬНЫЕ ПРЕОБРАЗОВАНИЯ РЕГУЛЯРНЫХ РАВНОМЕРНЫХ ПЛАНОВ

Таблица А7

№ 1	0	0				
	0	1				
	1	0				
а) $2^2//3$	*	*				67% [1])
б) 2//3	*					89%
№ 2	0	1	1			
	1	0	1			
	1	1	0			
	0	0	0			
а) $2^3//4$	*	*	*			100%
б) $2^2//4$	*	*				100%
в) 2//4	*					100%
№3	0	0				
	0	1				
	1	0				
	2	1				
а) 3×2//4	*	*				60%
б) 3//4	*					90%
№ 4	0	1	1	1		
	1	0	1	1		
	1	1	0	1		
	1	1	1	0		
	0	0	0	0		
а) $2^4//5$	*	*	*	*		90%
б) $2^3//5$	*	*	*			91%
в) $2^2//5$	*	*				93%
г) 2//5	*					96%
№ 5	0	0	0			
	0	1	1			
	1	0	1			
	1	1	0			
	2	0	0			
а) $3\times2^2//5$	*	*	*			75%
б) 3×2//5	*	*				80%
в) 3//5	*					90%
№ 6	0	0				
	0	1				
	1	0				
	1	2				
	2	0				
$3^2//5$	*	*				53%
№ 7	0	0				
	0	1				
	1	0				
	2	0				
	3	1				
а) 4×2//5	*	*				57%
б) 4//5	*					91%
№ 8	0	1	0	1	1	
	0	1	1	1	0	
	1	1	0	1	0	
	1	1	1	0	1	
	0	0	0	0	0	
	1	0	1	1	1	
а) $2^5//6$	*	*	*	*	*	83%
б) $2^4//6$	*	*	*	*		85%
в) $2^3//6$	*	*	*			89%
г) $2^2//6$	*	*				92%
д) 2//6	*					100%
№ 9	0	0	0	0		
	0	1	1	0		
	1	1	0	0		
	1	0	1	1		
	2	0	1	0		
	2	1	0	1		
а) $3\times2^3//6$	*	*	*	*		83%
б) $3\times2^2//6$	*	*	*			95%
в) 3×2//6	*	*				100%
г) 3//6	*					100%

[1]) Коэффициент эффективности преобразования, выраженный в процентах. В формуле (А1) используется коэффициент эффективности 1-го преобразования φ_i, выраженный в относительных единицах.

Продолжение табл. А7

№ 10	0	0	1				
	1	0	0				
	0	1	0				
	2	1	1				
	1	2	1				
	2	2	0				
а) $3^2 \times 2//6$	*	*	*				82%
б) $3^2//6$	*	*					79%
№ 11	0	0	0				
	0	1	1				
	1	1	0				
	1	0	1				
	2	0	0				
	3	1	1				
а) $4 \times 2^2//6$	*	*	*				67%
б) $4 \times 2//6$	*	*					74%
в) $4//6$	*						89%
№ 12	0	0					
	0	1					
	0	2					
	1	0					
	2	1					
	3	2					
$4 \times 3//6$	*	*					50%
№ 13	0	0					
	0	1					
	1	0					
	2	0					
	3	1					
	4	1					
а) $5 \times 2//6$	*	*					56%
б) $5//6$	*						93%
№ 14	0	0	0	0	0	0	
	0	0	1	1	1	0	
	0	1	0	0	1	1	
	0	1	1	1	0	0	
	1	0	0	1	0	1	
	1	0	1	0	0	1	
	1	1	0	0	1	0	
а) $2^6//7$	*	*	*	*	*	*	78%
б) $2^5//7$	*	*	*	*	*		81%

№ 14	1	0	0	0	
	0	0	1	0	
	0	1	0	0	
	1	1	1	0	
	1	0	0	1	
	0	0	1	1	
	0	1	0	1	
в) $2^4//7$	*	*	*	*	86%
г) $2^3//7$	*	*	*		91%
д) $2^2//7$	*	*			95%
е) $2//7$	*				98%
№ 15	0	0	0	1	1
	0	1	1	0	0
	1	0	1	1	0
	1	1	0	0	1
	2	0	1	0	1
	2	0	0	0	0
	2	1	0	1	1
а) $3 \times 2^4//7$	*	*	*	*	* 83%
б) $3 \times 2^3//7$	*	*	*	*	88%
в) $3 \times 2^2//7$	*	*	*		93%
г) $3 \times 2//7$	*	*			95%
д) $3//7$	*				96%
№ 16	0	0	0	1	
	0	1	0	0	
	0	2	1	0	
	1	0	0	0	
	1	1	1	1	
	2	0	1	0	
	2	2	0	1	
а) $3^2 \times 2^2//7$	*	*	*	*	81%
б) $3^2 \times 2//7$	*	*	*		83%
в) $3^2//7$	*	*			82%
№ 17	0	2	2		
	1	2	1		
	2	2	0		
	0	1	0		
	2	1	2		
	2	0	1		
	1	0	0		
$3^3//7$	*	*	*		75%

Продолжение табл. А7

№ 18	0	1	0	1	
	0	0	1	0	
	1	1	0	0	
	1	0	1	1	
	2	0	0	0	
	2	1	1	0	
	3	1	0	1	
а) $4\times2^3/\!/7$	*	*	*	*	70%
б) $4\times2^2/\!/7$	*	*	*		81%
в) $4\times2/\!/7$	*	*			86%
г) $4/\!/7$	*				91%
№ 19	0	0	1		
	0	2	0		
	1	0	0		
	1	1	1		
	2	1	0		
	2	2	1		
	3	2	0		
а) $4\times3\times2/\!/7$	*	*	*		68%
б) $4\times3/\!/7$	*	*			68%
№ 20	0	0			
	1	0			
	0	1			
	2	1			
	0	2			
	3	2			
	0	3			
$4^2/\!/7$	*	*			47%

№ 21	0	1	0		
	0	0	1		
	1	0	0		
	1	1	1		
	2	0	1		
	3	1	1		
	4	1	0		
а) $5\times2^2/\!/7$	*	*	*		62%
б) $5\times2/\!/7$	*	*			71%
в) $5/\!/7$	*				89%
№22	0	0			
	0	1			
	1	0			
	1	2			
	2	0			
	3	0			
	4	0			
$5\times3/\!/7$	*	*			48%
№ 23	0	0			
	0	1			
	1	0			
	2	0			
	3	0			
	4	1			
	5	1			
а) $6\times2/\!/7$	*	*			55%
в) $6/\!/7$	*				94%

V. РЕГУЛЯРНЫЕ ПОСЛЕДОВАТЕЛЬНЫЕ ПЛАНЫ ЭКСПЕРИМЕНТОВ

Таблица А8.

Последовательный многофакгорный регулярный план эксперимента 3^{25}//54

№ оп.	1	2	7	8	3	5	9	10	4	6	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20	21	22	23	24	25	26	27	28	29	30	31	32	33	34	35	36	37	38	39	40	41	42	43	44	45	46	47	48	49	50	51	52	53	54	55
1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
2	0	1	1	2	0	1	1	2	0	2	1	2	0	0	0	1	1	1	0	0	0	1	1	1	1	1	1	0	0	0	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1
3	0	2	2	1	0	2	2	1	0	1	2	1	0	0	0	2	2	2	2	2	2	1	1	1	1	1	1	0	0	0	2	2	2	2	2	2	2	2	2	2	2	2	2	2	2	2	2	2	2	2	2	2	2	2	2
4	1	0	1	1	1	0	1	1	2	0	2	2	1	1	1	0	0	0	1	1	1	1	1	1	1	1	1	0	0	0	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1
5	1	1	2	0	1	1	2	0	2	2	0	1	1	1	1	1	1	2	2	2	2	0	0	0	0	0	0	0	0	0	2	2	2	2	2	2	2	2	2	2	2	2	2	2	2	2	2	2	2	2	2	2	2	2	2
6	1	2	0	2	1	2	0	2	2	1	1	0	1	1	1	2	2	2	0	0	0	2	2	2	2	2	2	0	0	0	2	2	2	2	2	2	2	2	2	2	2	2	2	2	2	2	2	2	2	2	2	2	2	2	2
7	2	0	2	2	2	0	2	2	1	0	1	1	2	2	2	0	0	0	2	2	2	2	2	2	2	2	2	0	0	0	2	2	2	2	2	2	2	2	2	2	2	2	2	2	2	2	2	2	2	2	2	2	2	2	2
8	2	1	0	1	2	1	0	1	1	2	2	0	2	2	2	1	1	1	0	0	0	1	1	1	1	1	1	0	0	0	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1
9	2	2	1	0	2	2	1	0	1	1	0	2	2	2	2	2	2	1	1	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
10	0	0	0	0	1	1	1	1	1	1	1	1	1	2	0	1	2	0	1	2	0	1	2	0	1	2	0	0	1	2	0	1	2	0	1	2	0	1	2	0	1	2	0	1	2	0	1	2	0	1	2	0	1	2	0
11	0	1	1	2	1	2	2	0	1	0	2	0	1	2	0	2	0	1	2	0	1	2	0	1	2	0	1	0	1	2	0	1	2	0	1	2	0	1	2	0	1	2	0	1	2	0	1	2	0	1	2	0	1	2	0
12	0	2	2	1	1	0	0	2	1	2	0	2	1	2	0	0	1	2	0	1	2	2	0	1	2	0	1	0	1	2	0	1	2	0	1	2	0	1	2	0	1	2	0	1	2	0	1	2	0	1	2	0	1	2	0
13	1	0	1	1	2	1	2	2	0	1	0	0	2	0	1	1	2	0	2	0	1	2	0	2	0	1	2	0	2	0	1	2	0	1	2	0	1	2	0	1	2	0	1	2	0	1	2	0	1	2	0	1	2	0	1
14	1	1	2	0	2	2	0	1	0	0	1	2	2	0	1	2	0	1	2	0	1	2	0	1	0	1	2	1	2	0	1	2	0	1	2	0	1	2	0	1	2	0	1	2	0	1	2	0	1	2	0	1	2	0	1
15	1	2	0	2	2	0	1	0	0	2	2	1	2	0	1	0	1	2	1	2	0	0	1	2	0	1	2	1	2	0	1	2	0	1	2	0	1	2	0	1	2	0	1	2	0	1	2	0	1	2	0	1	2	0	1
16	2	0	2	2	0	1	0	0	2	1	2	2	0	1	2	0	1	2	0	1	2	1	2	0	0	1	2	0	1	2	0	1	2	0	1	2	0	1	2	0	1	2	0	1	2	0	1	2	0	1	2	0	1	2	0
17	2	1	0	1	0	2	1	2	2	0	0	1	0	1	2	2	0	1	1	2	0	2	0	1	1	2	0	2	0	1	2	0	1	2	0	1	2	0	1	2	0	1	2	0	1	2	0	1	2	0	1	2	0	1	2
18	2	2	1	0	0	0	2	1	2	2	1	0	0	1	2	0	1	2	2	0	1	1	2	0	2	2	0	1	1	2	0	2	0	1	2	0	1	2	0	1	2	0	1	2	0	1	2	0	1	2	0	1	2	0	1
19	0	0	0	0	2	2	2	2	2	2	2	2	1	0	2	1	0	2	1	0	2	1	0	2	1	0	2	1	0	2	1	0	2	1	0	2	1	0	2	1	0	2	1	0	2	1	0	2	1	0	2	1	0	2	1
20	0	1	1	2	2	0	0	1	2	1	0	1	1	0	2	2	1	0	2	1	0	2	1	0	0	2	1	1	0	2	1	0	2	1	0	2	1	0	2	1	0	2	1	0	2	1	0	2	1	0	2	1	0	2	1
21	0	2	2	1	2	1	1	0	2	0	1	0	1	0	2	0	2	1	0	2	1	0	2	1	2	1	0	1	0	2	1	2	1	0	2	1	0	2	1	0	2	1	0	2	1	0	2	1	0	2	1	0	2	1	0
22	1	0	1	1	0	2	0	0	1	2	1	1	2	1	0	1	0	2	2	1	0	1	0	2	2	1	0	1	2	0	2	1	0	2	1	0	2	1	0	2	1	0	2	1	0	2	1	0	2	1	0	2	1	0	2
23	1	1	2	0	0	0	1	2	1	1	2	0	2	1	0	2	1	0	0	2	1	1	0	2	1	0	2	1	0	2	1	0	2	1	0	2	1	0	2	1	0	2	1	0	2	1	0	2	1	0	2	1	0	2	1
24	1	2	0	2	0	1	2	1	1	0	0	2	2	1	0	0	2	1	1	0	2	0	2	1	2	1	0	2	0	2	1	2	1	0	2	1	0	2	1	0	2	1	0	2	1	0	2	1	0	2	1	0	2	1	0
25	2	0	2	2	1	2	1	1	0	2	0	0	0	2	1	1	0	2	0	2	1	0	2	1	0	2	1	1	0	2	1	0	2	1	0	2	1	0	2	1	0	2	1	0	2	1	0	2	1	0	2	1	0	2	1
26	2	1	0	1	1	0	2	0	0	1	1	2	0	2	1	2	1	0	1	0	2	2	1	0	2	2	1	0	2	1	0	2	1	0	2	1	0	2	1	0	2	1	0	2	1	0	2	1	0	2	1	0	2	1	0
27	2	2	1	0	1	1	0	2	0	0	2	1	0	2	1	0	2	1	2	1	0	1	0	2	1	2	1	0	1	0	2	1	2	1	0	2	1	0	2	1	0	2	1	0	2	1	0	2	1	0	2	1	0	2	1
28	0	0	0	0	2	2	2	2	1	1	1	1	0	1	1	0	1	1	0	1	1	0	1	1	0	1	1	2	2	2	2	2	2	2	2	2	2	2	2	2	2	2	2	2	2	2	2	2	2	2	2	2	2	2	2
29	0	1	1	2	2	0	0	1	1	0	2	0	0	1	1	1	2	2	1	2	2	1	2	2	2	0	0	1	1	1	2	2	2	2	2	2	2	2	2	2	2	2	2	2	2	2	2	2	2	2	2	2	2	2	2
30	0	2	2	1	2	1	1	0	1	2	0	2	0	1	1	2	0	0	2	0	0	1	2	2	0	1	1	2	2	0	2	2	2	2	2	2	2	2	2	2	2	2	2	2	2	2	2	2	2	2	2	2	2	2	2
31	1	0	1	1	0	2	0	0	0	1	0	0	1	2	2	0	1	1	1	2	2	1	1	2	2	1	2	2	1	2	2	1	2	2	1	2	2	1	2	2	1	2	2	1	2	2	1	2	2	1	2	2	1	2	2
32	1	1	2	0	0	0	1	2	0	0	1	2	1	2	2	1	2	2	2	0	0	0	1	1	2	2	2	0	0	0	1	1	2	2	2	2	2	2	2	2	2	2	2	2	2	2	2	2	2	2	2	2	2	2	2
33	1	2	0	2	0	1	2	1	0	2	2	1	1	2	2	2	0	0	0	1	1	2	0	0	1	1	2	0	0	1	2	2	2	2	2	2	2	2	2	2	2	2	2	2	2	2	2	2	2	2	2	2	2	2	2
34	2	0	2	2	1	2	1	1	2	1	2	2	2	0	0	0	1	1	2	0	0	2	0	0	1	1	2	0	0	1	2	2	2	2	2	2	2	2	2	2	2	2	2	2	2	2	2	2	2	2	2	2	2	2	2
35	2	1	0	1	1	0	2	0	2	0	0	1	2	0	0	1	2	2	0	1	1	1	2	2	0	1	1	1	2	2	2	2	2	2	2	2	2	2	2	2	2	2	2	2	2	2	2	2	2	2	2	2	2	2	2
36	2	2	1	0	1	1	0	2	2	2	1	0	2	0	0	2	0	0	1	2	2	0	1	1	2	2	0	1	1	1	2	2	2	2	2	2	2	2	2	2	2	2	2	2	2	2	2	2	2	2	2	2	2	2	2
37	0	0	0	0	0	0	0	0	2	2	2	2	2	2	1	2	2	1	2	2	1	2	2	1	2	2	1	2	2	1	2	2	1	2	2	1	2	2	1	2	2	1	2	2	1	2	2	1	2	2	1	2	2	1	2
38	0	1	1	2	0	1	1	2	2	1	0	1	2	2	1	0	0	2	0	0	2	0	0	2	1	1	0	0	0	2	2	2	2	2	2	2	2	2	2	2	2	2	2	2	2	2	2	2	2	2	2	2	2	2	2
39	0	2	2	1	0	2	2	1	2	0	1	0	2	2	1	1	1	0	1	1	0	1	1	0	2	2	1	1	1	0	0	0	2	2	2	2	2	2	2	2	2	2	2	2	2	2	2	2	2	2	2	2	2	2	2
40	1	0	1	1	1	0	1	1	1	2	1	1	0	0	2	2	2	1	0	0	2	0	0	2	0	0	2	2	2	2	2	2	2	2	2	2	2	2	2	2	2	2	2	2	2	2	2	2	2	2	2	2	2	2	2
41	1	1	2	0	1	1	2	0	1	1	2	0	0	0	2	0	0	2	1	1	0	2	2	1	1	2	0	0	0	2	2	2	2	2	2	2	2	2	2	2	2	2	2	2	2	2	2	2	2	2	2	2	2	2	2
42	1	2	0	2	1	2	0	2	1	0	0	2	0	0	2	1	1	0	2	2	1	1	0	2	2	1	1	1	1	0	2	2	2	2	2	2	2	2	2	2	2	2	2	2	2	2	2	2	2	2	2	2	2	2	2
43	2	0	2	2	2	0	2	2	0	2	0	0	1	1	0	2	2	1	1	1	0	1	1	0	2	2	1	1	1	0	1	1	0	2	2	1	1	1	0	2	2	1	1	1	0	2	2	1	1	1	0	2	2	1	1
44	2	1	0	1	2	1	0	1	0	1	1	2	1	1	0	0	0	2	2	2	2	1	0	0	2	2	2	1	0	0	2	2	2	1	0	0	2	2	2	1	0	0	2	2	2	1	0	0	2	2	2	1	0	0	2
45	2	2	1	0	2	2	1	0	0	0	0	2	1	1	1	0	1	1	1	0	0	0	2	2	2	1	1	0	0	0	2	2	2	2	2	2	2	2	2	2	2	2	2	2	2	2	2	2	2	2	2	2	2	2	2
46	0	0	0	0	1	1	1	1	0	0	0	0	2	1	2	2	1	2	2	1	2	2	1	2	2	1	2	2	1	2	2	1	2	2	1	2	2	1	2	2	1	2	2	1	2	2	1	2	2	1	2	2	1	2	2
47	0	1	1	2	1	2	2	0	0	0	2	1	2	2	1	2	0	2	0	0	2	0	0	2	1	0	0	2	0	1	0	1	2	0	1	2	0	1	2	0	1	2	0	1	2	0	1	2	0	1	2	0	1	2	0
48	0	2	2	1	1	0	0	2	0	1	2	1	2	1	2	1	0	1	1	0	1	0	1	2	0	2	0	1	0	1	1	0	1	0	2	0	2	0	2	0	2	0	2	0	2	0	2	0	2	0	2	0	2	0	2
49	1	0	1	1	2	1	2	2	2	2	0	2	2	0	2	0	2	1	2	0	2	0	2	0	0	2	0	2	0	0	2	0	2	0	0	2	0	2	0	0	2	0	2	0	0	2	0	2	0	0	2	0	2	0	2
50	1	1	2	0	2	2	0	1	2	2	0	1	0	2	0	0	2	0	1	0	2	1	0	2	1	0	2	1	0	2	1	0	2	1	0	2	1	0	2	1	0	2	1	0	2	1	0	2	1	0	2	1	0	2	1
51	1	2	0	2	2	0	1	0	2	1	1	0	0	2	0	1	0	2	1	2	1	2	1	0	1	2	1	2	1	0	1	2	1	2	1	0	1	2	1	2	1	0	1	2	1	2	1	0	1	2	1	2	1	0	1
52	2	0	2	2	0	1	0	0	1	0	1	1	1	1	0	1	2	1	2	1	2	1	0	1	1	2	1	0	1	1	2	1	0	1	1	2	1	0	1	1	2	1	0	1	1	2	1	0	1	1	2	1	0	1	2
53	2	1	0	1	0	2	1	2	1	2	2	0	1	0	1	0	2	0	2	0	2	1	2	0	2	1	2	0	2	1	2	0	2	1	2	0	2	1	2	0	2	1	2	0	2	1	2	0	2	1	2	0	2	1	2
54	2	2	1	0	0	0	2	1	1	1	1	0	2	1	0	1	1	0	1	0	2	0	2	1	0	2	1	0	2	1	0	2	1	0	2	1	0	2	1	0	2	1	0	2	1	0	2	1	0	2	1	0	2	1	2

1 2 7 8
для N =1…9
и N =1…18
ортогональны

1
3 5 9 0
для N =1…18
с 1 2 7 8
$r_{ij\max} = 0{,}25$

1 2
1…2 5
для N = 1…27
ортогональны

2
1…5
для N =1…54
ортогональны

Таблица А9.

Последовательный многофакторный регулярный план эксперимента 5^{11}//50

№ оп.	1	2	3	4	5	6	8	7	10	9	11
1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
2	0	1	1	2	3	4	1	1	1	1	1
3	0	2	2	4	1	3	2	2	2	2	2
4	0	3	3	1	4	2	3	3	3	3	3
5	0	4	4	3	2	1	4	4	4	4	4
6	1	0	1	1	1	1	2	1	4	3	0
7	1	1	2	3	4	0	3	2	0	4	1
8	1	2	3	0	2	4	4	3	1	0	2
9	1	3	4	2	0	3	0	4	2	1	3
10	1	4	0	4	3	2	1	0	3	2	4
11	2	0	2	2	2	2	1	4	0	3	2
12	2	1	3	4	0	1	2	0	1	4	3
13	2	2	4	1	3	0	3	1	2	0	4
14	2	3	0	3	1	4	4	2	3	1	0
15	2	4	1	0	4	3	0	3	4	2	1
16	3	0	3	3	3	3	2	4	3	0	1
17	3	1	4	0	1	2	3	0	4	1	2
18	3	2	0	2	4	1	4	1	0	2	3
19	3	3	1	4	2	0	0	2	1	3	4
20	3	4	2	1	0	4	1	3	2	4	0
21	4	0	4	4	4	4	0	1	3	4	2
22	4	1	0	1	2	3	1	2	4	0	3
23	4	2	1	3	0	2	2	3	0	1	4
24	4	3	2	0	3	1	3	4	1	2	0
25	4	4	3	2	1	0	4	0	2	3	1
26	0	0	1	3	2	4	3	0	2	2	3
27	0	1	2	0	0	3	4	1	3	3	4
28	0	2	3	2	3	2	0	2	4	4	0
29	0	3	4	4	1	1	1	3	0	0	1
30	0	4	0	1	4	0	2	4	1	1	2
31	1	0	2	4	3	0	4	3	4	1	3
32	1	1	3	1	1	4	0	4	0	2	4
33	1	2	4	3	4	3	1	0	1	3	0
34	1	3	0	0	2	2	2	1	2	4	1
35	1	4	1	2	0	1	3	2	3	0	2
36	2	0	3	0	4	1	1	2	2	1	4
37	2	1	4	2	2	0	2	3	3	2	0
38	2	2	0	4	0	4	3	4	4	3	1
39	2	3	1	1	3	3	4	0	0	4	2
40	2	4	2	3	1	2	0	1	1	0	3
41	3	0	4	1	0	2	4	2	1	2	1
42	3	1	0	3	3	1	0	3	2	3	2
43	3	2	1	0	1	0	1	4	3	4	3
44	3	3	2	2	4	4	2	0	4	0	4
45	3	4	3	4	2	3	3	1	0	1	0
46	4	0	0	2	1	3	3	3	1	4	4
47	4	1	1	4	4	2	4	4	2	0	0
48	4	2	2	1	2	1	0	0	3	1	1
49	4	3	3	3	0	0	1	1	4	2	2
50	4	4	4	0	3	4	2	2	0	3	3

1 2 3 4 5 6
для $N = 1…25$
и $N = 1…50$
ортогональны

8
для $N = 1…25$
с **1 2 3 4 5 6**
$r_{ij\,max} = 0{,}2$

1
7 0
для $N = 1…25$
с **1 2 3 4 5 6**
$r_{ij\,max} = 0{,}3$

1
9 1
для $N = 1…25$
с **1 2 3 4 5 6**
$r_{ij\,max} = 0{,}4$

1
1…1
для $N = 1…50$
ортогональны

Таблица А10.

Последовательный многофакторный регулярный план эксперимента 4^{21} //64

№ оп.				1		2		2		1						1	1	1	1	1	1	1	1
	1	2	8	2	4	1	7	0	9	4	3	5	6	0	1	3	5	6	7	8	9
1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
2	1	1	1	1	1	3	0	2	3	3	0	1	0	2	0	1	1	2	3	2	0
3	2	2	3	0	2	3	0	1	1	3	0	2	0	3	1	2	2	3	2	0	1
4	3	3	2	1	3	0	0	3	2	0	0	3	0	1	1	3	3	1	1	2	1
5	0	1	3	2	1	1	0	3	0	2	1	0	1	1	3	1	1	1	2	0	1
6	1	0	2	3	0	2	0	1	3	1	1	1	1	3	3	0	0	3	1	2	1
7	2	3	0	2	3	2	0	2	1	1	1	2	1	2	2	3	3	2	0	0	0
8	3	2	1	3	2	1	0	0	2	2	1	3	1	0	2	2	2	0	3	2	0
25	0	2	2	1	3	1	1	1	3	0	2	1	3	3	2	1	2	1	0	0	0
26	1	3	3	0	2	2	1	3	0	3	2	0	3	1	2	0	3	3	3	2	0
27	2	0	1	1	1	2	1	0	2	3	2	3	3	0	3	3	0	2	2	0	1
28	3	1	0	0	0	1	1	2	1	0	2	2	3	2	3	2	1	0	1	2	1
29	0	3	1	3	2	0	1	2	3	2	3	1	2	2	1	0	3	0	2	0	1
30	1	2	0	2	3	3	1	0	0	1	3	0	2	0	1	1	2	2	1	2	1
31	2	1	2	3	0	3	1	3	2	1	3	3	2	1	0	2	1	3	0	0	0
32	3	0	3	2	1	0	1	1	1	2	3	2	2	3	0	3	0	1	3	2	0
33	0	0	2	2	2	1	2	2	2	3	0	2	2	1	3	0	2	2	1	3	0
34	1	1	3	3	3	2	2	0	1	0	0	3	2	3	3	1	3	0	2	1	0
35	2	2	1	2	0	2	2	3	3	0	0	0	2	2	2	2	0	1	3	3	1
36	3	3	0	3	1	1	2	1	0	3	0	1	2	0	2	3	1	3	0	1	1
37	0	1	1	0	3	0	2	1	2	1	1	2	3	0	0	1	3	3	3	3	1
38	1	0	0	1	2	3	2	3	1	2	1	3	3	2	0	0	2	1	0	1	1
39	2	3	2	0	1	3	2	0	3	2	1	0	3	3	1	3	1	0	1	3	0
40	3	2	3	1	0	0	2	2	0	1	1	1	3	1	1	2	0	2	2	1	0
57	0	2	0	3	1	0	3	3	1	3	2	3	1	2	1	1	0	3	1	3	0
58	1	3	1	2	0	3	3	1	2	0	2	2	1	0	1	0	1	1	2	1	0
59	2	0	3	3	3	3	3	2	0	0	2	1	1	1	0	3	2	0	3	3	1
60	3	1	2	2	2	0	3	0	3	3	2	0	1	3	0	2	3	2	0	1	1
61	0	3	3	1	0	1	3	0	1	1	3	3	0	3	2	0	1	2	3	3	1
62	1	2	2	0	1	2	3	2	2	2	3	2	0	1	2	1	0	0	0	1	1
63	2	1	0	1	2	2	3	1	0	2	3	1	0	0	3	2	3	1	1	3	0
64	3	0	1	0	3	1	3	3	3	1	3	0	0	2	3	3	2	3	2	1	0
9	0	2	3	1	2	2	0	1	2	1	2	0	2	2	0	3	1	0	1	1	2
10	1	3	2	0	3	1	0	3	1	2	2	1	2	0	0	2	0	2	2	3	2
11	2	0	0	1	0	1	0	0	3	2	2	2	2	1	1	1	3	3	3	1	3
12	3	1	1	0	1	2	0	2	0	1	2	3	2	3	1	0	2	1	0	3	3
13	0	3	0	3	3	3	0	2	2	3	3	0	3	3	3	2	0	1	3	1	3
14	1	2	1	2	2	0	0	0	1	0	3	1	3	1	3	3	1	3	0	3	3
15	2	1	3	3	1	0	0	3	3	0	3	2	3	0	2	0	2	2	1	1	2
16	3	0	2	2	0	3	0	1	0	3	3	3	3	2	2	1	3	0	2	3	2
17	0	0	1	0	1	3	1	0	1	1	0	1	1	1	2	2	3	1	1	1	2
18	1	1	0	1	0	0	1	2	2	2	0	0	1	3	2	3	2	3	2	3	2
19	2	2	2	0	3	0	1	1	0	2	0	3	1	2	3	0	1	2	3	1	3
20	3	3	3	1	2	3	1	3	3	1	0	2	1	0	3	1	0	0	0	3	3
21	0	1	2	2	0	2	1	3	1	3	1	1	0	0	1	3	2	0	3	1	3
22	1	0	3	3	1	1	1	1	2	0	1	0	0	2	1	2	3	2	0	3	3
23	2	3	1	2	2	1	1	2	0	0	1	3	0	3	0	1	0	3	1	1	2
24	3	2	0	3	3	2	1	0	3	3	1	2	0	1	0	0	1	1	2	3	2
41	0	2	1	3	0	3	2	3	0	2	2	2	0	3	3	3	3	2	0	2	2
42	1	3	0	2	1	0	2	1	3	1	2	3	0	1	3	2	2	0	3	0	2
43	2	0	2	3	2	0	2	2	1	1	2	0	0	0	2	1	1	1	2	2	3
44	3	1	3	2	3	3	2	0	2	2	2	1	0	2	2	0	0	3	1	0	3
45	0	3	2	1	1	2	2	0	0	0	3	2	1	2	0	2	2	3	2	2	3
46	1	2	3	0	0	1	2	2	3	3	3	3	1	0	0	3	3	1	1	0	3
47	2	1	1	1	3	1	2	1	1	3	3	0	1	1	1	0	0	0	0	2	2
48	3	0	0	0	2	2	2	3	2	0	3	1	1	3	1	1	1	2	3	0	2
49	0	0	3	2	3	2	3	2	3	2	0	3	3	0	1	2	1	3	0	2	2
50	1	1	2	3	2	1	3	0	0	1	0	2	3	2	1	3	0	1	3	0	2
51	2	2	0	2	1	1	3	3	2	1	0	1	3	3	0	0	3	0	2	2	3
52	3	3	1	3	0	2	3	1	1	2	0	0	3	1	0	1	2	2	1	0	3
53	0	1	0	0	2	3	3	1	3	0	1	3	2	1	2	3	0	2	2	2	3
54	1	0	1	1	3	0	3	3	0	3	1	2	2	3	2	2	1	0	1	0	3
55	2	3	3	0	0	0	3	0	2	3	1	1	2	2	3	1	2	1	0	2	2
56	3	2	2	1	1	3	3	2	1	0	1	0	2	0	3	0	3	3	3	0	2

1
1282
для $N = 1…8$, 25…32
ортогональны

2
41
для $N = 1…8$, 25…32
с 12
$r_{ijmax} = 0{,}45$

1 2 2
12824170
для $N = 1…8$, 25…40 57…64
ортогональны

1
94
N=25…40, 1…8, 57…64
с предшеству-ющ.
$r_{ijmax} = 0{,}45$

2
1…1
для $N = 1…64$
ортогональны

Таблица А 11.

Многофакторный регулярный план эксперимента $4^{16}x16^{1}$//64

№ оп.	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17
1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
2	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	0
3	2	2	2	2	2	2	2	2	2	2	2	2	2	2	2	2	0
4	3	3	3	3	3	3	3	3	3	3	3	3	3	3	3	3	0
5	0	1	3	2	0	1	3	2	0	1	3	2	0	1	3	2	1
6	1	0	2	3	1	0	2	3	1	0	2	3	1	0	2	3	1
7	2	3	1	0	2	3	1	0	2	3	1	0	2	3	1	0	1
8	3	2	0	1	3	2	0	1	3	2	0	1	3	2	0	1	1
9	0	2	1	3	0	2	1	3	0	2	1	3	0	2	1	3	2
10	1	3	0	2	1	3	0	2	1	3	0	2	1	3	0	2	2
11	2	0	3	1	2	0	3	1	2	0	3	1	2	0	3	1	2
12	3	1	2	0	3	1	2	0	3	1	2	0	3	1	2	0	2
13	0	3	2	1	0	3	2	1	0	3	2	1	0	3	2	1	3
14	1	2	3	0	1	2	3	0	1	2	3	0	1	2	3	0	3
15	2	1	0	3	2	1	0	3	2	1	0	3	2	1	0	3	3
16	3	0	1	2	3	0	1	2	3	0	1	2	3	0	1	2	3
17	0	0	0	0	1	1	1	1	3	3	3	3	2	2	2	2	4
18	1	1	1	1	0	0	0	0	2	2	2	2	3	3	3	3	4
19	2	2	2	2	3	3	3	3	1	1	1	1	0	0	0	0	4
20	3	3	3	3	2	2	2	2	0	0	0	0	1	1	1	1	4
21	0	1	3	2	1	0	2	3	3	2	0	1	2	3	1	0	5
22	1	0	2	3	0	1	3	2	2	3	1	0	3	2	0	1	5
23	2	3	1	0	3	2	0	1	1	0	2	3	0	1	3	2	5
24	3	2	0	1	2	3	1	0	0	1	3	2	1	0	2	3	5
25	0	2	1	3	1	3	0	2	3	1	2	0	2	0	3	1	6
26	1	3	0	2	0	2	1	3	2	0	3	1	3	1	2	0	6
27	2	0	3	1	3	1	2	0	1	3	0	2	0	2	1	3	6
28	3	1	2	0	2	0	3	1	0	2	1	3	1	3	0	2	6
29	0	3	2	1	1	2	3	0	3	0	1	2	2	1	0	3	7
30	1	2	3	0	0	3	2	1	2	1	0	3	3	0	1	2	7
31	2	1	0	3	3	0	1	2	1	2	3	0	0	3	2	1	7
32	3	0	1	2	2	1	0	3	0	3	2	1	1	2	3	0	7

№ оп.	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17
33	0	0	0	0	2	2	2	2	1	1	1	1	3	3	3	3	8
34	1	1	1	1	3	3	3	3	0	0	0	0	2	2	2	2	8
35	2	2	2	2	0	0	0	0	3	3	3	3	1	1	1	1	8
36	3	3	3	3	1	1	1	1	2	2	2	2	0	0	0	0	8
37	0	1	3	2	2	3	1	0	1	0	2	3	3	2	0	1	9
38	1	0	2	3	3	2	0	1	0	1	3	2	2	3	1	0	9
39	2	3	1	0	0	1	3	2	3	2	0	1	1	0	2	3	9
40	3	2	0	1	1	0	2	3	2	3	1	0	0	1	3	2	9
41	0	2	1	3	2	0	3	1	1	3	0	2	3	1	2	0	10
42	1	3	0	2	3	1	2	0	0	2	1	3	2	0	3	1	10
43	2	0	3	1	0	2	1	3	3	1	2	0	1	3	0	2	10
44	3	1	2	0	1	3	0	2	2	0	3	1	0	2	1	3	10
45	0	3	2	1	2	1	0	3	1	2	3	0	3	0	1	2	11
46	1	2	3	0	3	0	1	2	0	3	2	1	2	1	0	3	11
47	2	1	0	3	0	3	2	1	3	0	1	2	1	2	3	0	11
48	3	0	1	2	1	2	3	0	2	1	0	3	0	3	2	1	11
49	0	0	0	0	3	3	3	3	2	2	2	2	1	1	1	1	12
50	1	1	1	1	2	2	2	2	3	3	3	3	0	0	0	0	12
51	2	2	2	2	1	1	1	1	0	0	0	0	3	3	3	3	12
52	3	3	3	3	0	0	0	0	1	1	1	1	2	2	2	2	12
53	0	1	3	2	3	2	0	1	2	3	1	0	1	0	2	3	13
54	1	0	2	3	2	3	1	0	3	2	0	1	0	1	3	2	13
55	2	3	1	0	1	0	2	3	0	1	3	2	3	2	0	1	13
56	3	2	0	1	0	1	3	2	1	0	2	3	2	3	1	0	13
57	0	2	1	3	3	1	2	0	2	0	3	1	1	3	0	2	14
58	1	3	0	2	2	0	3	1	3	1	2	0	0	2	1	3	14
59	2	0	3	1	1	3	0	2	0	2	1	3	3	1	2	0	14
60	3	1	2	0	0	2	1	3	1	3	0	2	2	0	3	1	14
61	0	3	2	1	3	0	1	2	2	1	0	3	1	2	3	0	15
62	1	2	3	0	2	1	0	3	3	0	1	2	0	3	2	1	15
63	2	1	0	3	1	2	3	0	0	3	2	1	3	0	1	2	15
64	3	0	1	2	0	3	2	1	1	2	3	0	2	1	0	3	15

Все столбцы для $N = 1.. .64$ ортогональны друг к другу

Приложение Б

КАТАЛОГ ЛП$_\tau$ РАВНОМЕРНО РАСПРЕДЕЛЕННЫХ ПОСЛЕДОВАТЕЛЬНОСТЕЙ

ЛП$_\tau$ равномерно распределенные последовательности (ЛП$_\tau$ р. р. п.) используются при решении следующих задач.

1. Многокритериальная компромиссная оптимизация систем, объектов, процессов.

Исходными данными могут быть результаты физического эксперимента; данные, полученные с помощью моделирующего алгоритма; результаты, полученные методом статистических испытаний (метод Монте-Карло); экспертные оценки; трудоемкие, а, следовательно, ограниченные по числу, результаты вычислений на ЭВМ.

2. Приближенное вычисление многомерных интегралов.

3. Зондирование многомерного факторного пространства с целью исследования его свойств.

4. Получение многофакторных квазиортогональных планов экспериментов.

5. Использование для генерирования квазирегулярных многофакторных планов экспериментов.

В каталоге приведены значения равномерно распределенных последовательностей ξ_{iu} $(1 \le i \le k;\ 1 \le u \le N)$ для $k = 12$ и $N = 128$ на единичном кубе со сторонами [0, 1].

При использовании ЛП$_\tau$ р. р. п. число уровней каждого из факторов будет равно числу опытов, т. е. $s_i = N$.

ЛП$_\tau$ р. р. п. характеризуются следующими замечательными свойствами: проекции N точек в k-мерном пространстве на любую $(k\text{-}j)$-мерную грань $(1 \le j \le k\text{-}1)$ многомерного единичного куба образуют также равномерно распределенные последовательности и, следовательно, содержат N проекций точек. При числе точек 2^n-1 $(n = 1, 2, 3, 4, \ldots)$ проекции их на любые из ребер k-мерного куба расположены строго равномерно. Можно использовать произвольное число точек, т. е. $N \neq 2^n$ -1.

Переход от значений ξ_{iu}, т. е. кодированных значений, к натуральным значениям уровней непрерывных факторов $\tilde{x}_{iu}$ осуществляется по формуле

$$\tilde{x}_{iu} = \tilde{x}_{i\min} + \xi_{iu}\left(\tilde{x}_{i\max} - \tilde{x}_{i\min}\right),$$

где $\tilde{x}_{iu}$ - натуральное значение i-го фактора в u-той пробной точке многомерного факторного пространства;

$\tilde{x}_{i\min}, \tilde{x}_{i\max}$ - минимальное и максимальное натуральные значения *i*-го фактора в решаемой задаче.

Если фактор дискретный или качественный, то выбор каждого уровня для фактора представляется точками, которые попали в следующие подинтервалы:

$$(\underbrace{0,\ 1/s_i}_{1};\ \underbrace{1/s_i,\ 2/s_i}_{2};\ \underbrace{\ldots}_{\ldots};\ \underbrace{s_i-1/s_i,\ 1}_{s_i}),$$

где s_i - число уровней по *i*-му дискретному или качественному фактору.

Теория получения и прикладные вопросы использования $ЛП_\tau$ р. р. п. рассмотрены авторами Соболь И.М., Статников Р.Б. в книге «Выбор оптимальных параметров в задачах со многими критериями».М. Наука 1981 и др.

Таблица 1Б.

Матрица плана эксперимента ЛП$_\tau$ равномерно распределенных последовательностей в кодированных значениях ξ_i для $k = 12$, $N = 128$

№ опыта	ξ_1	ξ_2	ξ_3	ξ_4	ξ_5	ξ_6
1	**2**	**3**	**4**	**5**	**6**	**7**
1	0,5	0,5	0,5	0,5	0,5	0,5
2	0,25	0,75	0,25	0,75	0,25	0,75
3	0,75	0,25	0,75	0,25	0,75	0,25
4	0,125	0,625	0,875	0,875	0,625	0,125
5	0,625	0,125	0,375	0,375	0,125	0,625
6	0,375	0,375	0,625	0,125	0,875	0,875
7	0,875	0,875	0,125	0,625	0,375	0,375
8	0,0625	0,9375	0,6875	0,3125	0,1875	0,0625
9	0,5625	0,4375	0,1875	0,8125	0,6875	0,5625
10	0,3125	0,1875	0,9375	0,5625	0,4375	0,8125
11	0,8125	0,6875	0,4375	0,0625	0,9375	0,3125
12	0,1875	0,3125	0,3125	0,6875	0,5625	0,1875
13	0,6875	0,8125	0,8125	0,1875	0,0625	0,6875
14	0,4375	0,5625	0,0625	0,4375	0,8125	0,9375
15	0,9375	0,0625	0,5625	0,9375	0,3125	0,4375
16	0,03125	0,53125	0,40625	0,21875	0,46875	0,28125
17	0,53125	0,03125	0,90625	0,71875	0,96875	0,78125
18	0,28125	0,28125	0,15625	0,96875	0,21875	0,53125
19	0,78125	0,78125	0,65625	0,46875	0,71875	0,03125
20	0,15625	0,15625	0,53125	0,84375	0,84375	0,40625
21	0,65625	0,65625	0,03125	0,34375	0,34375	0,90625
22	0,40625	0,90625	0,78125	0,09375	0,59375	0,65625
23	0,90625	0,40625	0,28125	0,59375	0,09375	0,15625
24	0,09375	0,46875	0,84375	0,40625	0,28125	0,34375
25	0,59375	0,96875	0,34375	0,90625	0,78125	0,84375
26	0,34375	0,71875	0,59375	0,65625	0,03125	0,59375
27	0,84375	0,21875	0,09375	0,15625	0,53125	0,09375
28	0,21875	0,84375	0,21875	0,53125	0,90625	0,46875
29	0,71875	0,34375	0,71875	0,03125	0,40625	0,96875
30	0,46875	0,09375	0,46875	0,28125	0,65625	0,71875
31	0,96875	0,59375	0,96875	0,78125	0,15625	0,21875
32	0,015625	0,79688	0,95313	0,67188	0,79688	0,92188
33	0,51563	0,29688	0,45313	0,17188	0,29688	0,42188
34	0,26563	0,046875	0,70313	0,42188	0,54688	0,17188
35	0,76563	0,54688	0,20313	0,92188	0,046875	0,67188

Продолжение табл. 1Б

1	2	3	4	5	6	7
36	0,14063	0,42188	0,078125	0,29688	0,42188	0,79688
37	0,64063	0,92188	0,57813	0,79688	0,92188	0,29688
38	0,39063	0,67188	0,32813	0,54688	0,17188	0,046875
39	0,89063	0,17188	0,82813	0,046875	0,67188	0,54688
40	0,078125	0,23438	0,26563	0,98438	0,98438	0,98438
41	0,57813	0,73438	0,76563	0,48438	0,48438	0,48438
42	0,32813	0,98438	0,015625	0,23438	0,73438	0,23438
43	0,82813	0,48438	0,51563	0,73438	0,23438	0,73438
44	0,20313	0,60938	0,64063	0,10938	0,35938	0,85938
45	0,70313	0,10938	0,14063	0,60938	0,85938	0,35938
46	0,45313	0,35938	0,89063	0,85938	0,10938	0,10938
47	0,95313	0,85938	0,39063	0,35938	0,60938	0,60938
48	0,046875	0,26563	0,60938	0,57813	0,70313	0,64063
49	0,54688	0,76563	0,10938	0,078125	0,20313	0,14063
50	0,29688	0,51563	0,85938	0,32813	0,95313	0,39063
51	0,79688	0,015625	0,35938	0,82813	0,45313	0,89063
52	0,17188	0,89063	0,48438	0,45313	0,078125	0,51563
53	0,67188	0,39063	0,98438	0,95313	0,57813	0,015625
54	0,42188	0,14063	0,23438	0,70313	0,32813	0,26563
55	0,92188	0,64063	0,73438	0,20313	0,82813	0,76563
56	0,10938	0,70313	0,17188	0,76563	0,51563	0,70313
57	0,60938	0,20313	0,67188	0,26563	0,015625	0,20313
58	0,35938	0,45313	0,42188	0,015625	0,76563	0,45313
59	0,85938	0,95313	0,92188	0,51563	0,26563	0,95313
60	0,23438	0,078125	0,79688	0,14063	0,14063	0,57813
61	0,73438	0,57813	0,29688	0,64063	0,64063	0,078125
62	0,48438	0,82813	0,54688	0,89063	0,39063	0,32813
63	0,98438	0,32813	0,046875	0,39063	0,89063	0,82813
64	0,0078125	0,66406	0,52344	0,38281	0,97656	0,19531
65	0,50781	0,16406	0,023438	0,88281	0,47656	0,69531
66	0,25781	0,41406	0,77344	0,63281	0,72656	0,94531
67	0,75781	0,91406	0,27344	0,13281	0,22656	0,44531
68	0,13281	0,039063	0,39844	0,50781	0,35156	0,070313
69	0,63281	0,53906	0,89844	0,0078125	0,85156	0,57031
70	0,38281	0,78906	0,14844	0,25781	0,10156	0,82031
71	0,88281	0,28906	0,64844	0,75781	0,60156	0,32031
72	0,070313	0,35156	0,21094	0,19531	0,78906	0,13281
73	0,57031	0,85156	0,71094	0,69531	0,28906	0,63281
74	0,32031	0,60156	0,46094	0,94531	0,53906	0,88281
75	0,82031	0,10156	0,96094	0,44531	0,039063	0,38281
76	0,19531	0,97656	0,83594	0,82031	0,41406	0,0078125
77	0,69531	0,47656	0,33594	0,32031	0,91406	0,50781
78	0,44531	0,22656	0,58594	0,070313	0,16406	0,75781
79	0,94531	0,72656	0,085938	0,57031	0,66406	0,25781
80	0,039063	0,13281	0,92969	0,35156	0,50781	0,47656
81	0,53906	0,63281	0,42969	0,85156	0,0078125	0,97656

Продолжение табл. 1Б

1	2	3	4	5	6	7
82	0,28906	0,88281	0,67969	0,60156	0,75781	0,72656
83	0,78906	0,38281	0,17969	0,10156	0,25781	0,22656
84	0,16406	0,50781	0,054688	0,72656	0,13281	0,35156
85	0,66406	0,0078125	0,55469	0,22656	0,63281	0,85156
86	0,41406	0,25781	0,30469	0,47656	0,38281	0,60156
87	0,91406	0,75781	0,80469	0,97656	0,88281	0,10156
88	0,10156	0,82031	0,36719	0,039063	0,69531	0,41406
89	0,60156	0,32031	0,86719	0,53906	0,19531	0,91406
90	0,35156	0,070313	0,11719	0,78906	0,94531	0,66406
91	0,85156	0,57031	0,61719	0,28906	0,44531	0,16406
92	0,22656	0,44531	0,74219	0,91406	0,070313	0,28906
93	0,72656	0,94531	0,24219	0,41406	0,57031	0,78906
94	0,47656	0,69531	0,99219	0,16406	0,32031	0,53906
95	0,97656	0,19531	0,49219	0,66406	0,82031	0,039063
96	0,023438	0,39844	0,44531	0,80469	0,21094	0,86719
97	0,52344	0,89844	0,94531	0,30469	0,71094	0,36719
98	0,27344	0,64844	0,19531	0,054688	0,46094	0,11719
99	0,77344	0,14844	0,69531	0,55469	0,96094	0,61719
100	0,14844	0,77344	0,57031	0,17969	0,58594	0,99219
101	0,64844	0,27344	0,070313	0,67969	0,085938	0,49219
102	0,39844	0,023438	0,82031	0,92969	0,83594	0,24219
103	0,89844	0,52344	0,32031	0,42969	0,33594	0,74219
104	0,085938	0,58594	0,75781	0,61719	0,023438	0,80469
105	0,58594	0,085938	0,25781	0,11719	0,52344	0,30469
106	0,33594	0,33594	0,50781	0,36719	0,27344	0,054688
107	0,83594	0,83594	0,0078125	0,86719	0,77344	0,55469
108	0,21094	0,21094	0,13281	0,49219	0,64844	0,92969
109	0,71094	0,71094	0,63281	0,99219	0,14844	0,42969
110	0,46094	0,96094	0,38281	0,74219	0,89844	0,17969
111	0,96094	0,46094	0,88281	0,24219	0,39844	0,67969
112	0,054688	0,92969	0,10156	0,96094	0,30469	0,58594
113	0,55469	0,42969	0,60156	0,46094	0,80469	0,085938
114	0,30469	0,17969	0,35156	0,21094	0,054688	0,33594
115	0,80469	0,67969	0,85156	0,71094	0,55469	0,83594
116	0,17969	0,30469	0,97656	0,085938	0,92969	0,71094
117	0,67969	0,80469	0,47656	0,58594	0,42969	0,21094
118	0,42969	0,55469	0,72656	0,83594	0,67969	0,46094
119	0,92969	0,054688	0,22656	0,33594	0,17969	0,96094
120	0,11719	0,11719	0,66406	0,64844	0,49219	0,52344
121	0,61719	0,61719	0,16406	0,14844	0,99219	0,023438
122	0,36719	0,86719	0,91406	0,39844	0,24219	0,27344
123	0,86719	0,36719	0,41406	0,89844	0,74219	0,77344
124	0,24219	0,74219	0,28906	0,27344	0,86719	0,64844
125	0,74219	0,24219	0,78906	0,77344	0,36719	0,14844
126	0,49219	0,49219	0,039063	0,52344	0,61719	0,39844
127	0,99219	0,99219	0,53906	0,023438	0,11719	0,89844
128	0,0039063	0,99609	0,30859	0,57422	0,55078	0,34766

Продолжение табл. 1Б

№ опыта	ξ_7	ξ_8	ξ_9	ξ_{10}	ξ_{11}	ξ_{12}
1	**8**	**9**	**10**	**11**	**12**	**13**
1	0,5	0,5	0,5	0,5	0,5	0,5
2	0,25	0,75	0,75	0,25	0,75	0,25
3	0,75	0,25	0,25	0,75	0,25	0,75
4	0,375	0,375	0,875	0,625	0,625	0,875
5	0,875	0,875	0,375	0,125	0,125	0,375
6	0,125	0,625	0,125	0,875	0,375	0,625
7	0,625	0,125	0,625	0,375	0,875	0,125
8	0,4375	0,5625	0,8125	0,6875	0,0625	0,1875
9	0,9375	0,0625	0,3125	0,1875	0,5625	0,6875
10	0,1875	0,3125	0,0625	0,9375	0,8125	0,4375
11	0,6875	0,8125	0,5625	0,4375	0,3125	0,9375
12	0,0625	0,9375	0,1875	0,0625	0,6875	0,8125
13	0,5625	0,4375	0,6875	0,5625	0,1875	0,3125
14	0,3125	0,1875	0,9375	0,3125	0,4375	0,5625
15	0,8125	0,6875	0,4375	0,8125	0,9375	0,0625
16	0,96875	0,28125	0,09375	0,84375	0,46875	0,90625
17	0,46875	0,78125	0,59375	0,34375	0,96875	0,40625
18	0,71875	0,53125	0,84375	0,59375	0,71875	0,65625
19	0,21875	0,03125	0,34375	0,09375	0,21875	0,15625
20	0,59375	0,15625	0,96875	0,46875	0,84375	0,03125
21	0,09375	0,65625	0,46875	0,96875	0,34375	0,53125
22	0,84375	0,90625	0,21875	0,21875	0,09375	0,28125
23	0,34375	0,40625	0,71875	0,71875	0,59375	0,78125
24	0,53125	0,84375	0,78125	0,40625	0,40625	0,84375
25	0,03125	0,34375	0,28125	0,90625	0,90625	0,34375
26	0,78125	0,09375	0,03125	0,15625	0,65625	0,59375
27	0,28125	0,59375	0,53125	0,65625	0,15625	0,09375
28	0,90625	0,71875	0,15625	0,78125	0,78125	0,21875
29	0,40625	0,21875	0,65625	0,28125	0,28125	0,71875
30	0,65625	0,46875	0,90625	0,53125	0,03125	0,46875
31	0,15625	0,96875	0,40625	0,03125	0,53125	0,96875
32	0,73438	0,89063	0,54688	0,82813	0,29688	0,79688
33	0,23438	0,39063	0,046875	0,32813	0,79688	0,29688
34	0,98438	0,14063	0,29688	0,57813	0,54688	0,54688
35	0,48438	0,64063	0,79688	0,078125	0,046875	0,046875
36	0,85938	0,51563	0,42188	0,45313	0,92188	0,17188
37	0,35938	0,015625	0,92188	0,95313	0,42188	0,67188
38	0,60938	0,26563	0,67188	0,20313	0,17188	0,42188
39	0,10938	0,76563	0,17188	0,70313	0,67188	0,92188
40	0,79688	0,45313	0,35938	0,39063	0,35938	0,98438
41	0,29688	0,95313	0,85938	0,89063	0,85938	0,48438
42	0,54688	0,70313	0,60938	0,14063	0,60938	0,73438
43	0,046875	0,20313	0,10938	0,64063	0,10938	0,23438
44	0,67188	0,078125	0,73438	0,76563	0,98438	0,10938

Продолжение табл. 1Б

1	8	9	10	11	12	13
45	0,17188	0,57813	0,23438	0,26563	0,48438	0,60938
46	0,92188	0,82813	0,48438	0,51563	0,23438	0,35938
47	0,42188	0,32813	0,98438	0,015625	0,73438	0,85938
48	0,26563	0,67188	0,57813	0,046875	0,20313	0,14063
49	0,76563	0,17188	0,078125	0,54688	0,70313	0,64063
50	0,015625	0,42188	0,32813	0,29688	0,95313	0,39063
51	0,51563	0,92188	0,82813	0,79688	0,45313	0,89063
52	0,14063	0,79688	0,45313	0,67188	0,57813	0,76563
53	0,64063	0,29688	0,95313	0,17188	0,078125	0,26563
54	0,39063	0,046875	0,70313	0,92188	0,32813	0,51563
55	0,89063	0,54688	0,20313	0,42188	0,82813	0,015625
56	0,20313	0,23438	0,26563	0,73438	0,14063	0,078125
57	0,70313	0,73438	0,76563	0,23438	0,64063	0,57813
58	0,45313	0,98438	0,51563	0,98438	0,89063	0,32813
59	0,95313	0,48438	0,015625	0,48438	0,39063	0,82813
60	0,32813	0,35938	0,64063	0,10938	0,51563	0,95313
61	0,82813	0,85938	0,14063	0,60938	0,015625	0,45313
62	0,078125	0,60938	0,39063	0,35938	0,26563	0,70313
63	0,57813	0,10938	0,89063	0,85938	0,76563	0,20313
64	0,85156	0,33594	0,69531	0,53906	0,88281	0,36719
65	0,35156	0,83594	0,19531	0,039063	0,38281	0,86719
66	0,60156	0,58594	0,44531	0,78906	0,13281	0,11719
67	0,10156	0,085938	0,94531	0,28906	0,63281	0,61719
68	0,72656	0,21094	0,32031	0,16406	0,25781	0,74219
69	0,22656	0,71094	0,82031	0,66406	0,75781	0,24219
70	0,97656	0,96094	0,57031	0,41406	0,50781	0,99219
71	0,47656	0,46094	0,070313	0,91406	0,0078125	0,49219
72	0,66406	0,77344	0,38281	0,22656	0,94531	0,42969
73	0,16406	0,27344	0,88281	0,72656	0,44531	0,92969
74	0,91406	0,023438	0,63281	0,47656	0,19531	0,17969
75	0,41406	0,52344	0,13281	0,97656	0,69531	0,67969
76	0,78906	0,64844	0,50781	0,60156	0,32031	0,55469
77	0,28906	0,14844	0,0078125	0,10156	0,82031	0,054688
78	0,53906	0,39844	0,25781	0,85156	0,57031	0,80469
79	0,039063	0,89844	0,75781	0,35156	0,070313	0,30469
80	0,13281	0,11719	0,66406	0,32031	0,60156	0,71094
81	0,63281	0,61719	0,16406	0,82031	0,10156	0,21094
82	0,38281	0,86719	0,41406	0,070313	0,35156	0,96094
83	0,88281	0,36719	0,91406	0,57031	0,85156	0,46094
84	0,25781	0,49219	0,28906	0,94531	0,22656	0,33594
85	0,75781	0,99219	0,78906	0,44531	0,72656	0,83594
86	0,0078125	0,74219	0,53906	0,69531	0,97656	0,085938
87	0,50781	0,24219	0,039063	0,19531	0,47656	0,58594
88	0,32031	0,55469	0,47656	0,88281	0,53906	0,52344
89	0,82031	0,054688	0,97656	0,38281	0,039063	0,023438

Продолжение табл. 1Б

1	8	9	10	11	12	13
90	0,070313	0,30469	0,72656	0,63281	0,28906	0,77344
91	0,57031	0,80469	0,22656	0,13281	0,78906	0,27344
92	0,19531	0,92969	0,60156	0,25781	0,16406	0,39844
93	0,69531	0,42969	0,10156	0,75781	0,66406	0,89844
94	0,44531	0,17969	0,35156	0,0078125	0,91406	0,14844
95	0,94531	0,67969	0,85156	0,50781	0,41406	0,64844
96	0,39844	0,69531	0,24219	0,36719	0,67969	0,57031
97	0,89844	0,19531	0,74219	0,86719	0,17969	0,070313
98	0,14844	0,44531	0,99219	0,11719	0,42969	0,82031
99	0,64844	0,94531	0,49219	0,61719	0,92969	0,32031
100	0,023438	0,82031	0,86719	0,99219	0,054688	0,44531
101	0,52344	0,32031	0,36719	0,49219	0,55469	0,94531
102	0,27344	0,070313	0,11719	0,74219	0,80469	0,19531
103	0,77344	0,57031	0,61719	0,24219	0,30469	0,69531
104	0,085938	0,13281	0,92969	0,92969	0,74219	0,63281
105	0,58594	0,63281	0,42969	0,42969	0,24219	0,13281
106	0,33594	0,88281	0,17969	0,67969	0,49219	0,88281
107	0,83594	0,38281	0,67969	0,17969	0,99219	0,38281
108	0,46094	0,25781	0,054688	0,30469	0,11719	0,25781
109	0,96094	0,75781	0,55469	0,80469	0,61719	0,75781
110	0,21094	0,50781	0,80469	0,054688	0,86719	0,0078125
111	0,71094	0,0078125	0,30469	0,55469	0,36719	0,50781
112	0,61719	0,97656	0,14844	0,52344	0,83594	0,47656
113	0,11719	0,47656	0,64844	0,023438	0,33594	0,97656
114	0,86719	0,22656	0,89844	0,77344	0,085938	0,22656
115	0,36719	0,72656	0,39844	0,27344	0,58594	0,72656
116	0,99219	0,60156	0,77344	0,14844	0,46094	0,60156
117	0,49219	0,10156	0,27344	0,64844	0,96094	0,10156
118	0,74219	0,35156	0,023438	0,39844	0,71094	0,85156
119	0,24219	0,85156	0,52344	0,89844	0,21094	0,35156
120	0,92969	0,41406	0,96094	0,21094	0,77344	0,28906
121	0,42969	0,91406	0,46094	0,71094	0,27344	0,78906
122	0,67969	0,66406	0,21094	0,46094	0,023438	0,039063
123	0,17969	0,16406	0,71094	0,96094	0,52344	0,53906
124	0,55469	0,039063	0,085938	0,58594	0,39844	0,66406
125	0,054688	0,53906	0,58594	0,085938	0,89844	0,16406
126	0,80469	0,78906	0,83594	0,83594	0,64844	0,91406
127	0,30469	0,28906	0,33594	0,33594	0,14844	0,41406
128	0,67578	0,16797	0,035156	0,097656	0,44922	0,37891

Приложение В

КРАТКИЙ СЛОВАРЬ МАТЕМАТИЧЕСКИХ ТЕРМИНОВ

В кратком словаре математических терминов приведено более 280 терминов, наиболее часто употребляемых в настоящей работе. Принята алфавитно-гнездовая система расположения терминов. Термины, состоящие из одного слова, и ведущие слова гнезд располагаются в общем алфавитном порядке. Если термины представляют собой словосочетания и состоят из двух или более слов, то они группируются вокруг существительного в именительном падеже и образуют гнездо. Это слово называется ведущим словом гнезда. В гнезде словосочетания располагаются по алфавиту. В словосочетаниях используется порядок слов, принятый в научной и технической литературе. Ведущее слово ставится в начале гнезда, а в гнезде заменяется первой буквой с точкой и в алфавите не учитывается.

Например:

КООРДИНАТЫ *ж мн.*
криволинейные К.
криволинейные К. в пространстве.
К. нулевой точки.
прямолинейные К.
прямоугольные К.

В словах указывается род и число существительного: *м* - мужской род; *ж* - женский род; *с* - средний род; *мн* - множественное число.

Толкование терминов дается краткое.

Некоторые термины в словах или словосочетаниях имеют несколько значений. В этом случае к ним даются несколько толкований, разделенных арабскими цифрами.

Например:

МОДЕЛЬ *ж.* 1. Аналог явления, сохраняющий его существенные черты и служащий для его изучения. 2. Интерпретация формального языка. 3. Алгебраическая система, в которой определены только отношения, а множество операций пусто.

Синонимы даются со ссылкой *(см.)* на более употребительный термин. Причем слово, на которое сделана ссылка, набрано прописными буквами.

Например:

ОПЕРАЦИЯ *ж. см. алгебраическая ОПЕРАЦИЯ.*
ОЦЕНКА *ж. см. ОЦЕНКА параметра.*

АВТОМОРФИЗМ *м.* Изоморфизм некоторой системы объектов на себя.

АДЕКВАТНОСТЬ *ж* **уравнения регрессии.** Соответствие уравнения регрессии опытным данным. Обычно соответствие оценивают в пределах ошибки воспроизводимости с использованием F-критерия Фишера.

АЛГОРИТМ *м.* 1. Точное формальное предписание, однозначно определяющее содержание и последовательность операций, переводящих заданную совокупность исходных данных в искомый результат. 2. Конечный текст, записанный на алгоритмическом языке. Первоначально сугубо математическое понятие алгоритма в настоящее время расширено. Допускается включение в алгоритм и указаний в словесной форме, которые правильно понимаются и выполняются исследователями.

АЛЬФА (α). Величина ошибки первого рода или вероятность неприятия истинной гипотезы.

АНАЛИЗ *м.*

дисперсионный А. В математике, статистический метод выявления влияния отдельных факторов на результат эксперимента. Предложен английским статистиком Р. Фишером в 1925 г.; применяется при анализе самых разнообразных экспериментов.

регрессионный А. Совокупность методов исследования регрессионной зависимости между величинами по статистическим данным.

АППРОКСИМАЦИЯ *ж.* Приближённое выражение математических объектов через другие, более простые.

АРГУМЕНТ *м* **функции.** Независимая переменная, от значений которой зависят значения функции.

БАЗИС *м.*

Б. векторного пространства. Система линейно независимых векторов, линейными комбинациями которого можно представить любой вектор пространства.

Б. ортонормированный. Базис векторного пространства, образованный единичными попарно ортогональными векторами.

БЕТА (β). Величина ошибки второго рода или вероятность принятия гипотезы, когда верна некоторая альтернативная гипотеза.

БИЕКЦИЯ *ж.* Взаимно однозначное отображение одного множества на другое.

БИНАРНЫЙ. Двуместный, двучленный. Термин образовался от латинского слова *bi...* - дву... .

БЛОКИ *м мн,* **ортогональные.** Части многофакторного эксперимента, выбранные таким образом, что эффекты неоднородностей смешаны только с некоторыми, заранее выбранными эффектами взаимодействий факторов, которыми можно пренебречь. Разбиение на ортогональные блоки позволяет избежать влияния эффектов неоднородностей на оценки коэффициентов регрессионной модели многофакторного эксперимента.

ВЕКТОР *м.* 1. Направленный отрезок прямой в евклидовом пространстве. 2. Элемент векторного пространства.

ВЕКТОРЫ *мн. см. тж. ВЕКТОР*

коллинеарные В. Векторы, параллельные одной и той же прямой.

ВЗАИМОДЕЙСТВИЕ *с* **между факторами.** Означает, что изменение результата эксперимента на различных уровнях фактора неодинаково для всех уровней другого фактора.

ВЫБОРКА *ж.* Часть генеральной совокупности, выделяемая по определенному правилу.

случайная В. Выборка, в которой все члены совокупности, из которой она берется, имеют равные возможности попасть в эту выборку.

ВЫВОД *м,* **статистический.** Получение какого-либо заключения относительно генеральной совокупности на основании выборки из этой совокупности.

ВЫСКАЗЫВАНИЕ *с.* Предложение, в отношении которого имеет смысл говорить о его истинности или ложности.

ГИПЕРПЛОСКОСТЬ *ж.* Множество точек n-мерного аффинного пространства, координаты которых $x_1 ..., x_n$ удовлетворяют линейному уравнению $a_1x_1 + ... + a_nx_n + b = 0$, причём не все коэффициенты a_i равны нулю. В частных случаях при n=3 это обычная плоскость, при $n = 2$ - прямая.

ГИПОТЕЗА *ж,* **статистическая.** Предположение относительно генеральной совокупности, из которой берется выборка.

ГОМЕОМОРФИЗМ *м.* Взаимно однозначное и взаимно непрерывное соответствие между двумя топологическими пространствами. Гомеоморфные пространства топологически эквивалентны.

ГОМОМОРФИЗМ *м.* Отображение алгебраической системы в однотипную ей систему, сохраняющее основные отношения и основные операции.

ГРУППА *ж.* Одно из основных понятий современной математики. Теория групп изучает в самой общей форме операции, наиболее часто встречающиеся в математике и ее приложениях (сложение чисел,

умножение чисел, сложение векторов, последовательное выполнение преобразований и т. п.). Теория групп изучает не совсем произвольные операции, а лишь те, которые обладают рядом основных свойств, перечисляемых в определении группы.

Г. преобразований. Геометрическое преобразование фигур, удовлетворяющее следующим условиям: 1) каждая фигура F «равна» сама себе; 2) если фигура F «равна» фигуре F′, то и F′ «равна» F;
3) если фигура F «равна» F', а F′ «равна» F", то и F «равна» F". «Геометрия» такого пространства состоит в изучении тех свойств фигур, которые сохраняются при преобразованиях из этой группы.

ДИСПЕРСИЯ *ж.* Характеристика случайной величины, определяемая как математическое ожидание квадрата отклонения случайной величины от ее математического ожидания; обозначается через *D x*.

Д. воспроизводимости. Дисперсия, характеризующая воспроизводимость результатов эксперимента; вычисляется по данным повторных опытов при номинально одинаковых значениях управляемых факторов.

выборочная Д. Дисперсия, вычисленная по данным выборки.

остаточная Д. Дисперсия, характеризующая рассеяние опытных данных относительно результатов, рассчитанных по уравнению регрессии.

Д. оценки поверхности отклика. Рассеивание, предсказанное уравнением регрессии функции отклика.

ЗАВИСИМОСТЬ *ж.* Наличие той или иной связи между различными величинами.

статистическая З. *см. стохастическая ЗАВИСИМОСТЬ.*

стохастическая З. Зависимость между случайными величинами, заключающаяся в том, что распределение каждой из них определяется значениями других величин.

функциональная З. Зависимость между величинами, заключающаяся в том, что одна из них является однозначной функцией других.

ЗАДАЧА *ж.* Требование определить математический объект, удовлетворяющий заданным условиям.

обратная З. Задача определения коэффициентов **B** в уравнении **Y = XB + E** по измеренному выходному результату **Y** и условиям наблюдения **X; E** -значение случайной ошибки ε.

ЗАДАЧИ *жмн.*

корректные З. Классы математических задач, отвечающих некоторым условиям определенности их решений. Задача называется

корректной задачей (или корректно поставленной), если выполнены следующие условия (условия корректности): 1) задача имеет решение при любых допустимых исходных данных - существование решения; 2) каждым исходным данным соответствует только одно решение - однозначность задачи; 3) решение устойчиво. Выполнение первого условия означает непротиворечивость условий по исходным данным друг другу; второго условия -достаточность исходных данных для однозначной определенности решения задачи; третьего условия - малые изменения конечных результатов при сравнительно малых изменениях исходных условий.

некорректные З., некорректно поставленные. Задачи, для которых не выполняется хотя бы одно из условий, характеризующих корректно поставленные задачи.

ЗАМЕНА *ж* переменных. Переход от одной системы переменных к другой при вычислении интегралов и при решении других математических задач.

ЗНАЧЕНИЕ *с***.**

истинное З. Значение величины, которое идеальным образом отражало бы в качественном и количественном отношениях соответствующее свойство объекта.

натуральное З. фактора. Значения фактора, выраженные в определённой шкале, используемой для этого фактора в предметной области.

приближенное З. Значение величины, которое может отличаться от истинного не более, чем на заданную величину.

собственное З. матрицы А. Число λ, для которого существует ненулевой вектор - элемент векторного пространства - *x,* обладающий свойством $\mathbf{A}x = \lambda x$*;* этот вектор есть собственный вектор линейного преобразования, выражаемого матрицей.

ЗНАЧИМОСТЬ *ж.* Условие, показывающее, отличаются ли некоторые характеристики, найденные из двух и более выборок (друг от друга или от других величин), в большей степени, чем можно ожидать вследствие случайных колебаний в выборках.

ИЗМЕРЕНИЯ *с мн,* **параллельные.** Измерения, выполненные при номинально одинаковых значениях управляемых факторов.

ИЗО (гр. *isos* - равный, одинаковый, подобный) - первая составная часть сложных слов, обозначающая равенство или подобие.

ИЗОМОРФИЗМ *м.* Взаимно однозначное соответствие между алгебраическими системами, сохраняющие операции и отношения между их элементами. Изоморфизм - одно из основных понятий современной математики.

ИЗОМОРФНОСТЬ *ж.* Свойство двух алгебраических систем, заключающееся в существовании изоморфизма между ними; изоморфные системы одинаковы в математическом смысле.

ИНВАРИАНТНОСТЬ *ж.* Свойство математического объекта не меняться при определённых преобразованиях.

ИНТЕРВАЛ *м.*

И. варьирования. Разность между максимальным и минимальным натуральными значениями фактора в плане эксперимента.

доверительный И. Интервал, внутри которого с заданной степенью достоверности находится истинное значение параметра.

ИНТЕРПРЕТАЦИЯ *ж.* Задание конкретного смысла абстрактной системе логики и математики (символу, выражению, высказыванию и т. д.).

ИНФОРМАТИКА *ж.* Комплекс научных дисциплин, изучающие различные аспекты понятия информации, её извлечения, хранения, передачи, классификации, переработки и т. д.

ИНФОРМАЦИЯ *ж.* Совокупность сведений, уменьшающих неопределённость в выборе различных возможностей.

априорная И. В планировании эксперимента сведения об объекте, подлежащем изучению, имеющиеся у исследователя до постановки экспериментов.

КАРТА *ж.* Взаимно однозначное отображение заданного множества в арифметическое пространство.

КВАЗИ (от лат. quasi) - начальная часть математических терминов, означающая - как будто, как бы, почти такой же.

КИБЕРНЕТИКА *ж.* Наука об общих законах получения, хранения, передачи и преобразования информации в сложных управляющих системах. При этом под управляющими системами здесь понимают не только технические, а и любые биологические, административные и социальные системы.

КОВАРИАЦИЯ *ж.* Числовая характеристика совместного распределения двух случайных величин, равная математическому ожиданию произведения отклонений этих случайных величин от их математических ожиданий. Недиагональные элементы ковариационной матрицы, умноженные на соответствующую дисперсию, являются ковариациями, характеризующими взаимосвязь коэффициентов регрессии.

КОДИРОВАНИЕ *с* **фактора.** Линейное преобразование факторного пространства с переносом начала координат в центр эксперимента и выбором масштаба по осям координат в единицах варьирования

факторов. Используются для планов 2^k, 2^{k-p}, 2-го порядка и в других случаях.

КОЛЛИНЕАРНОСТЬ *ж.* Свойство векторов, заключающееся в том, что они лежат на параллельных прямых или на одной прямой; компоненты коллинеарных векторов пропорциональны.

КОМПАКТ *м.* Метрическое пространство, обладающее свойством компактности.

КОМПАКТНОСТЬ *ж.* Свойство топологического пространства, состоящие в том, что любое его бесконечное подмножеством имеет предельную точку.

КОМПОЗИЦИОННОСТЬ *ж.* Свойство планов эксперимента, позволяющее разделить эксперимент на несколько этапов и постепенно переходить от простых моделей к более сложным, используя предыдущие наблюдения.

КОНТРАСТ *м,*

К. определяющий. Соотношение, задающее элементы столбца матрицы планирования, соответствующего фиктивной переменной, равной 1. Используют для определения разрешающей способности дробных реплик типа $2^{k-p.}$

К. фактора X_i. Любое множество коэффициентов c_{iu}, удовлетворяющее условиям:

$$\sum_{u=1}^{N} c_{iu} = 0, \quad \sum_{u=1}^{N} c_{iu}^2 \neq 0.$$

Коэффициенты c_{iu} определяются по натуральным значениям уровней фактора X_i.

КОНТРАСТЫ *м мн,* **ортогональные.** Два контраста c_i, c_j- называются ортогональными, если сумма произведений их соответствующих коэффициентов равна нулю.

$$\sum_{u=1}^{N} c_{iu} c_{ju} = 0, \quad 1 \leq i < j \leq k$$

.

При этом число повторных опытов в строках эксперимента постоянное, т. е. $n_u = n$, $1 \leq u \leq N$.

КООРДИНАТЫ *ж мн.* Числа, взятые в определённом порядке и характеризующие положение точки на линии, на плоскости, на поверхности или в пространстве.

криволинейные К. Координаты, определяемые двумя однопараметрическими семействами кривых на поверхности, заданными в определённом порядке и такими, что через каждую точку поверхности проходит только одна кривая каждого семейства;

координатами точки *P* являются при этом значения параметров двух кривых из этих семейств, проходящих через *P*. Порядок координат определяется порядком задания семейств кривых.

криволинейные К. в пространстве. Координаты, определяемые тремя однопараметрическими семействами поверхностей, заданными в определённом порядке и такими, что через каждую точку пространства проходит только одна поверхность каждого семейства.

К. нулевой точки. Значения управляемых факторов в кодированных шкалах их измерения, соответствующие началу, т. е. нулевой точке, системы координат .

прямолинейные К. Координаты, определяемые с помощью задания начала координат и пересекающихся в нём прямолинейных координатных осей; из произвольной точки *P* по заданному закону проводятся прямые, пересекающие координатные оси в точках P_i; числа, характеризующие положение этих точек на соответствующих осях, являются координатами точки P.

прямоугольные К. Прямолинейные координаты, у которых все оси взаимно перпендикулярны и из произвольной точки *P* опускаются перпендикуляры на эти оси; координатами точки *P* являются числа, характеризующие положение оснований перпендикуляров на соответствующие оси.

собственная кодированная система К. прообраза факторного пространства, *см. собственная кодированная СИСТЕМА координат прообраза факторного пространства.*

собственная кодированная система К. образа факторного пространства. *см. собственная кодированная СИСТЕМА координат образа факторного пространства.*

КОРРЕЛЯЦИЯ *ж.* 1. Взаимно однозначное соответствие между точками и прямыми проективного пространства, сохраняющие отношение инцидентности прямых и точек. 2. Зависимость между случайными величинами, выражающаяся в том, что распределение одной величины зависит от значения, принятого другой величиной.

КОЭФФИЦИЕНТ *м.*

К. конкордации. Величина, характеризующая степень согласованности различных источников априорной информации.

К. корреляции. Числовая характеристика совместного распределения двух случайных величин *x* и *y,* выражающая их взаимосвязь.

К. регрессии. Частное от деления ковариации случайных величин *x* и *y* на дисперсию величины *x* есть коэффициент регрессии *x* относительно *y.*

КРИВАЯ *ж.* 1. см. **плоская КРИВАЯ.** 2. Множество точек, координаты которых суть функции одного действительного параметра, заданные на отрезке или на всей числовой оси. В различных областях математики к этому определению добавляется те или иные дополнительные ограничения.

аппроксимирующая К. Кривая, наилучшим образом (в строго определённом смысле) приближающая данную функцию на заданном интервале.

плоская К. Множество точек плоскости, координаты которых удовлетворяют уравнению $F(x, y) = 0$.

КРИТЕРИЙ *м.*

К. оптимальности планов экспериментов. Соответствие планов экспериментов определенным требованиям.

К. *A*-оптимальности. Минимум следа матрицы дисперсий-ковариаций, $\min \mathrm{tr}(\mathbf{X}^{\mathrm{T}}\mathbf{X})^{-1}$, где **X** - матрица планирования; т - знак транспонирования матрицы; -1 - знак обращения матрицы.

К. *D*-оптимальности. Соответствие минимуму определителя матрицы дисперсий-ковариаций,

$$\min_{\varepsilon} \left| (\mathbf{X}^{\mathrm{T}}\mathbf{X})^{-1} \right|,$$

где ε - план эксперимента.

К. *E*-оптимальности. Минимакс собственного значения матрицы дисперсий-ковариаций,

$$\min_{\varepsilon} \max_{i} \lambda_i (\mathbf{X}^{\mathrm{T}}\mathbf{X})^{-1},$$

где ε - план эксперимента; i - текущий номер эффекта, $1 \le i \le k'$.

К. *G*-оптимальности. Соответствие минимуму максимального значения дисперсии оценки функции отклика,

$$\min_{\varepsilon} \max_{x} d(x, \varepsilon),$$

где ε - план эксперимента;

x — координаты точки плана эксперимента ε.

К. ортогональности плана эксперимента. Ковариационная матрица $(\mathbf{X}^{\mathrm{T}}\mathbf{X})^{-1}$, вектора оценок параметров плана эксперимента имеет диагональный вид.

К. проверки гипотезы. Правило, согласно которому гипотеза принимается или отвергается.

МАТЕМАТИКА *ж.* Наука о количественных отношениях и пространственных формах действительного мира.

вычислительная М. Направление в математике, рассматривающее круг вопросов, связанных с использованием ЭВМ для решения математических задач.

прикладная М. Совокупность математических идей и методов, непосредственно используемых в других науках и в технике.

МАТРИЦА *ж.* Система из *mn* чисел или букв, расположенных в прямоугольной таблице, имеющей *m* строк и *n* столбцов. Матрица представляет собой упорядоченную систему чисел, подчиняющуюся определенным правилам.

информационная М. Матрица ($\mathbf{X^TX}$), где **X** - матрица значений факторов, т - знак транспонирования матрицы. Является частью системы нормальных уравнений, записанных в матричной форме.

ковариационная М. Матрица $(\mathbf{X^TX})^{-1}$, обратная информационной матрице ($\mathbf{X^TX}$), где **X** - матрица значений факторов; т - знак транспонирования матрицы; -1 — знак обращения матрицы.

М. планирования. Стандартная форма записи условий эксперимента с использованием кодированных значений факторов.

транспонированная М. Матрица, у которой взаимно переставлены местами столбцы и строки; обычное обозначение $\mathbf{A^T}$, реже **A'**.

МЕТОД *м.* Совокупность приёмов или операций для получения искомого результата.

выборочный М. Статистический метод исследования общих свойств совокупности каких-либо объектов на основе изучения свойств лишь части этих объектов, взятых на выборку.

М. наименьших квадратов. Метод обработки эмпирического числового материала, основанный на критерии минимальности суммы квадратов отклонений измеренных величин от их теоретических значений; если случайные ошибки измеренных величин независимы и распределены по нормальному закону, то метод наименьших квадратов даёт несмещённые оценки неизвестных с наименьшей дисперсией.

МЕТРИКА *ж.* Неотрицательная функция $\rho(x, y)$ двух точек множества, удовлетворяющая трём условиям:

1) $\rho(x, y) = 0 \Leftrightarrow x = y$;
2) $\rho(x, y) + \rho(y, z) \geq \rho(x, z)$;
3) $\rho(x, y) = \rho(y, x)$.

МНОГООБРАЗИЕ *с.* Многомерное обобщение понятий линии и поверхности без особых точек. Это понятие применимо практически во всех ситуациях, когда рассматриваемые объекты могут быть параметризованы системами действительных чисел. Точками возникающих при этом многообразий могут быть объекты любой природы.

алгебраическое М. Множество точек в *n*-мерном аффинном пространстве, координаты которых $(x_1, ..., x_n)$ удовлетворяют некоторой системе алгебраических уравнений.

МНОГОЧЛЕН *м.* Функция, в которой переменные участвуют только в действиях сложения, вычитания и умножения (включая возведение в целую положительную степень).

МНОЖЕСТВО *с*. Объединение в единое целое определённых вполне различных элементов; задаётся либо перечислением его элементов, либо указанием их характеристического свойства.

вполне упорядоченное М. Множество P с заданным на нём бинарным отношением $\leq$, удовлетворяющим условиям: 1) для любых $x, y \in P$ либо $x \leq y$, либо $y \leq x$; 2) если $x \leq y$ и $y \leq x$, то $x = y$; 3) если $x \leq y$ и $y \leq x$, то $x \leq x$; 4) в любом непустом подмножестве $X \subset P$ существует элемент a такой, что $a \leq x$ для всех $x \in X$ (свойство минимальности).

выпуклое М. Множество точек векторного пространства, обладающие тем свойством, что соединяющий любые две его точки прямолинейный отрезок целиком принадлежит этому множеству.

замкнутое М. Точечное множество, которое содержит все свои предельные точки.

ограниченное М. Точечное множество, для которого существует шар, целиком его содержащий.

открытое М. Точечное множество, которое состоит только из внутренних точек.

пустое М. Множество, не содержащее ни одного элемента; общепринятое обозначение $\varnothing$.

связное М. Точечное множество, которое нельзя представить в виде объединения непустых непересекающихся открытых множеств.

точечное М. Множество, элементами которого являются точки прямой, плоскости или пространства.

МОДЕЛИРОВАНИЕ *с*, **математическое.** Метод исследования явлений с помощью построения их математических моделей.

МОДЕЛЬ *ж.* **1.** Аналог явления, сохраняющий его существенные черты и служащий для его изучения. 2. Интерпретация формального языка. 3. Алгебраическая система, в которой определены только отношения, а множество операций пусто.

«истинная» статистическая математическая М. полиномиального вида, линейная по параметрам. Выражается в виде уравнения регрессии, полученного при проведении полного факторного эксперимента с оптимальными статистическими характеристиками (критериями *D*-, *G*-, *A*-, *E*-оптимальности, ортогональности эффектов друг к другу и др.) плана эксперимента, которые соответствуют совместно возможным наилучшим значениям.

математическая М. Приближённое описание какого-либо класса явлений, выраженное с помощью математической символики.

статистическая математическая М. полиномиального вида, линейная по параметрам. Выражается в виде уравнения регрессии

$$\hat{y} = b_0 + b_1x_1+b_2x_2+\ldots+b_{k'}x_{k'},$$

где $\hat{y}$ - результат, рассчитанный по определяемой модели, который в случае адекватной модели приближенно равен среднему арифметическому значению $\overline{y}$ результатов повторных опытов, т. е, $\hat{y} \approx \overline{y}$, для одних и тех же условий опытов, задаваемых значениями факторов $X_1, X_2, \ldots, X_k$; k - общее число факторов; $b_0, b_1, b_2, \ldots, b_{k'}$ - эмпирические коэффициенты уравнения регрессии, вычисленные по результатам эксперимента; $x_1, x_2, \ldots, x_{k'}$ - эффекты, главные и взаимодействий, взятые из структурной схемы полного факторного эксперимента; k' - общее число эффектов (главных и взаимодействий), введенных в модель, линейных по параметрам.

М. «черного ящика». Модель, описывающая только входы и выходы системы, но не внутреннее устройство системы. Математическая модель «черного ящика» — совокупность множеств X и Y (X соответствует входам, Y - выходам). Если оператор f, связывающий их ($Y=f(X)$), и предполагается существующим, то он считается неизвестным.

МОРФИЗМ *м.* Элемент одного из двух классов, составляющих категорию; является обобщением понятий отображения, гомоморфизма, гомеоморфизма и др.; каждому морфизму соответствует два объекта категории - начало и конец морфизма.

МОЩНОСТЬ *ж* **критерия.** Вероятность неприятия проверяемой гипотезы как функция истинного параметра совокупности. Мощность критерия служит дополнением оперативной характеристики.

МУЛЬТИКОЛЛИНЕАРНОСТЬ *ж.* В регрессионном анализе - наличие тесных статистических (корреляционных) связей между различными эффектами - главными и взаимодействиями, - введенными в уравнение регрессии. Учитывая, что эффекты в регрессионном анализе считаются детерминированными величинами, говорят также о сопряженности эффектов между собой. Мультиколлинеарность эффектов затрудняет или делает невозможным устойчивое определение структуры и коэффициентов уравнения регрессии, содержательную интерпретацию причинных и структурных связей между эффектами и моделируемым откликом $\hat{y}_w$. При значительной мультиколлинеарности эффектов целесообразное использование уравнения регрессии теряет смысл.

НАСЫЩЕННОСТЬ *ж* **плана эксперимента.** Равенство числа независимых экспериментов плана числу независимых параметров, которые нужно оценить.

НЕАДЕКВАТНОСТЬ *ж* **представления.** Неадекватность представления результатов эксперимента; в широком смысле - несоответствие между результатами эксперимента и их выражением предложенной математической моделью с оценками коэффициентов, полученными по этим результатам.

ОБЛАСТЬ *ж.* Непустое связное открытое множество точек в евклидовом пространстве.

критическая О. Множество значений проверочной статистики, при которых проверяемая гипотеза отвергается.

ОБРАЗ *м.* Результат отображения.

О. множества. Совокупность образов элементов этого множества.

О. факторного пространства - область значений отображения, описывающего планирование эксперимента. Форма факторного пространства, определенная исходными условиями прикладной задачи в виде матрицы значений уровней факторов X_{iuo}, изменить которые не представляется возможным (i - текущий номер фактора, $1 \le i \le k$; k - общее число факторов; u - текущий номер опыта, $1 \le u \le N$; N- общее число опытов в плане эксперимента; о - символ факторного пространства образа). Множество X_{iuo} - совокупность образов элементов из области определения отображения, описывающего планирование эксперимента. Указанная форма факторного пространства может приводить к взаимной коррелированности факторов, при которой получение статистических моделей с наилучшими характеристиками известными методами невозможно.

О. элемента. Элемент $y \in Y$, в который отображается элемент $x \in X$ при отображении $\varphi : X \to Y$.

ОКРЕСТНОСТЬ *ж.*

О. множества. Любое открытое множество, содержащее данное множество топологического пространства.

О. точки. Любое открытое множество, содержащее рассматриваемую точку топологического пространства.

ОПЕРАТОР *м.* 1. Отображение векторного пространства на векторное пространство. 2. Отображение множества, наделённого структурой, на другое такое множество.

ОПЕРАЦИЯ *ж. см. алгебраическая ОПЕРАЦИЯ.*

алгебраическая О. Отображение, сопоставляющее всякому упорядоченному набору n элементов данного множества определённый

элемент этого же множества; число n фиксировано для данной операции.

ОРТОГОНАЛИЗАЦИЯ *ж.* Построение для данной системы элементов векторного пространства (векторов, функций и т.д.) другой системы, которая порождает то же пространство, но ортогональна.

ОРТОГОНАЛЬНОСТЬ *ж.* Равенство нулю скалярного произведения любой пары из заданной системы векторов.

ОТНОШЕНИЕ *с.* Совокупность φ упорядоченных наборов из n элементов данного множества в каждом; про элементы, входящие в один набор, говорят, что они «находятся в отношении φ между собой» и обозначают это формулой $\varphi(a_1, ..., a_n)$.

бинарное О. Совокупность упорядоченных пар элементов данного множества; про элементы a и b, входящие в одну из заданных пар, говорят, что они «находятся в отношении R между собой» и обозначают это формулой aRb.

О. направления. Бинарное отношение $\leq$, обладающее следующими свойствами: 1) если $x \leq y$, $y \leq z$, то $x \leq z$ (транзитивность); 2) $x \leq x$ (рефлексивность); 3) для любых x, y существует z такое, что $x \leq z$, $y \leq z$.

О. порядка, *см. ПОРЯДОК на множестве.*

рефлексивное О. Такое бинарное отношение R в множестве A, что для всех $a \in A$ верно aRa.

симметричное О. Такое бинарное отношение R в множестве A, что для любых $a, b \in A$ справедливо $aRb \Rightarrow bRa$.

транзитивное О. Такое бинарное отношение R в множестве A, что для любых $a, b, c \in A$ справедливо $aRb \wedge bRc \Rightarrow aRc$.

О. эквивалентности. Бинарное отношение, которое рефлексивно, симметрично и транзитивно.

ОТОБРАЖЕНИЕ *с.* **1.** Соответствие, при котором каждому элементу одного множества сопоставляется единственный элемент другого множества; обозначается $\varphi: A \to B$. 2. *см. многозначное ОТОБРАЖЕНИЕ.* Синонимы термина отображение - оператор, функция, преобразование. Отображение - одно из основных понятий математики.

многозначное О. Соответствие, при котором каждому элементу одного множества сопоставляется один или несколько элементов другого множества; для него используется то же обозначение $\varphi: A \to B$.

непрерывное О. Отображение одного топологического пространства в другое, при котором прообраз каждого открытого множества есть открытое множество.

однозначное О. *см. ОТОБРАЖЕНИЕ* **(**1.**).**

полилинейное О. Вектор-функция нескольких векторов, линейная по каждому аргументу в отдельности.

ОЦЕНКА *ж. см. ОЦЕНКА параметра.*

асимптотическая О. Оценка параметра, которая сходится в пределе к значению параметра, т. е. осуществляется предельное равенство $\lim M(\Gamma) = \gamma$ при $n \to \infty$, где γ - оцениваемый параметр, Γ - оценка γ на выборке, *M*—математическое ожидание, *n* - объём выборки.

доверительная О. Построение приближенных значений неизвестных параметров данного вероятностного распределения, которое в случае нормального распределения с неизвестным математическим ожиданием и дисперсией сводится к отысканию доверительного интервала и доверительной вероятности, оценивающих эти параметры.

достаточная О. Оценка параметра, который входит в функцию правдоподобия данной выборки таким образом, что распределение вероятностей случайной величины не зависит от этого параметра.

интервальная О. *см. доверительная ОЦЕНКА.*

несмещённая О. Оценка параметра, математическое ожидание которой равно оцениваемому параметру.

О. параметра. Задание функции выборки, реализация которой может рассматриваться как приближение неизвестного параметра.

состоятельная О. Оценка параметра, которая при увеличении объёма выборки сходится по вероятности к оцениваемому параметру.

эффективная О. Оценка параметра, дисперсия которой принимает минимальное значение (если таковое существует).

ОЦЕНКИ *ж мн*

смешанные О. коэффициентов регрессии. Оценки, одновременно учитывающие несколько эффектов, причем, по крайней мере, два оцениваемых эффекта не равны нулю. В плане эксперимента столбцы одновременно учитываемых эффектов имеют одинаковые наборы значений. В общем случае столбцы эффектов коррелированы между собой и $r(x_i, x_j) \neq 0$; $1 \leq i < j \leq k$.

статистические О. Функции от результатов наблюдений, употребляемые для статистического оценивания неизвестных параметров распределения вероятностей изучаемых случайных величин.

ОШИБКА *ж. см. ПОГРЕШНОСТЬ.*

О. второго рода. Принятие ложной статистической гипотезы.

О. первого рода. Отказ от истинной гипотезы.

ПАРАЛЛЕЛЕПИПЕД *м.* Призма, основанием которой является параллелограмм.

ПАРАЛЛЕЛОГРАММ *м.* Плоский четырёхугольник, противоположные стороны которого попарно параллельны.

ПАРАМЕТР *м.* **оптимизации.** Величина, количественно описывающая одну из характеристик цели системы (объекта, процесса).

ПЕРЕМЕННАЯ *ж.* Величина, значение которой в условиях данной задачи может меняться.

зависимая П. Переменная величина, значение которой определяется в зависимости от значений, принимаемых независимой переменной.

независимая П. *см. АРГУМЕНТ функции.*

фиктивная П. 1. Переменная x_0, принимающая только одно значение равное единице. Используется при составлении системы нормальных уравнений; иногда рассматривается как переменная уравнения регрессии нулевой степени. 2. Фактор, не имеющий физического смысла и используемый для представления других факторов.

ПЕРЕСЕЧЕНИЕ *с.* 1. Наличие общих точек у геометрических объектов. 2. Множество, состоящие из элементов, принадлежащих каждому из конечной или бесконечной совокупности множеств A_α и обозначаемое $\bigcap_\alpha A_\alpha$ или $\prod_\alpha A_\alpha$; для конечного числа множеств $A_1, ..., A_n$ употребляют обозначения $A_1 \cap ... \cap A_n$, или $A_1,...,A_n$.

ПЕРПЕНДИКУЛЯР *м.*

П. к плоскости. Прямая, пересекающая под прямым углом любую прямую, лежащую в данной плоскости и проходящую через точку пересечения.

П. к прямой. Прямая, пересекающая под прямым углом данную прямую.

ПЕРПЕНДИКУЛЯРНОСТЬ *ж.* Взаимное свойство двух прямых, прямой и плоскости или двух плоскостей, которые пересекаются друг с другом и образуют в точке пересечения прямой угол (две плоскости в этом случае образуют по линии пересечения двугранный прямой угол).

ПЛАН *м.*

***D*-оптимальный П.** План эксперимента, соответствующий критерию *D*-оптимальности.

неравномерный П. План эксперимента, в котором уровни какого-либо фактора встречаются неодинаковое для данного фактора число раз.

несимметричный П. План эксперимента, в котором факторы изменяются на различном числе уровней $s_i \neq s$ = const, $1 \leq i \leq k$.

ортогональный П. План эксперимента, позволяющий получить информационную матрицу, недиагональные элементы которой равны

нулю. При этом коэффициенты регрессии являются взаимонезависимыми.

равномерный П. План эксперимента, в котором уровни любого фактора встречаются одинаковое для данного фактора число раз.

регулярный П. мощности *t.* Факторный план при выполнении условия пропорциональности частот для любых *t* факторов.

симметричный П. План эксперимента, в котором каждый фактор имеет одинаковое число уровней $s_i \neq s$ = const, $1 \leq i \leq k$.

устойчивый (робастный) П. эксперимента. План полного или дробного факторного эксперимента, позволяющий выбрать неизвестные исследователю структуры «истинных» статистических моделей $\hat{y}_w$ полиномиального вида, линейных по параметрам, и получить адекватные модели (*w* - текущий номер определяемой модели, $1 \leq w \leq m$; *m* - общее число определяемых моделей по устойчивому плану эксперимента). План эксперимента не изменяется для выбираемых различных структур моделей. Структуры моделей выбираются из структурной схемы полного факторного эксперимента с ортогональными или близкими к ортогональным структурными эффектами.

ПЛАНИРОВАНИЕ *с* **эксперимента, квазиортогональное.** Планирование эксперимента, в котором максимальное абсолютное значение коэффициента парной корреляции $\max|r_{ij}|$ (*i, j* - текущие номера факторов, $1 \leq i \leq k$; *k* - общее число факторов) между любыми эффектами не превышает заданное абсолютное значение $|r_э|$, близкое к нулю: $\max|r_{ij}| \leq |r_э| = 0$, причем $|r_э|$ определяется условиями решаемой задачи.

ПЛАНЫ *м мн,* **комбинаторные.** Группа планов математической теории планирования экспериментов: латинские, греко-латинские, гипергреко-латинские квадраты, прямоугольники и кубы, сбалансированные и частично сбалансированные блоки, несимметричные факторные планы и др.; являются частными случаями многофакторных регулярных планов.

ПОВЕРХНОСТЬ *ж* **отклика.** Геометрическое место точек, уравнение которых является функцией отклика (параметра оптимизации).

ПОГРЕШНОСТЬ *ж.* 1. Разность между истинным и приближённым значением измеряемой величены. 2. *см. ПОГРЕШНОСТЬ измерения.*

П. измерения. Отклонение результата измерения от истинного значения измеряемой величены.

П. округления. Погрешность, вызванная использованием при вычислениях конечного числа значащих цифр и не превышающая по

модулю половины единицы разряда последней сохранённой значащей цифры.

относительная П. Отношение абсолютной погрешности измерения к истинному значению измеряемой величины; может быть выражена в процентах (%).

систематическая П. Составляющая погрешность измерения, остающаяся постоянной или закономерно изменяющаяся при повторных измерениях одной и той же величены.

случайная П. Составляющая погрешность измерения, изменяющаяся случайным образом при повторных измерениях одной и той же величины.

средняя квадратичная П. Корень квадратный из дисперсии погрешности измерения.

ПОДМНОЖЕСТВО *с* **множества** *A.* Множество *B,* каждый элемент которого является элементом множества *A.* Множество *A* содержит любое своё подмножество, что обозначается как $B \subset A$ или $A \subset B$.

ПОЛЕ *с,* **шумовое.** Эффекты статистически незначимого влияния множества неуправляемых, неконтролируемых факторов вследствие их самопроизвольного изменения и совокупности изменяющихся управляемых факторов, эффекты которых также статистически незначимы.

ПОЛИНОМ *м. см. МНОГОЧЛЕН.*

ПОРЯДОК *м.*

П. на множестве. Бинарное отношение *R* между элементами множества *M,* обладающее свойствами: 1) из *aRb, bRc* следует *aRc* (транзитивность); 2) *aRa* для любого *a* из *M* (рефлексивность); 3) из *aRb* и *bRa* следует *a* = *b* (антисимметричность).

ПОСЛЕДОВАТЕЛЬНОСТЬ *ж.*

ЛП$_\tau$ П. Последовательность точек $P_0, P_1, ..., P_i ...$ *n*-мерного куба $К^n$, в которой любой ее двоичный участок, содержащий не менее чем $2^{\tau+1}$ точек, представляет собой $П_\tau$ -сетку.

равномерно распределенная П. Последовательность точек $P_1 ..., P_i ...$ в *n*-мерном кубе $К^n$, если для любого П $\lim_{N\to\infty} S_N(П)/N = V_П$, где $S_N(П)$ – количество точек P_i с номерами $1 \le i \le N$, принадлежащих параллелепипеду П; $V_П$ - объем (*n*-мерный) параллелепипеда П.

ПРЕОБРАЗОВАНИЕ *с.* 1. Отображение множества в себя. 2. Переход от одной формулы или системы координат к другой, более удобной для тех или иных целей.

П. координат. Переход от одной системы координат к другой.

функциональное П. Преобразование (1.), определенное на некотором множестве функций.

ПРИБЛИЖЕНИЕ *с.* 1. *см. АППРОКСИМАЦИЯ.* 2. Результат процесса аппроксимации на каком-либо этапе.

наилучшее П. Приближение, дающее нижнюю грань погрешности приближения данной функции *f* функциями из заданного множества.

равномерное П. Приближение функции $F(x)$ функциями $f_i(x)$ $(i = 1,..., n,...)$, когда за меру уклонения f от F взята верхняя грань модуля их разности, т. е. $\rho(f_i, F) = \sup\Omega |F - f_i|$, где Ω - множество значений аргумента x рассматриваемых функций.

чебышёвское П. *см. равномерное ПРИБЛИЖЕНИЕ.*

ПРОВЕРКА *ж* **гипотез, статистическая.** Выяснение методами математической статистики, исходя из данных эксперимента, согласуется ли некоторая гипотеза о распределении случайной величины с этими данными.

ПРОИЗВЕДЕНИЕ *с*. Результат операции умножения.

П. отображений. Отображение $\varphi: A \to C$, сопоставляющее произвольному элементу $x \in A$ элемент $\varphi_2(\varphi_1(x)) \in C$, где $\varphi_1: A \to B$ и $\varphi_2: B \to C$ - два исходных отображения; обозначается $\varphi = \varphi_1 \circ \varphi_2$.

ПРООБРАЗ *м*. 1. Любой элемент $x \in X$, образом которого при отображении $\varphi: X \to Y$ является данный элемент $y \in Y$. 2. *см. полный ПРООБРАЗ.*

полный П. Множество всех прообразов элемента или множества элементов при данном отображении.

П. факторного пространства - область определения отображения, описывающая планирование эксперимента. Форма факторного пространства (куб, сфера, симплекс), заданная условиями в виде матрицы уровней факторов $X_{iu\text{пр}}$, соответствующая требованиям теории планирования эксперимента (i - текущий номер фактора, $1 \le i \le k$; k - общее число факторов; u - текущий номер опыта, $1 \le u \le N$; N - общее число опытов в плане эксперимента; пр - символ факторного пространства прообраза). Множество $X_{iu\text{пр}}$ — полный прообраз при данном отображении. В прообразе факторного пространства построение оптимальных планов эксперимента всегда возможно, что обеспечивает достижение наилучших характеристик получаемых статистических моделей.

ПРОСТРАНСТВО *с*. Логически мыслимая структура, служащая средой, в которой осуществляются другие структуры, формы и те или иные конструкции, а также фиксируются отношения межу ними.

евклидово П. Конечномерное действительное векторное пространство, в котором определено скалярное произведение для

любых двух векторов, причём скалярный квадрат ненулевого вектора положителен.

***n*-мерное П.** Векторное пространство, в котором существует n линейно независимых векторов, но всякие $n+1$ векторов линейно зависимы.

метрическое П. Точечное множество с определённой на нём метрикой.

топологическое П. Точечное множество X и система выделенных из него подмножеств, называемых открытыми множествами, обладающая следующими свойствами: 1) пересечение конечного числа открытых множеств есть открытое множество; 2) объединение любого количества (в том числе и бесконечного) открытых множеств есть открытое множество; кроме того, X и пустое множество Ø также открытые.

факторное П. Пространство, координаты которого соответствуют рассматриваемым факторам.

РАВЕНСТВО *с.* 1. Бинарное отношение, являющееся частным случаем отношения эквивалентности; характеризуется тем, что в рамках данной теории объекты, связанные отношением равенства, взаимозаменяемы. 2. Формула, состоящая из двух выражений, между которыми помещен знак « = ».

РАВНОМОЩНОСТЬ *ж.* Отношение между двумя множествами, заключающееся в том, что между их элементами можно установить взаимно однозначное соответствие.

РАЗБИЕНИЕ *с.* Представление множества в виде объединения непересекающихся множеств.

РАНДОМИЗАЦИЯ *ж.* Способ включения систематических ошибок в число случайных ошибок. Рандомизация реализуется путем случайной последовательности проведения опытов плана эксперимента.

РАССТОЯНИЕ с. Неотрицательное число, сопоставляемое всякой упорядоченной паре точек пространства и удовлетворяющее аксиомам метрики.

РЕГРЕССИЯ *ж.* Зависимость среднего значения случайной величины от некоторой другой величины или от нескольких величин.

РЕГУЛЯРИЗАЦИЯ *м.* Отбор допустимых решений задачи с целью обеспечить их устойчивость при малых изменениях исходной информации.

РЕГУЛЯРНЫЙ - (от лат. regularis) - означает правильный.

РЕЖИМ *м,* **оптимальный.** Набор значений факторов, позволяющий получить наивыгоднейшее значение параметра оптимизации.

РЕПЛИКА *ж*, **дробная.** План эксперимента, являющийся частью полного факторного эксперимента.

дробная Р. типа 2^{k-p}. Часть полного факторного эксперимента типа 2^k, которая обладает его основными свойствами: симметричностью, нормировкой, ортогональностью, ротатабельностью; k - количество факторов плана эксперимента; p — количество линейных эффектов, приравненных к эффектам взаимодействия. Такие дробные реплики называются регулярными.

РОБАСТНЫЙ - (от англ. robust) в дословном переводе означает «сильный», «крепкий». Термин используется как синоним термина «устойчивый» для обозначения статистических процедур, оценок слабо чувствительных к малым изменениям принятых начальных предположений.

РЕШЕНИЕ *с.* 1. Математический объект, удовлетворяющий условиям поставленной задачи. 2. Процесс отыскания решения. 3. Выбор одной из нескольких возможностей, удовлетворяющих заданным условиям.

приближённое Р. Замена по определённому правилу решения математической задачи другим, близким к нему числом, функцией или иным математическим объектом, который может заменить решение для данной практической цели.

СВЯЗНОСТЬ *ж.* Невозможность представить данное пространство в виде суммы непустых непересекающихся открытых множеств.

СЕМАНТИКА *ж.* Раздел семиотики, изучающий отношения между знаками и тем, что они обозначают, или вложенный, изначальный смысл знаков.

СЕМЕЙСТВО *с.* Совокупность математических объектов, каждому из которых поставлен в соответствие элемент заданного множества индексов.

С. линий. Множество линий, непрерывно зависящих от одного или нескольких параметров.

С. поверхностей. Множество поверхностей, непрерывно зависящих от одного или нескольких параметров.

СЕМИОТИКА *ж.* Наука, исследующая знаки и знаковые системы.

СИСТЕМА *ж.*

С. координат. 1. *см. КАРТА. 2.* Совокупность выделенных точек, линий и поверхностей, с помощью которых определяется положение геометрических объектов.

натуральная С. координат. Система координат, в которой на осях откладывают именованные значения факторов.

С. нормальных уравнений. Система линейных уравнений, с помощью которой вычисляют коэффициенты регрессии методом наименьших квадратов.

собственная кодированная С. координат прообраза факторного пространства. Безразмерная система координат прообраза факторного пространства, образованная в многомерном прямоугольном параллелепипеде с использованием максимальных $\tilde{x}_{i\,\text{прmax}}$ и минимальных $\tilde{x}_{i\,\text{прmin}}$ натуральных значений, изменяющихся в эксперименте факторов. $x_{i\text{пр}} = (\tilde{x}_{i\text{пр}} - \tilde{x}_{i0\text{пр}})/\Delta\tilde{x}_{i\text{пр}}$, $\tilde{x}_{i0\text{пр}} = (\tilde{x}_{i\,\text{прmax}} + \tilde{x}_{i\,\text{прmin}})/2$, $\Delta\tilde{x}_{i\text{пр}} = (\tilde{x}_{i\,\text{прmax}} - \tilde{x}_{i\,\text{прmin}})/2$ ($x_{i\text{пр}}$ - кодированное значение i-го фактора в собственной системе координат; $\tilde{x}_{i\text{пр}}$ - натуральное значение i-го фактора в исходной системе координат; $\tilde{x}_{i0\text{пр}}$- натуральное значение нового центра координат для i-го фактора в исходной системе координат; $\Delta\tilde{x}_{i\text{пр}}$ - натуральное значение интервала варьирования i-го фактора в исходной системе координат; $1 \le i \le k$; k — общее число факторов; пр— символ факторного пространства прообраза). Максимальное собственное кодированное значение координаты факторов $x_{i\text{прmax}} = 1$, а минимальное - $x_{i\text{прmin}} = -1$.

собственная кодированная С. координат образа факторного пространства. Безразмерная система координат образа факторного пространства, полученная топологическим отображением в образ собственной кодированной системы координат прообраза факторного пространства в виде многомерного прямоугольного параллелепипеда. При линейном ограничении области образа отображение реализуется при помощи алгоритмов RASTA4, RASTA5.1; при криволинейном - RASTA4K. Построение собственной кодированной системы координат образа осуществляется путем использования математических моделей функций отображения прообраза в образ.

$$\begin{cases} X_{1\text{o}} = f_{1\text{пр}}(x_{1\text{пр}}, ..., x_{k\text{пр}}) \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ X_{k\text{o}} = f_{k\text{пр}}(x_{1\text{пр}}, ..., x_{k\text{пр}}) \end{cases}, \quad (X_{1\text{o}}, \ldots, X_{k\text{o}}$$

- натуральные значения координат 1_o, ..., k_o для факторов $X_{(\cdot)}$ в области образа математического моделирования; $f_{1\text{пр}}, \ldots, f_{k\text{пр}}$ - символы структур математических моделей отображения прообраза в образ; $x_{1\text{пр}}, \ldots, x_{k\text{пр}}$ - кодированные значения (ортогональные контрасты) факторов прообраза

$X_{1пр}, \ldots, X_{kпр}$; *k* - общее число факторов; о - символ факторного пространства образа; пр - символ факторного пространства прообраза). Собственные системы координат прообраза и образа топологически эквивалентны. Эквивалентные точки факторных пространств прообраза и образа в собственных кодированных системах координат выражаются одинаковыми координатами: $x_{iuпр} = x_{iuо}$ ($x_{iuпр}$, $x_{iuо}$ - кодированное собственное значение координаты *i*-го фактора для *u*-той точки прообраза и образа; $1 \le i \le k$).

собственная кодированная С. координат прообраза факторного пространства, образованная по алгоритму RASTA10. Безразмерная система координат прообраза и образа факторного пространства, образованная по алгоритму RASTA10 с использованием кодированных значений координат, обусловленных формой факторного пространства. Значения координат определяются по уравнению

$$x_{iu(\cdot)} = (\tilde{x}_{iu(\cdot)} - \tilde{x}_{iu(\cdot)\min}) / (\tilde{x}_{iu(\cdot)\max} - \tilde{x}_{iu(\cdot)\min}),$$

($x_{iu(\cdot)}$ - собственное кодированное значение координаты *i*-го фактора для *u*-той точки, измеренное по линии, параллельной оси $0\tilde{x}_{i(\cdot)}$ и проходящей через точку *u*; $u: 1 \le i \le k; 1 \le u \le N; k$; *k* - общее число факторов; *N* - число точек прообраза и образа; (•) - обозначение прообраза (пр) или образа (о); $\tilde{x}_{iu(\cdot)}$ - натуральное значение координаты *i*-го фактора для *u*-той точки; $\tilde{x}_{iu(\cdot)\min}$, $\tilde{x}_{iu(\cdot)\max}$ - минимальное и максимальное натуральные значения координат *i*-го фактора для *u*-той точки). В качестве $\tilde{x}_{iu(\cdot)\min}$ и $\tilde{x}_{iu(\cdot)\max}$ принимаются значения координат точек, лежащих на периметре ограничительных линий (поверхностей) области и имеющих для *u*-той точки минимальное и максимальное значение. Эквивалентные точки *u*пр и *u*о факторных пространств прообраза и образа в собственных кодированных системах координат выражаются одинаковыми координатами: $x_{iuпр} = x_{iuо}$. Минимальные собственные кодированные значения координат факторов $\tilde{x}_{iu(\cdot)} = 0$, максимальные - $\tilde{x}_{iu(\cdot)} = 1$.

СМЕШИВАНИЕ *с.* Такое проведение экспериментов, при котором в частном случае некоторые эффекты невозможно отличить от других эффектов, а в общем случае эффекты коррелированы между собой.

СОВОКУПНОСТЬ *ж,* **генеральная.** Идеализация реальной совокупности (теоретически бесконечная), из которой производится выборка конечного объёма для статистического изучения данной величины, рассматриваемой как случайная величина.

СООТНОШЕНИЕ *с*, **генерирующее.** Соотношение, показывающее, какие взаимодействия заменены новыми факторами при построении дробной реплики типа 2^{k-p}.

СОСТОЯТЕЛЬНОСТЬ *ж* **оценки параметра.** Оценка параметра называется состоятельной, если по мере роста числа наблюдений *n* она стремится (сходится по вероятности) к оцениваемому теоретическому значению:

$$P\{|b_n - \beta| > \varepsilon\} \to 0 \text{ при } n \to \infty.$$

СПОСОБНОСТЬ *ж.*

разрешающая С. дробных реплик. Число несмешанных эффектов, которые могут быть вычислены по данной дробной реплике.

СТАТИСТИКА *ж.* 1. Функция от результатов наблюдений, являющаяся случайной величиной. 2. *см. математическая СТАТИСТИКА.*

математическая С. Раздел математики, посвященный математическим методам систематизации, обработки и исследования статистических данных для научных и практических выводов. При этом статистическими данными называются сведения о числе объектов в какой-либо более или менее обширной совокупности, обладающих теми или иными признаками.

СТОХАСТИЧНОСТЬ *ж.* Свойство математических объектов, выражающееся в том, что они зависят от случая.

СТРУКТУРА *ж.*, **математическая.** Задание дополнительных условий (операций, отношений, топологии и т. д.) на множестве, природа элементов которого не определена.

С. математической модели. Для статистических многофакторных математических моделей полиномиального класса, линейных по параметрам, структура в общем виде выражается множеством эффектов схемы полного факторного эксперимента

$$(1+X_1+X_1^2+\ldots+X_1^{s_1-1})\times\ldots\times(1+X_k+X_k^2+\ldots+X_k^{s_k-1})\to N_{\text{П}},$$

где 1 - значение фиктивной независимой переменной $x_0 \equiv 1$; X_1, ..., X_k - факторы искомой математической модели в натуральных значениях; s_1,..., s_k - число уровней факторов X_1, ..., X_k; k - общее число факторов; N_n - число опытов полного факторного эксперимента, равное числу структурных элементов его схемы. Предполагается, что полиномы по каждому из факторов X_i ($1 \le i \le k$) адекватно аппроксимируют результаты экспериментов при изменении этого фактора. При переходе от натуральных значений факторов X_1, ..., X_k к системе ортогональных полиномов Чебышева (системе ортогональных контрастов) структура математической модели имеет вид

$$(1+x_1^{(1)}+x_1^{(2)}+\ldots+x_1^{(s_1-1)})\times\ldots\times(1+x_k^{(1)}+x_k^{(2)}+\ldots+x_k^{(s_k-1)})\to N_{\Pi},$$

где 1 - значение фиктивной независимой переменной $x_0 \equiv 1$; $x_1^{(1)}, \ldots x_k^{(1)}$ -контрасты первого порядка факторов $X_1, \ldots, X_k$; $x_1^{(2)}, \ldots x_k^{(2)}$ - контрасты второго порядка факторов $X_1, \ldots, X_k$; $x_1^{(s_1-1)}, \ldots x_k^{(s_k-1)}$ - контрасты s_1 - 1,..., s_k - 1 порядка факторов $X_1, \ldots, X_k$; $s_1, \ldots, s_k$, k, N_{Π} - описание обозначений приведены выше. В общем случае искомая структура модели является выборкой из числа N_{Π} структурных элементов со статистически значимыми коэффициентами определяемой модели.

устойчивая С. многофакторной статистической модели. Структура, характеризующаяся неизменностью множества главных эффектов и взаимодействий многофакторной статистической модели полиномиального вида при изменениях значений результатов экспериментов (откликов), порождаемых случайными ошибками (погрешностями) результатов наблюдений, вычислений и неопределенностью искомой структуры модели. Структура модели выбирается из структурной схемы полного факторного эксперимента с ортогональными или близкими к ортогональным структурными эффектами с использованием устойчивого (робастного) плана эксперимента.

СУПЕРПОЗИЦИЯ *ж.* 1. Составление из двух функций $y = f(u)$ и $u=\varphi(x)$ сложной функции $y=f(\varphi(x))$. 2. *см. ПРОИЗВЕДЕНИЕ отображений.*

ТЕОРИЯ *ж.*

Т. вероятностей. Математическая наука, позволяющая по вероятностям одних случайных событий находить вероятности других случайных событий, связанных каким-либо образом с первыми.

Т. планирования эксперимента. Раздел прикладной статистики, системно изучающий оптимальные схемы постановки и проведения комплексных многофакторных экспериментальных исследований сложных объектов, процессов, систем, а также обработки и интерпретации их результатов.

ТОЛЕРАНТНОСТЬ *ж.* Бинарное отношение, обладающее свойствами рефлексивности и симметричности; толерантность, обладающая транзитивностью, есть эквивалентность.

ТОПОЛОГИЯ *ж.* Раздел математики, в котором изучается наиболее общие свойства пространств, а именно те, которые сохраняются при любых непрерывных преобразованиях.

ТОЧКА *ж.* 1**.** Элемент какого-либо пространства, рассматриваемого как множество. 2. Исходный объект геометрии, косвенное определение которого дается в аксиомах геометрии. 3. Значение аргумента функции.

Т. ограничительная. Точка, принадлежащая факторному пространству и расположенная на ограничивающей его поверхности. Положение точки задается координатами факторного пространства.

УРАВНЕНИЕ *с* **регрессии.** Математическая модель системы (объекта, процесса), полученная посредством математико-статистической обработки экспериментальных или иных данных.

УРОВЕНЬ ***м.***

доверительный У. Величина 1-α, где α - уровень значимости; обычно при статистической проверке гипотез выбирается значение доверительного уровня 0,95 или 0,99.

У. значимости. Целесообразно выбираемая величина вероятности, позволяющая судить об оценке статистических параметров (при доверительном оценивании) или о вероятности того, что отвергаемая статистическая гипотеза окажется правильной (при статистической проверке гипотез); обычно берётся уровень значимости α ≤0,05 или α≤0,01.

нулевой У. Натуральное значение фактора, соответствующее центру кодированной системы координат (центр эксперимента).

У. фактора. Значение фактора, которым задаются при изучении его влияния на параметр моделирования или оптимизации.

УСЛОВИЕ пропорциональности частот уровней *с.* Выражается уравнением $n_{ij...l}^{pq...r} = n_i^p \, n_j^q \ldots n_l^r / N^{t-1}$, - где $n^p{}_i$ - число появлений *p*-го уровня *i*-го фактора, $n^q{}_j$- число появлений *q*-го уровня *j*-го фактора и $n^r{}_i$ - число появлений *r*-го уровня *l*-го фактора;

$$p = 0, 1, \ldots, s_i - 1; \quad q = 0, 1, \ldots, s_j - 1; \; r = 0, 1, \ldots, s_l - 1;$$

$i, j, l = 1, 2, \ldots, k; \quad i \neq j \neq l$; s_i, s_j, s_l - число уровней для факторов F_i, F_j, F_k; *N* - число опытов в матрице плана эксперимента. Для *t* факторов число одновременных появлений в плане эксперимента указанных уровней факторов обозначается через $n_{ij...l}^{pq...r}$, для двух факторов - n_{ij}^{pq}, для трех - n_{ijl}^{pqr}.

УСТОЙЧИВОСТЬ *ж.* Свойство математического объекта сохранять заданные определенные черты при малых изменениях параметров, от которых он зависит.

У. коэффициентов многофакторной статистической модели. Минимально возможная изменчивость коэффициентов многофакторной статистической модели полиномиального вида к случайным ошибкам (погрешностям) результатов наблюдений и вычислений. Для оценки устойчивости коэффициентов используется число обусловленности cond. Устойчивость наилучшая, если cond = 1, хорошая - 1<cond≤10, удовлетворительная - 10<cond≤100, неудовлетворительная - cond > 100. Коэффициенты будут максимально устойчивы, если их эффекты ортогональны друг к другу (или близки к ортогональным) и нормированы.

статистическая У. Сравнительно малое или минимально возможное изменение статистических оценок, результатов при малых изменениях принятых начальных предположений и исходных условий.

ФАКТОР *м.* Независимая переменная, при изменении значения которой изменяется функция отклика.

ФОРМАЛИЗМ *м.* Направление в основаниях математики, пытавшееся осуществить её обоснование путём построения формальных исчислений.

ФОРМУЛА *ж.* Символическая запись, состоящая из цифр, букв и специальных знаков, расположенных в определённом порядке, и являющаяся носителем информации.

приближённая Ф. Формула, позволяющая вычислять приближённые значения некоторой величины.

эмпирическая Ф. Функциональная зависимость, полученная из обработки экспериментального материала путём отыскания такой функции, чтобы отклонение её от реальной зависимости было по возможности мало; процесс нахождения и вид эмпирической формулы неоднозначны, так как зависят от принятой меры отклонения.

ФУНКЦИЯ *ж.* **1.** Одно из основных понятий математики, соответствие между элементами множеств $X (x \in X$ - аргумент) и $Y (y \in Y$ - значение функции), обозначаемое *f*: $X \rightarrow Y$, или *yfx* , или $y = f(x)$; обычно к этому добавляется требование однозначности; чаще всего подразумевается также, что функция является численнозначной. 2. *см. зависимая ПЕРЕМЕННАЯ.*

аппроксимирующая Ф. Функция, которая аппроксимирует данную функцию с заданной точностью.

ковариационная Ф. Функция двух переменных *s* и *t*, характеризующая связь двух случайных процессов $X_i(s)$ и $X_i(t)$ и равная $\mathbf{M}\{[X_i(s) - \mathbf{M}\, X_i(s)][X_j(t) - \mathbf{M}X_j(t)]\}$, где **М** - знак математического ожидания.

корреляционная Ф. Функция $B(t, s)$, равная математическому ожиданию произведения $X(t)$ - $\mathbf{M}X(t)$ и $X(s)$ - $\mathbf{M}X(s)$, где X - заданный случайный процесс, **M** - математическое ожидание.

обратная Ф. Функция, обозначаемая f^{-1}, определённая на множестве значений данной функции f и ставящая в соответствие каждому его элементу полный прообраз этого элемента; таким образом для данной функции $y = f(x)$ обратная функция есть $x = f^{-1}(y)$.

полилинейная Ф. Функция нескольких переменных $y = f(x_1, \ldots, x_n)$, где $f(x_1, \ldots, x_n)$- полилинейная форма.

сложная Ф. Функция одного или нескольких переменных $F(x_1, \ldots, x_n)$, определенная формулой $F = f(g_1(x_1, \ldots, x_n), \ldots, g_m(x_1, \ldots, x_n))$, где $f, g_1, \ldots, g_m$ - заданные функции.

случайная Ф. Функция, значения которой определяется с помощью испытания и могут быть различными в зависимости от исхода испытания, причём для них задаётся распределение вероятностей.

ЦЕНТР *м* **эксперимента.** Условия проведения эксперимента, при котором значения всех факторов X_i $(1 \le i \le k)$, изменяющихся на двух уровнях s_i соответствуют серединам интервалов, определяемых граничными значениями каждого из факторов. Если фактор X_i- изменяется на трех и более уровнях s_i, то центр эксперимента по каждому из факторов равен среднему арифметическому значению уровней факторов по рабочей матрице плана эксперимента.

ЧЕРНЫЙ ЯЩИК. Система, в которой внешнему наблюдателю доступны лишь входные и выходные величины, а внутреннее устройство ее и процессы, в ней протекающие, неизвестны. Ряд важных выводов о поведении системы можно сделать, наблюдая лишь реакции выходных величин на изменение входных.

ЧИСЛО с**.**

Ч. обусловленности. Характеристика чувствительности решения задачи к погрешности входных данных. Число обусловленности матрицы A - число $\mathrm{cond}(\mathbf{A}) = \|\mathbf{A}\| \cdot \|\mathbf{A}^{-1}\|$, где $\|\mathbf{A}\|$ - норма исходной матрицы **A**; $\|\mathbf{A}^{-1}\|$ - норма обратной матрицы. Предполагается, что матрица **A** невырождена. Число обусловленности системы уравнений $\boldsymbol{A}x = b$ — число $\mathrm{cond} = \|\mathbf{A}^{-1}\| \cdot \|b\| / \|\mathbf{X}\|$.

Ч. связей. В математической статистике - количество независимых параметров, определяемых по результатам выборки.

Ч. степеней свободы. В математической статистике - количество независимых друг относительно друга элементов статистической совокупности (выборки). Определяется, как разность между числом независимых результатов и числом независимых параметров, определяемых по результатам выборки (числом связей).

ЭКВИВАЛЕНТНОСТЬ *ж.* 1**.** *см. ОТНОШЕНИЕ эквивалентности.* 2. *см. РАВНОМОЩНОСТЬ.*

ЭКСПЕРИМЕНТ *м.*

активный Э. Эксперимент, планирование и анализ которого базируется на математико-статистических методах.

математический Э. Проведение расчёта на основе созданной математической модели явления (процесса) с целью установить последствия тех или иных изменений начальных данных.

научный Э. Искусственно создаваемая система взаимосвязанных вещественных и логических компонентов, предназначенная для изменения явлений объективной действительности в относительно изолированных и контролированных условиях с непосредственной целью эмпирического познания.

пассивный Э. Эксперимент, в котором математико-статистические методы используют только для обработки результатов.

полный факторный Э. Эксперимент, включающий все возможные комбинации уровней изучаемых факторов при выбранном числе уровней по каждому фактору.

Э. с группировкой. Эксперимент, в котором уровни одного фактора выбираются внутри уровней другого фактора.

факторный Э. Эксперимент, в котором все уровни каждого фактора сочетаются со всеми уровнями остальных факторов.

ЭРЛАНГЕНСКАЯ ПРОГРАММА *ж.* Единый подход к определению различных геометрий с точки зрения группы преобразований. Эрлангенская программа была сформулирована немецким математиком Ф. Клейном в лекции, прочитанной в 1872 г. в университете города Эрлангена (Германия). Общим аппаратом разработки таких «геометрий» является теория непрерывных групп преобразований.

ЭФФЕКТ *м.*

вектор Э. взаимодействия факторов $F_1, ..., F_k$. Называется контраст с равными компонентами для всех наблюдений плана эксперимента, в которых факторы $F_1, ..., F_k$ принимают одинаковые значения, и полученный путем построчного произведения соответствующих компонент главных эффектов факторов $F_1, ..., F_k$.

вектор главных Э. фактора F_i. Называется контраст с равными компонентами для наблюдений, в которых фактор F_i в плане эксперимента принимает одинаковые значения; $1 \le i < k$.

линейный Э. Величина, характеризующая линейную зависимость параметра моделирования от значений соответствующего фактора;

определяется по величине и знаку коэффициента при соответствующем члене (первой степени) уравнения регрессии.

совместный Э. Эффект в плане дробной реплики, который "похож" на другой эффект или не может быть отличим от него. Соответствующие исходные эффекты коррелированы между собой: $r(x_i, x_j) \neq 0$; $1 \leq i < j \leq k$.

Э. уровней взаимодействия факторов X_i и X_j. Изменение значений результатов эксперимента при переходе от одних значений уровней факторов X_i и X_j к другим их значениям с вычитанием эффектов собственно уровней факторов X_i и X_j при определенных постоянных значениях уровней всех других факторов; $1 \leq i < j \leq k$.

Э. уровней фактора X_i. Изменение значения результатов эксперимента при переходе от одного значения уровня к другому значению уровня фактора X_i при определенных постоянных значениях уровней всех других факторов; $1 \leq i \leq k$.

ЭФФЕКТИВНОСТЬ *ж.*

Э. оценки параметра. Оценка $y(n)$ параметра y называется эффективной, если среди прочих оценок того же параметра она обладает наименьшей дисперсией.

статистическая Э. параметра оптимизации. Характеристика параметра оптимизации, связанная с величиной его дисперсии *(см. ЭФФЕКТИВНОСТЬ оценки параметра).*

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Адлер Ю.Л. Новое направление в статистическом контроле качества - методы Тагути // Качество и надежность изделий. № 2. - М., 1988. - С. 3-25. - (В помощь слушателям семинара по надежности и прогрессивным методам контроля качества промышленных изделий при Политехническом музее).

2. **Адлер Ю.П., Маркова Е.В., Грановский Ю.В.** Планирование эксперимента при поиске оптимальных условий. - 2-е изд., перераб. и доп. - М.: Наука, 1976. - 280 с.

3. **Айвазян С.А.** Многомерный статистический анализ // Математическая энциклопедия / Гл. ред. И.М. Виноградов. - М., 1982. - Т. 3. - С. 732-738.

4. **Айвазян С.А., Розанов Ю.А.** Некоторые замечания к асимптотически эффективным линейным оценкам коэффициентов регрессии // Тр. мат. ин-та им. В.А. Стеклова. - М., 1964. - Т. 71. - С. 3-16.

5. **Айвазян С.А., Енюков И.С., Мешалкин Л.Д.** Прикладная статистика: Исследования зависимостей: Справ, изд. / Под. ред. С.А. Айвазяна. - М.: Финансы и статистика, 1985. - 487 с.

6. **Айвазян С.А.** Программное обеспечение персональных ЭВМ по статистическому анализу данных: проблемы, тенденции, перспективы отечественных разработок // Компьютеры и экономика: экономические проблемы компьютеризации общества. - М., 1991. - С. 91-107. - (Серия «Кибернетика - неограниченные возможности и возможные ограничения»).

7. **Айвазян С.А.** Статистическое исследование зависимостей. - М.: Металлургия, 1968. - 228 с.

8. **Акофф Р.** О природе систем // Изв. АН СССР. Техн. кибернетика. - 1971. -№3.- С. 68-75.

9. **Алгоритмы** и программы восстановления зависимостей / В.Н. Вапник, Т.Г. Глазкова, В.А. Кощеев и др.; Под ред. В.Н. Вапника. - М.: Наука, 1984. - 816 с.

10. **Александров В.В., Алексеев А.И., Горский Н.Д.** Анализ данных на ЭВМ: (на примере системы СИТО). - М.: Финансы и статистика, 1990. - 192 с. -(Математическое обеспечение прикладной статистики).

11. **Александров П.С.** Введение в теорию групп. - М.: Наука, 1980. - 144 с. - (Б-ка «Квант»; Вып. 7).

12. **Александров П.С.** Введение в теорию множеств и общую топологию. -М.: Наука, 1977.-368 с.

13. **Алимов Ю.И., Шаевич А.Б.** Методологические особенности оценивания результатов количественного химического анализа // Журн. Аналит. химии. — 1988. - Т. XLIII, Вып. 10. - С. 1893-1916.

14. **Альтшуллер** Г.С. Найти идею: Введение в теорию решения изобретательских задач / Отв. ред. А.К. Дюнин. - Новосибирск: Наука, 1986. - 209 с.

15. **Андерсон Т.** Введение в многомерный статистический анализ / Пер. с англ. Ю.Ф. Кичатова; Под ред. Б.В. Гнеденко. - М.: Физматгиз, 1963. - 500 с.

16. **Анохин П.К.** Теория функциональной системы // Успехи физиолог, наук. - 1970. - Т. 1, № 1. - С. 19-54.

17. **Арсеньев Ю.Д.** Инженерно-экономические расчеты в обобщенных переменных: Учеб. пособие для студентов втузов. - М.: Высш. шк., 1979. - 215 с.

18. **Артоболевский И.И.** Механика и управление машинами // Будущее науки: Перспективы. Гипотезы. Нерешенные проблемы: Междунар. ежегодник. — М., 1976. - Вып. 9. - С. 16-17.

19. **Балакшин Б.С.** Основы технологии машиностроения: Учеб. пособие для вузов. - 2-е изд., доп. и перераб. - М.: Машиностроение, 1966. - 556 с.

20. **Берталанфи** Л. Общая теория систем: Крит, обзор // Исследования по общей теории систем. - М., 1969. - С. 23-82.

21. **Білецький А.** Що врятує експеримент // Уряд. кур'єр. - 1994. - 22 верес. (№ 146-147). - С. 9.

22. **Бир Ст.** Кибернетика и управление производством / Пер. с англ. В.Я. Алтаева; Под ред. А.Б. Челюсткина. - 2-е изд., доп. - М.: Наука, 1965. - 391 с.

23. **Болтянский В.Г., Ефремович В.А.** Очерк основных идей топологии. Ч. 2: Теоретико-множественная топология // Мат. просвещение. - 1958. - Вып. 3. — С. 5-40.

24. **Большев Л.Н., Смирнов Н.В.** Таблицы математической статистики. -3-е изд.-М.: Наука, 1983.-416 с.

25. **Боровков А.А.** Математическая статистика: Доп. главы: Учеб. пособие для вузов. - М.: Наука, 1984. - 144 с.

26. **Бородюк В.П.** Регрессионные модели с нестандартной ошибкой в задачах идентификации сложных объектов: Учеб. пособие по курсу «Спецметоды обработки экспериментальных данных» - М.: МЭИ, 1981. - 92 с.

27. **Бородюк В.П.** Статистические методы математического описания сложных объектов: Учеб. пособие. - М.: МЭИ, 1981. - 92 с.

28. **Бриллюэн** Л. Научная неопределенность и информация / Пер. с англ. Т.А. Кузнецовой; Под ред. и с послесл. И.В. Кузнецова. - М.: Мир, 1966. - 272 с.

29. **Бродский В.З.** Введение в факторное планирование эксперимента. - М.: Наука, 1976.-224 с.

30. **Бродский В.З.** Многофакторные регулярные планы. - М.: Изд-во Моск. ун-та, 1972.-218 с.

31. **Бурбело Ю.С., Сидоренко Ю.А., Радченко С.Г.** Исследование контактно-стыковой сварки труб из поливинилхлорида (ПВХ-100) // Монтаж технологического оборудования и трубопроводов и средства для его осуществления: Сб. научн. тр. / ВНИИмонтажспецстрой. - М., 1982. - С. 163-173.

32. **Бусленко** Н.П. К теории сложных систем // Изв. АН СССР. Техн. кибернетика. - 1963. - № 5. - С. 7-18.

33. **Вдовин Р.М., Радченко С.Г., Овдієнко О.М.** Дослідження виборчого переносу у вимірювальних механізмах // Автоматика. Автоматизация. Электротехнические комплексы и системы. - 2002. - № 1(10). - С. 46-56.

34. **Вдовин Р.М., Овдиенко О.Н.** Установка для исследования материалов пар трения приборов точной механики в режиме минимальных коэффициентов трения // Материалы науч.-техн. конф. с междунар. участием: (Приборостроение -96). - Винница, 1996. - Ч. 1. - С. 36-43.

35. **Вейник А.И.** Термодинамика реальных процессов. - Минск.: Навука и тэхника, 1991. - 576 с.

36. **Вознесенский** В.А. Статистические методы планирования эксперимента в технико-экономических исследованиях. - 2-е изд., перераб. и доп. - М.: Финансы и статистика, 1981. - 263 с. - (Математическая статистика для экономистов).

37. **Вучков И., Бояджиева Л., Солаков Е.** Прикладной линейный регрессионный анализ / Пер. с болг. и предисл. Ю.П. Адлера. - М.: Финансы и статистика, 1987. — 239 с. — (Б-чка иностранных книг для экономистов и статистиков).

38. **Гаврилов А.Н.** Основы технологии приборостроения: Учеб. для втузов. -М.: Высш. шк., 1976. - 328 с.

39. **Гельфанд И.М.** Лекции по линейной алгебре. - 4-е изд., доп. - М.: Наука, 1971.-272 с.

40. **Глазков** А.В. Размерная электрическая обработка металлов: Учеб. пособие для студентов вузов. - М.: Высш. шк., 1978. - 336 с.

41. **Головина Л.И.** Линейная алгебра и некоторые ее приложения: Учеб. пособие. - М.: Наука, 1971. - 288 с.

42. **Грекова И.** Методологические особенности прикладной математики на современном этапе ее развития // Вопр. философии. - 1976. - № 6. - С. 104—114.

43. **Данилевский В.В.** Технология машиностроения: Учеб. для техникумов. -4-е изд., перераб. и доп. -М.: Высш. шк., 1977.-480 с.

44. **Демиденко Е.З**. Линейная и нелинейная регрессии. - М.: Финансы и статистика, 1981.-302 с.

45. **Джонсон Н., Лион Ф.** Статистика и планирование эксперимента в технике и науке. Методы обработки данных / Пер. с англ. под ред. Э.К. Лецкого. - М.: Мир, 1980.-612 с.

46. **Дрейпер Н., Смит Г.** Прикладной регрессионный анализ: В 2 кн.: Пер. **с** англ. - 2-е изд., перераб. и доп. - М.: Финансы и статистика, 1986. - Кн. 1. - 336 с. - (Математико-статистические методы за рубежом).

47. **Дружинин В.В., КонторовД.С.** Системотехника. - М.: Радио и связь, 1985.-200 с.

48. **Душинский В.В., Пуховский Е.С., Радченко С.Г.** Оптимизация технологических процессов в машиностроении / Под общ. ред. Г.Э. Таурита. - К.: Техніка, 1977.-176 с.

49. **Ермаков Ю.М.** Нелегкие пути растачивания // Станки и инструмент. — 1993.-№3.-С. 30-35.

50. **Ершов А.А.** Стабильные методы оценки параметров: (Обзор) // Автоматика и телемеханика. - 1978. - № 8. - С. 66-100.

51. **Жилис В.И.** Современные конструкции спиральных сверл: (По материалам отечественных и зарубежных источников) // Новые конструкции и технология производства режущих инструментов: Материалы Всесоюз. науч.-техн. конф., 21-23 июня 1966 г. - М., 1966. - С. 3-11.

52. **Жуковский** Е.Л. Статистическая регуляризация решений обратных некорректно поставленных задач обработки и интерпретации результатов эксперимента // Методы математического моделирования, автоматизация обработки наблюдений и их применения: Сборник / Под ред. А.Н. Тихонова, А.А. Самарского. -М., 1986.-С. 47-72.

53. **Зинченко В.П., Радченко С.Г.** Метод моделирования многокомпонентных тензометрических измерительных систем. - К.: ИК, 1993. - 16 с. (Препринт / АН Украины, Ин-т кибернетики им. В.М. Глушкова; 93 - 31).

54. **Зинченко В.П., Радченко С.Г., Зинченко Н.П.** Метод расчета эластичности весовых элементов с упругим шарниром // Вісн. нац. авіац. ун-ту. - К., 2001. - № 3(10). - С. 99-108.

55. **Зинченко В.П., Радченко С.Г., Зинченко Н.П.** Методика расчета шестикомпонентных тензометрических аэродинамических весов // Праці ін-ту електродинаміки НАНУ. Енергоефективність: 36. наук. пр. / НАНУ, Відділення фізико-техн. проблем енергетики. — К., 2001. — С. 108-115.

56. **Золотых** Б.И. Основные вопросы теории электрической эрозии в импульсном разряде в жидкой диэлектрической среде: Автореф. дис. ... д-р техн. наук / Моск. ин-т электрон, машиностроения. — М., 1968. - 32 с.

57. **Иванов Г.А., Турбин А.Ф.** Статистические методы восстановления истинной зависимости по опытным данным. - К.: О-во «Знание» УССР, 1986. -20 с. - (Межотраслевые проблемы ускорения научно-технического прогресса / О-во «Знание» УССР, РДЭНТП). - (В помощь лектору и специалисту/...).

58. **Ивахненко А.Г.** Моделирование сложных систем: информационный подход. — К.: Вища шк. Голов, изд-во, 1987. - 63 с.

59. **Ивахненко А.Г., Мюллер Й.А.** Самоорганизация прогнозирующих моделей. - К.: Технжа, 1985; Берлин: ФЕБ Ферлаг Техник, 1984. - 223 с.

60. **Избирательный** перенос при трении / Под ред. Д.Н. Гаркунова, Ю.С. Симакова. - М.: Наука, 1975. - 84 с.

61. **КалиткинН.Н.** Численные методы / Под ред. А.А. Самарского. - М.: Наука, 1978.-512 с.

62. **К вопросу** о построении матрицы планирования отсеивающего эксперимента / В.Д. Барский, Л.А. Забенко, А.А. Аксенина, В.М. Веднов // Завод, лаб. -1971.-№ 7.-С. 721-825.

63. **Клейн Ф.** Сравнительное обозрение новейших геометрических исследований // Об основаниях геометрии. - М., 1956. - С. 399—434.

64. **Клушин М.И. К** вопросу о методологии теории обработки металлов резанием как прикладной технологической науки // Вопросы обработки металлов резанием. - Иваново, 1973. - С. 3-9.

65. **Коваленко В.В., Файзиматов Б.Н., Радченко С.Г.** Оптимизация условий сверления титановых сплавов на станках с программным управлением // Оптимизация процессов механической обработки на металлорежущих станках. - К., 1975.-С. 134-146.

66. **Кованцов М.І.** Проективна геометрія. - 2-е вид., перероб. і доп. - К.: Вища шк."Головне вид-во, 1985. — 368 с.

67.і**Ковшов А.Н.** Технология машиностроения: Учеб. для студентов машиностроит. специальностей вузов. - М.: Машиностроение, 1987. - 320 с.

68. **Колев К.С.** Технология машиностроения. Учеб. пособие для вузов. - М.: Высш. шк., 1977. - 256 с.

69. **Колесов И.М.** Основы технологии машиностроения: Учеб. для машиностроит. специальностей вузов. - 3-е изд., стер. - М.: Высш. шк., 2001. - 591 с.

70. **Колмогоров А.Н.** К обоснованию метода наименьших квадратов // Успехи математических наук. - 1946. - Т. 1, Вып. 1. - С. 57-70.

71. **Комплексный** подход к автоматизированной обработке экспериментальных данных при исследовании свойств материалов / С.Н. Лапач, Н.И. Литвинчук, С.Г. Радченко, Л.Н. Ткаченко // III Всесоюз. конф. по проблемам получения и использования в нар. хоз-ве данных о свойствах материалов и веществ: Программа и тез. докл., 25—27 авг. 1987 г. / Гос. ком. СССР по стандартам; Всесоюз. науч.-исслед. центр по материалам и веществам. - М., 1987. - С. 98-99.

72. **Коснёвски Ч.** Начальный курс алгебраической топологии: Пер. с англ. -М.: Мир, 1983.-304 с.

73. **Коуэн Томас А.** Искусство воплощения в практике того, что мы проповедуем // Искусство и наука системной практики: Материалы Междунар. «круглого стола», состоявшегося в ИИАСА (Междунар. инте прикладного системного анализа), 6-8 нояб. 1986 г., Лаксенбург, Австрия / Пер. с англ. Ф.П. Тарасенко; Науч. ред. Ф.И. Перегудов. - М., 1989. - С. 143-148.

74. **Кравченко М.А., Радченко С.Г., Григорян М.В.** Математическое моделирование технологии получения прецизионных сплавов // Проблемы кристаллизации сплавов и компьютерное моделирование: Тез. Всесоюз. науч.-техн. конф. -Ижевск, 1990. -С. 79-80.

75. Кравченко М.А., Ларин В.К., Радченко С.Г. Термическая обработка алюминиевых бронз, обладающих эффектом запоминания формы // Металловедение и термин, обработка металлов. - 1990. - № 12. - С. 37^40.

76. **Креатология** и интеллектуальные технологии инновационного развития: Учеб. для вузов / Г.С. Пигоров, В.П. Козинец, А.Г. Махмудов и др.; Под общ. ред. Г.С. Пигорова. - Днепропетровск: Пороги, 2003. - 502 с.

77. **Кузнецов Ю.Н., Срибный Л.Н.** Повышение эффективности токарных автоматов. - К.: Тэхника, 1989. - 168 с.

78. **Лаврентьев М.А., Шабат Б.В.** Проблемы гидродинамики и их математические модели. - М.: Наука, 1973. - 416 с.

79. **Лавриненко М.З.** Технология машиностроения и технологические основы автоматизации. - К.: Вища шк., 1982. - 320 с.

80. **Ланге О**. Целое и развитие в свете кибернетики // Исследования по общей теории систем. - М.: Прогресс, 1968. - С. 181-251.

81. **Лапач С.Н., Радченко С.Г.** Использование методов регрессионного анализа в системах автоматизированного проектирования // Программные системы в автоматизации проектирования изделий машиностроения: Тез. докл. науч.-практ. семинара, 18-20 мая 1988 г. - Ижевск, 1988. - С. 44^16.

82. **Лапач СМ., Бабич П.М., Радченко С.Г.** Новітні програмні засоби для планування експерименту, математичного моделювання і багатокритеріальної оптимізації в агробіологічних дослідженнях

// Проблеми інформатизації агропромислового виробництва України в умовах ринкових відносин: Матеріали наук.— вироб. конф., черв. 1995 р.-К., 1995.-С. 116-118.

83. **Лапач С.Н., Радченко С.Г., Литвинчук Н.И.** Пакет прикладных программ ПРИАМ.- К., 1988. - 4 с. - (Информ. листок о науч.-техн. достижении / УкрНИИНТИ. Киев, отд-ние; № 88-007).

84. **Лапач С.Н., Радченко С.Г.** Получение общей характеристики загрязненности территории с использованием средств многокритериальной оптимизации // Математические методы и компьютерные технологии в решении задач защиты окружающей среды в чрезвычайных ситуациях: Тез. докл. четвертого междунар. симп. «Применение математических методов и компьютерных технологий при решении задач геохимии и охраны окружающей среды», 22-25 сент. 1998 г. — К., 1998.-С. 51-53.

85. **Лапач С.Н., Радченко С.Г.** ППП ПРИАМ - индустриальная технология обработки регрессионных экспериментов // Тез. докл. III Всесоюз. конф. «Перспективы и опыт внедрения статистических методов в АСУТП». — Тула, 1987. — С. 52-53.

86. **Лапач С.Н., Радченко С.Г., Бабич П.Н.** Проблемы и средства построения моделей пассивного эксперимента в экологии

// Математические методы и компьютерные технологии в решении задач защиты окружающей среды в чрезвычайных ситуациях: Тез. докл. четвертого междунар. симп. «Применение математических методов и компьютерных технологий при решении задач геохимии и охраны окружающей среды», 22-25 сент. 1998 г. - К., 1998. - С. 53-54.

87. **Лапач С.Н., Радченко С.Г.** Программное средство ПРИАМ

// Математические методы планирования эксперимента в лабораторных и промышленных исследованиях: Тез. докл. респ. науч.-практ. конф., 21-23 мая 1991 г., г. Киев. - К., 1991.-С. 25.

88. **Лапач С.Н., Радченко С.Г.** Система для накопления и использования информации об экспериментальных исследованиях

// Применение вычислительной техники и математических методов в научных и экономических исследованиях: Тез. докл. науч.-техн. конф. - К., 1988. - С. 140-142.

89. **Лапач С.Н., Радченко С.Г.** Сквозная автоматическая технология обработки результатов экспериментов (ППП ПРИАМ) // Применение вычислительной техники и математических методов в научных исследованиях. - К., 1986. - С. 133-135.

90. **Лапач С.Н., Чубенко А.В., Бабич П.Н.** Статистические методы в медико-биологических исследованиях с использованием Excel. - К.: МОРИОН, 2000. -320 с.

91. **Лапач С.Н., Чубенко А.В., Бабич П.Н.** Статистические методы в медико-биологических исследованиях с использованием Excel. - 2-е изд; перераб. и доп. - К.: МОРИОН, 2001. - 408 с.

92. **Леопольд В.И.** Информация, используемая для управления процессом достижения точности размера детали при выполнении технологической операции на станках с ЧПУ: Автореферат диссертации ... канд. техн. наук: (05.02.08) / Моск. станкоинструм. ин-т. - М.: Станкин, 1983. - 21 с.

93. **Линник Ю.В.** Метод наименьших квадратов и основы математико-статистической теории обработки наблюдений. - 2-е изд., доп. и испр. - М.: Физмат-гиз, 1962.-349 с.

94. **Лихобабин Б.И.** Разработка и исследование транспортирующих механизмов бортовой аппаратуры магнитной записи с фрикционными передачами: Ав-тореф... канд. техн. наук / Каунас, политехи, ин-т - Каунас, 1984. - 23 с.

95. **Лопатников Л.И.** Популярный экономико-математический словарь. - 3-е изд., доп. - М.: Знание, 1990. - 256 с.

96. **Лорьер Ж.-Л.** Системы искусственного интеллекта: Пер. с франц. Под ред. В.Л. Стефанюка. - М.: Мир, 1991. - 568 с.

97. **Лоусон Ч., Хенсон Р.** Численное решение задач метода наименьших квадратов. М.: Наука, 1986. - 232 с.

98. **Луна** управляет циклотроном: Пресс-релиз ЦЕРНа // Наука и жизнь. -1993.-№4.-С. 27.

99. **Львовский Е.Н.** Статистические методы построения эмпирических фор-,, мул. Пособие для втузов. - 2-е изд. перераб. и доп. - М.: Высш. шк., 1988. - 239 с.

100. **Магнус Я.Р., Катышев П.К., Пересецкий А.А.** Эконометрика: Начал. курс: Учебник. - 5-е изд., испр. - М.: Дело, 2001. - 400 с.

101. **Макаров** А.Д. Износ и стойкость режущих инструментов. - М.: Машиностроение, 1966. - 264 с.

102. **Малютов М.Б.** Предисловие редактора перевода // Себер Дж. Линейный регрессионный анализ / Пер. с англ. В.П. Носко; Под ред. М.Б. Малютова. -М, 1980. -С. 5-7.

103. **Маркова Е.В., Лисенков А.Н.** Комбинаторные планы в задачах многофакторного эксперимента. - М.: Наука, 1979. - 349 с.

104. **Маталин А.А.** Технология машиностроения: Учеб. для машиностроит. вузов по специальности «Технология машиностроения...» - Л.: Машиностроение, Ленингр. отд-ние, 1985. - 496 с.

105. **Матвеев** В.В. Исследование точности обработки резьб метчиками. Резьбообразующий инструмент // Сб. докл. конф. по резьбообразующему инструменту / Под ред. К.Ф. Романова. - М., 1968. - С. 290-298.

106. **Математический** энциклопедический словарь / Гл. ред. Ю.В. Прохоров; Ред. кол.: СИ. Адян, Н.С. Бахвалов, В.И. Биткщков и др. - М.: Сов. энциклопедия, 1988.-847 с.

107. **Математическое** моделирование трехкомпонентных тензометрических весов с использованием теории планирования эксперимента: Техн. отчет (заключ.) / Киев. мех. з-д; Киев, политехи, ин-т; Руководитель С.Г. Радченко. - № 548. - К., 1980.- 66 с. - Отв. исполн. В.П. Зинченко, С.Г. Радченко, Н.П. Зинченко, В.А. Больгер. — Рукоп. работа.

108. **Математическое** моделирование шестикомпонентных тензометрических измерительных систем: Техн. отчет / Киев. мех. з-д; Киёв, политехи, ин-т; Руководитель С.Г. Радченко. - № 486. - К., 1979.- 42 с. - Отв. исполн. В.П. Зинченко, С.Г. Радченко. - Рукоп. работа.

109. **Мельников Н.Ф., Бристоль Б.Н., Дементьев В.И.** Технология машиностроения. - 2-е изд., перераб. и доп. - М.: Машиностроение, 1977. - 327 с.

110. **Методические** рекомендации по планированию эксперимента и статистической обработке его результатов в механике деформируемого твердого тела / Сост.: В.А. Стрижало, С.Г. Радченко, С.Н. Шукаев; Киев, политехи, ин-т. - К.: КПИ, 1988.-40 с.

111. **Методология,** теория, технология и приложения метода группового учета аргументов как метода индуктивного моделирования: Спец. вып. // Управляющие системы и машины. - 2003. - № 2. - 144 с.

112. **Микиша А.М., Орлов В.Б.** Толковый математический словарь: Основные термины: Около 2500 терминов. - М.: Рус. яз., 1989. - 244 с.

113. **Многофакторная** математическая модель термонапряженной электроизоляции / М.Е. Иерусалимов, С.А. Соколовский, С.Г.

Радченко, Ю.В. Романенко, С.Н. Лапач // Электричество. - 1991. - № 8. - С. 40-45.

114. **Моисеев Н.Н.** Численные методы в теории оптимальных систем. - М.: Наука, 1971. -424 с. - (Серия «Оптимизация и исследование операций»).

115. **Монтгомери Д.К. Планирование эксперимента и анализ данных:** Пер. с англ. - Л.: Судостроение, 1980. - 384 с.

116. **Мосин И.** Математический советчик: Уникальный пакет прикладных программ для совершенствования самых различных технологий разработан учеными Киевского политехнического института // Деловой мир. - 1992. - 5 сент. (№171)-С. 12.

117. **Мостеллер Ф., Тьюки Дж.** Анализ данных и регрессия: В 2-х вып. Вып. 2 / Пер. с англ. Б.Л. Розовского; Под ред. и с предисл. Ю.П. Адлера. - М.: Финансы **и** статистика, 1982. - 239 с. (Математико-статистические методы за рубежом).

118. **Мэйдоналд Дж**. Вычислительные алгоритмы в прикладной статистике. - М.: Финансы и статистика, 1988. - 350 с.

119. **Налимов В.В., Голикова Т.И.** Логические основания планирования эксперимента. - 2-е изд., перераб. и доп.- М.: Металлургия, 1981. - 152 с.

120. **Налимов В.В.** Теория эксперимента. М.: Наука. - 1971. - 208 с. - (Физико-математическая библиотека инженера).

121. **Новицкий П.В., Зограф И.А.** Оценка погрешностей результатов измерений. - 2-е изд., перераб. и доп. - Л.: Энергоатомиздат. Ленингр. отд-ние, 1991.-304 с.

122. **Оптимизация** параметров обработки глубоких отверстий / СП. Крапивин, С.Г. Радченко, В.Н. Беспалько, В.К. Фролов // Авиац. пром-ть. - 1986. -№ 5. - С. 42-44.

123. **Оптимизация** процессов заточки быстрорежущего инструмента кругами из кубонита / И.П. Захаренко, Е.И. Вал, Э.А. Ахундов, С.Г. Радченко // Синтет. алмазы. - 1976. - Вып. 2(44). - С. 53-57,

124. **Оптимизация** режимов обработки жаропрочных никелевых сплавов инструментом из сверхтвердых материалов: Отчет о НИР (заключ.) / Ин-т сверхтвердых материалов АН УССР; Киев, центр науч.-техн. творчества «Прогресс»; Руководитель С.Г. Радченко. - К., 1988. - 62 с- Отв. исполн. С.Г. Радченко, С.Н. Лапач, П.Е. Дальник и др. - Рукоп. работа.

125. **Оптимизация** технологических условий сварки полиэтиленовых труб / С.Г. Радченко, Ю.С. Бурбело, Э.В. Котенко, С.Н. Лапач, Ю.А. Сидоренко, В.С. Ли-щинский // Пласт, массы. - 1988. - № 9. - С. 29-31.

126. **Орлюк В.А.** Технологическое обеспечение собираемости многоэлементных конструкций в условиях роботизированной сборки: Автореф. дис.... канд. техн. наук: (05.02.08) / Киев, политехи, ин-т. - К., 1989. - 16 с.

127. **Орлюк В.А.** Технологическое обеспечение собираемости многоэлементных конструкций в условиях роботизированной сборки: Дис. ... канд. техн. наук: 05.02.08.- Защищена 13.11.89; Утв. .03.90;.- К. 1989. - 273 с: 42 ил.- Библи-огр.: с. 201-212 (137 назв.).

128. **Основы** технологии машиностроения: Учеб. для вузов / В.М. Кован, В.С. Корсаков, А.Г. Косилова и др.; Под ред. В.С. Корсакова. - 3-е изд., перераб. и доп. - М.: Машиностроение, 1977. - 416 с.

129. **Основы** управления технологическими процессами / С.А. Анисимов, В.Н. Дынькин, А.Д. Касавин и др.; Под ред. Н.С. Райбмана. - М.: Наука, 1978. - 440 с.

130. **Пакет** прикладных программ ПРИАМ / Киев, политехи, ин-т; [Сост.: С.Н. Лапач, С.Г. Радченко]. - К.: Час, 1990. - 4 с. - На рус. и англ. яз.

131. **Перегудов Ф.И., Тарасенко Ф. П.** Введение в системный анализ: Учеб. пособие для вузов. -М.: Высш. шк., 1989. - 367 с.

132. **Петрович М.Л.** Регрессионный анализ и его математическое обеспечение на ЕС ЭВМ. - М.: Финансы и статистика, 1982. - 199 с.

133. **Планирование,** регрессия и анализ моделей PRIAM (ПРИАМ). SCMC-90; 325, 660, 668 // Программные продукты Украины: Каталог. = Software of Ukraine: Catalog. - К, 1993. - С. 24-27.

134. **Плошко Б.Г., Елисеева И.И.** История статистики: Учеб. пособие. - М.: Финансы и статистика, 1990. - 295 с.

135. **Плюта В.** Сравнительный многомерный анализ в эконометрическом моделировании / Пер. с польск. В.В. Иванова. - М.: Финансы и статистика, 1989. -175 с. - (Б-чка иностранных книг для экономистов и статистиков).

136. **Повышение** стойкости инструмента из кубического нитрида бора при точении никелевых сплавов / Э.И. Гриценко, С.Г. Радченко, П.Е. Дальник, С.Н. Лапач // Тез. докл. Всесоюз. науч.-техн. конф. «Пути повышения стойкости и надежности режущих и штамповых инструментов». - Николаев, 1990. - С. 6-7.

137. **Повышение** эффективности метода случайного баланса путем применения ветвящейся стратегии и электронно-вычислительных машин / Р.И. Слободчикова, В.Л. Фрейдлина, З.С. Лапина, В.В. Налимов // Завод, лаб. - 1966. - № 1. -С. 53-58.

138. **Подиновский В.Д., Ногин В.Д.** Парето-оптимальные решения многокритериальных задач. - М.: Наука, 1982. - 256 с.

139. **Половинкин А.И.** Законы строения и развития техники. - Волгоград, 1985. - 202 с.

140. **Половинкин А.И.** Основы инженерного творчества: Учеб. пособие для студентов втузов. - М.: Машиностроение, 1988. - 368 с.

141. **Попов Ю.П., Самарский А.А.** Вычислительный эксперимент // Компьютеры, модели, вычислительный эксперимент: Введение в информатику с позиций математического моделирования / Авт. пред. А.А. Самарский. - М., 1988. -С. 16-78. - (Серия "Кибернетика - неограниченные возможности и возможные ограничения").

142. **Пригожий И., Стенгерс И.** Порядок из хаоса: Новый диалог человека с природой / Пер. с англ. Ю.А. Данилова; Общ. ред. и послесл. В.И. Аршинова и др. -М.: Прогресс, 1986.-431 с.

143. **Приходько В.П., Радченко С.Г.** Математическое модслиронининие влияния факторов процесса резьбоформирования на стойкость гребенок // Технология **и** автоматизация машиностроения. - К., 1981. - Вып. 27. - С. 60-63.

144. **Прохоров А.В.** Регрессия // Математическая энциклопедия / Гл. ред. И.М. Виноградов. - М., 1984. - Т. 4. - Стб. 929-931.

145. **Пуанкаре А.** О науке: Пер. с франц. / Под ред. Л.С. Понтрягина. - М.: Наука, 1983.-560 с.

146. **Пугачев** В.С. [Выступление на годичном общем собрании Академии наук СССР] // Вестн. Акад. наук СССР. - 1987. - № 8. - С. 26-28.

147. **Пугачев В.С**. Теория вероятностей и математическая статистика: Учеб. пособие. - 2-е изд., испр. и доп. - М.: ФИЗМАТ ЛИТ, 2002. - 496 с.

148. **Радченко С.Г.** Алгоритм устойчивого оценивания коэффициентов статистических моделей (алгоритм RASTA4K) // Управляющие системы и машины. -2002.-№ 1.-С. 27-36.

149. **Радченко С.Г.** Алгоритм устойчивого оценивания коэффициентов статистических моделей с использованием фиктивных факторов // Мат. моделюван-ня. - 2001. - № 1(6). - С. 56-58.

150. **Радченко С.Г., Карпович Л.Г.** Анализ точечной диаграммы показателя качества технологического процесса // Вест, машиностроения. - 1989. - № 10. -С. 48-49.

151. **Радченко** С.Г. Багатофакторне математичне моделювання та компромісна оптимізація технолопчного процесу електроерозійного прошиття отворів // Мат. машини і системи. - 2003. - № 3, 4. - С. 186-200.

152. **Радченко С.Г., Лапач С.Н.** Высокая технология совершенствования выпускаемой продукции // Жизнь и компьютер:

Первый Всесоюз. науч.- практ. семинар по автоматизации инж. труда, 19-25 нояб. 1990 г. - Харьков, 1990. -С. 183-188.

153. **Радченко С.Г., Лапач С.Н., Бабич П.Н.** Высокоэффективная информационная технология для машиностроения

// Высокоэффективные технологии в машиностроении: (Материалы конф., 28-30окт. 1998г., г.Харьков). - К., 1998. -С. 73-74.

154. **Радченко С.Г., Лапач С.Н.** Высокоэффективная технология решения прикладных задач экспериментально-статистическими методами // Математические методы планирования эксперимента в лабораторных и промышленных исследованиях: Тез. докл. респ. науч.-практ. конф., 21-23 мая 1991 г., г. Киев. - К., 1991.-С. 24-25.

155. **Радченко С.Г.** Геометричне перетворення факторного простору при розв'язаннні некоректно поставлених задач // Прикладна геометрія та інженерна графіка: Міжвідом. наук.-техн. зб. - К.:- КНУБА, 2004. - Вип. 74. - С. 216-223.

156. **Радченко С.Г.** Інформаційне забезпечення розробки технологічних процесів та наукоємних виробів // Вимірювальна та обчислювальна техніка в технологічних процесах: За результатами VIII наук.-техн. конф. «Вимірювальна та обчислювальна техніка в технологічних процесах», 31 трав.-3 черв. 2001р., м. Хмельницький: 36. наук. пр. - Хмельницький, 2001. - Вип. № 8 - С. 118-121.

157. **Радченко С.Г., Лапач СМ.** Інформаційне забезпечення створення авіаційної техніки в роботах НТУУ «КПІ» і АНТК

// Генеральний конструктор О.К. Антонов: Матеріали наукових читань з циклу: «Видатні конструктори України». - К., 2002. - С. 51-54.

158. **Радченко С.Г.** Інформаційне забезпечення технологічних процесів механообробки на металорізальних верстатах // Вісн. Житомир. інж.-технолог. ін-ту. Техн. науки. - 1999. - № 10. - С. 105-107.

159. **Радченко С.Г., Бабич П.Н.** Информационная коррекция переменных систематических погрешностей средств измерений и измерительных информационных систем // Радиоэлектроника и информатика. - 1999. - № 3. - С. 82-88.

160. **Радченко С.Г.** Информационное обеспечение многокомпонентных датчиков систем контроля и управления // Тез. докл. к Всесоюз. конф. «Методы и средства измерения механических параметров в системах контроля и управления», 21-23 янв. 1986 г. - Пенза, 1986. - С. 145-147.

161. **Радченко С.Г.** Информационное обеспечение разработки новой продукции, проведения технологических процессов и создания

наилучших условий эксплуатации изделий // Партнер. - 2000. - № 4(20). - С. 15-18.

162. **Радченко С.Г., Бабич П.Н.** Информационное обеспечение разработки технологических процессов и наукоемкой продукции // Прогрессивные технологии в машиностроении (ТЕХНОЛОГИЯ-2000): Материалы 15-й Ежегод. Междунар. науч.-техн. конф., 18-20 апр. 2000 г., г. Одесса. - К., 2000. - С. 204-209.

163. **Радченко С.Г.** Информационное обеспечение разработки технологических процессов и наукоемкой продукции // Технология и конструирование в электрон, аппаратуре. - 2000. - № 1. - С. 40-41.

164. **Радченко С.Г.** Использование алгоритма RASTA4 для устойчивого оценивания статистических моделей в условиях высокой исходной мультиколли-неарности факторов // Мат. машини і системи. - 2002. - № 3. - С. 79-89.

165. **Радченко С.Г.** Исследование точности процесса нарезания наружных резьб самораскрывающимися головками: Дис. ... канд.техн. наук: 05.02.08.- Защищена 20.12.76; Утв. 6.04.77; 013843. - К., 1976. - 199 с. - Библиогр.: С. 156-163 (81 назв.).

166. **Радченко С.Г., Лапач С.Н, Казуров В.Н.** Компьютерные методы в проектировании конструкций и технологий изготовления композиционных материалов // Композиционные материалы в промышленности (СЛАВПОЛИКОМ-99): Тез. докл. Междунар. конф., 11-13 мая 1999 г., г. Киев. -К., 1999. -С. 142-143.

167. **Радченко С.Г**. Математическое моделирование и оптимизация сложных технических и технологических систем // Типовые механизмы и технологическая оснастка станков-автоматов, станков с ЧПУ и ГПС («СТАНКИ - 91»): Сб. тез. докл. конф., 14-15 мая 1991 г., г. Чернигов.-К.: 1991.-С. 69-70.

168. **Радченко С.Г., Фенчак В.В.** Математическое моделирование композиционных материалов по критериям нарушения сплошности при импульсных нагрузках и механическим характеристикам // Сопротивление материалов и теория сооружений. - 1984. - Вып. 44. - С. 93-96.

169. **Радченко** С.Г. Математическое моделирование технологических процессов в машиностроении. — К.: ЗАО «Укрспецмонтажпроект», 1998. - 274 с.

170. **Радченко** С.Г. Математичне моделювання та оптимізація технологічних систем: Навч.-метод. посіб. - К.: ІВЦ «Політехшка», 2001. - 88 с: іл.

171. **Радченко С.Г., Добрянский С.С.** Методические рекомендации к самостоятельному изучению дисциплин «Основы науч. исслед. и техн.

творчества», «Оптимизация и моделирование технол. процессов и объектов»: Для студентов специальности «Технология машиностроения, металлорежущие станки и инструменты» и слушателей ФПК / Киев, политехи, ин-т. - К.: КПИ, 1987. - 68 с.

172. **Радченко С.Г., Добрянский С.С, Приходько В.П.** Методические указания к выполнению курсовой работы по дисциплине «Основы научных, исследований и технического творчества» для студентов специальности 0501 «Технология машиностроения, металлорежущие станки и инструменты» / Киев, политехи, ин-т.-К.: КПИ, 1984.-35 с.

173. **Радченко** С.Г., **Лапач** С.Н. Методология создания новой техники и технологий. // Технолог, системы. - 2003. - № 1(17). - С. 41-44.

174. **Радченко С.Г.** Многофакторное математическое моделирование средств измерений и измерительных информационных систем // Тез. докл. Междунар. науч.-техн. конф. «Метрологическое обеспечение машиностроительных отраслей промышленности», (Минск, 8-10 сент. 1992 г.). - Минск, 1992. - С. 25.

175. **Радченко С.Г.** Многофакторное математическое моделирование электронных средств измерений и измерительных информационных систем // Технология и конструирование в электрон, аппаратуре. - 1993. - № 2. - С. 26-28.

176. **Радченко С.Г.** Моделирование и оптимизация конструкции и технологии изготовления спиральных монолитных сверл // Надежность режущего инструмента и оптимизация технологических систем: Сб. ст. В 2 т. / Донецк. Гос. машиностроит. акад.; Предс. редсовета Г.Л. Хает. - Краматорск, 1997. - Т. 1. - С. 50-59.

177. **Радченко С.Г.** Моделирование структуры параметров технологических процессов обработки деталей и сборки машин // Надежность режущего инструмента и оптимизация технологических систем: Сб. ст. В 2 т. / Донецк. Гос. машино-строит. акад.; Преде, редсовета Г.Л. Хает. - Краматорск, 1997. - Т. 2. - С. 46-53.

178. **Радченко С.Г., Лапач С.Н.** Оптимизация и математическое моделирование технологических процессов вибрационной обработки деталей машин // Тез. докл. респ. науч.-техн. конф. «Проблемные вопросы создания средств вибрационной техники для использования в различных технологических процессах машиностроительной отрасли Узбекистана»; 19-20 июня 1990 г., г.Ташкент. - Ташкент, 1990.-С. 54-55.

179. **Радченко С.Г., Добрянский С.С.** Оптимизация и моделирование технологических процессов и объектов: Метод,

указания к практ. занятиям по дисциплине «Основы научных исследований» для студентов специальности 0501 / Киев, политехи, ин-т. -К.: КПИ, 1981. -48 с.

180. **Радченко** С.Г., **Добрянский** С.С. Оптимизация технологических условий нарезания наружных резьб винторезными самооткрывающимися головками по критерию точности // Вестн. машиностроения.- 1986.- № 1. - С. 56-59.

181. **Радченко** С.Г., **Лапач** С.Н., **Сидоренко** Ю.А. Оптимизация технологических условий сварки полиэтиленовых труб // Математические методы планирования эксперимента в лабораторных и промышленных исследованиях: Тез. респ. науч.-практ. конф., 18-22 апр. 1989 г. - К., 1989. - С. 44.

182. **Радченко** С.Г. Основные системные свойства технологических систем // Вестн. Нац. техн. ун-та Украины «Киев, политехи, ин-т». Машиностроение. -1997. - Вып. 32. - С. 45-52.

183. **Радченко** С.Г. Основные функциональные свойства и требования к структурам математических моделей технологических процессов // Праці міжнарод. наук.-техн. конф., присвяченої 100-річчю механіко-машинобудівного і 50-річчю зварювального факультетів., 25-28 трав. 1998 р. - К., 1998. - Т. 2. -С. 237-241.

184. **Радченко С.Г., Орлюк В.А., Лапач С.Н.** Планирование имитационных экспериментов при моделировании и оптимизации технологической системы сборки многоэлементных конструкций // Математические методы планирования эксперимента в лабораторных и промышленных исследованиях: Тез. респ. науч.-практ. конф., 18-22 апр. 1989 г. - К., 1989. - С. 25-26.

185. **Радченко С.Г.** Планирование многофакторного эксперимента с использованием сложных функций и оптимальных координат факторного пространства // Мат. моделювання. - 2001. - № 2(7). - С. 15-20.

186. **Радченко С.Г.** Последовательное и специальное планирование эксперимента на основе многофакторных регулярных планов // Вестн. Нац. техн. ун-та Украины «Киев, политехи, ин-т». Машиностроение. - 2000. - Вып. 39. - С. 322-328.

187. **Радченко С.Г.** Принцип информационной коррекции переменных систематических ошибок технологических и измерительных систем // Вест. Нац. техн. ун-та Украины «Киев, политехи, ин-т». Машиностроение. - 1998. - Вып. 33. -С. 187-196.

188. **Радченко С.Г.** Проблемы принятия формализованных решений в технологических исследованиях // Вестн. Нац. техн. ун-та Украины «Киев, политехи, ин-т». Машиностроение. - 1999. - Вып. 34. - С. 88-95.

189. **Радченко С.Г.** Программа курса «Теория планирования эксперимента»: Для аспирантов и соискателей техн. специальностей / Киев, политехи, ин-т. - К.: КПИ, 1987.-20 с.

190. **Радченко С.Г.** Робастное статистическое моделирование в условиях исходной мультиколлинеарности факторов // IV Междунар. науч.-техн. конф. «Гиротехнологии, навигация, управление движением и конструирование авиационно-космической техники», 21-23 апреля 2003 г., Киев: Сб. докл. - К., 2003 - Ч. 2. -С. 320-332.

191. **Радченко С.Г.** Система предпосылок регрессионного анализа и ее выполнение при проведении прикладных исследований // Вестн. Нац. техн. ун-та Украины «Киев, политехи, ин-т». Машиностроение. - 2001. - Вып. 41. — С. 20-27.

192. **Радченко С.Г.** Системное ресурсное обеспечение создания наукоемких изделий и высоких технологий // Вест. Нац. техн. ун-та Украины «Киев, политехн, ин-т». Машиностроение. - 1997. - Вып. 32. - С. 186-193.

193. **Радченко С.Г., Лапач СМ., Бабич П.М.** Сучасна інформаційна технологія проведения комплексних агробіологічних досліджень на основі планування експерименту // Проблеми інформатизації агропромислового виробництва України в умовах ринкових вілносин: Матеріали наук.-вироб. конф., черв. 1995 р. - К.,1995.-С. 112-113.

194. **Радченко** С.Г. Теория групп преобразований в устойчивом статистическом моделировании // Системний аналіз та інформаційні технології: Матеріали VII Міжнар. наук.-техн. конф. (28 червня-2 липня 2005 р., м. Київв). - К.: НТУУ «КПІ», 2005.-С. 150.

195. **Радченко С.Г.** Топологический метод устойчивого оценивания коэффициентов многофакторного уравнения регрессии в условиях мультиколлинеарности факторов // Мат. машини і системи. — 2001. - № 1, 2. — С. 114—121.

196. **Радченко С.Г., Лапач С.Н.** Универсальная высокая технология решения разнообразных научных, технических, технологических задач // Высокие технологии в машиностроении: Междунар. науч.-техн. семинар, 27 сент.-2 окт. 1995 г. - Харьков; Алушта, 1995.- С. 106-109.

197. **Радченко С.Г.** Устойчивое оценивание коэффициентов регрессионных моделей для нестандартных областей факторного пространства **с** линейными ограничениями // Мат. машини і системи. - 2002. - № 2. - С. 90—96.

198. **Радченко С.Г.** Устойчивое оценивание коэффициентов уравнения регрессии в условиях мультиколлинеарности факторов // Применение вычислительной техники и математических методов в научных исследованиях. — К., 1986. — С. 84-86

199. **Радченко С.Г.** Устойчивые методы оценивания статистических моделей// Матер1али IX-oi]УПжнар. наук. конф. iМ. акад. М.Кравчука, 16-19 трав. 2002 р., КиТв. - К., 2002. - С. 451-452.

200. **Радченко С.Г.** Формализованный поиск структуры многофакторного уравнения регрессии в технологических исследованиях // Надежность режущего инструмента и оптимизация технологических систем: Сб. ст. В 2 т. / Донецк. Гос. машиностроит. акад.; Предс. редсовета Г.Л. Хает. - Краматорск, 1997. Т. 2. -С. 40-46.

201. **Развитие** науки о резании металлов / В.Ф. Бобров, Г.И. Грановский, Н.Н. Зорев и др.; Ред. коллегия: Н.Н. Зорев, Г.И. Грановский, М.Н. Ларин и др. -М.: Машиностроение, 1967. - 416 с.

202. **Разработка** установки для изготовления сварных соединительных деталей и узлов трубопроводов из полиэтиленовых труб диаметром 250-315 мм: Отчет о НИР (заключ.)

/ ВНИИМонтажспецстрой. Киев, фил.; Руководитель С.Г. Радченко. - № ГР 01820084480; Инв. № 02850066993. - К., 1985. - 58 с. - Отв. исполн. С.Г. Радченко и др.

203. **Разработка** и внедрение методики испытания агрегатов и узлов на основе методов математической теории планирования эксперимента: Отчет о НИР № 967 за 1975-1983 гг. (промежуточ.) / Киев, политехи, ин-т; Руководитель С.Г. Радченко. - № ГР 79019395; Инв. № 02830053163. - К., 1983.- 96 с. - Отв. исполн. С.Г. Радченко, С.С. Добрянский, Е.С. Пуховский, А.В. Сердюк.

204. **Разработка** методики планирования и проведения многофакторного эксперимента для определения оптимальных условий получения точных наружных резьб при нарезании, накатывании и обкатывании резьбонарезными головками: Отчет о НИР за 1970 г. (заключ.) / Киев, политехи, ин-т; Руководитель Г.Э. Тау-рит - К, 1971. - 54 с. - Отв. исполн. С.Г. Радченко. - Рукоп. работа.

205. **Райе Дж.** Матричные вычисления и математическое обеспечение / Пер. с англ. О.Б. Арушаняна; Под ред. В.В. Воеводина. - М.: Мир, 1984. - 264 с.

206. **Рапопорт А.** Математические аспекты абстрактного анализа систем // Общая теория систем. - М., 1966. - С. 83 -105.

207. **Робастность** в статистике. Подход на основе функций влияния

/ Ф. Хампель, Э. Рончетти, П. Рауссеу, В. Штаэль; Пер. с англ. под ред. В.М. Золотарева. - М.: Мир, 1989. - 512 с.

208. **Рыбаков И.Н.** Основы точности и метрологического обеспечения радиоэлектронных измерений. - М.: Изд-во стандартов, 1990. - 180 с.

209. **Самарский А.А.** Компьютеры. Как нам их осваивать? // НТР: проблемы и решения. 1983. - 16 июля-5 авг. (№ 5). - С. 1, 4-5.

210. **Себер** Дж. Линейный регрессионный анализ / Пер. с англ. В.П. Носко; Под. ред. М.Б. Малютова. - М.: Мир, 1980. - 456 с.

211. **Семенов** Н.А., **Ракчеева** В.Л. Алгоритм расчета гребневых оценок параметров уравнения множественной линейной регрессии // Автоматика. - 1986. -№ 4. - С. 68-70.

212. **Сигорский В.П.** Математический аппарат инженера.- К.: Техніка. -1977.-768 с.

213. **Сидоров** А.И. Основные принципы проектирования и конструирования машин. - М.: Макиз, 1929. - 428 с.

214. **Сизиков В.С.** Математические методы обработки результатов измерений: Учеб. для вузов. - СПб.: Политехника, 2001. - 240 с.

215. **Соболь И.М., Статников Р.Б.** Выбор оптимальных параметров в задачах со многими критериями. -М.: Наука, 1981. - 112 с.

216. **Соболь** И.М. Точки, равномерно заполняющие многомерный куб. - М.: Знание, 1985. - 32 с. - (Новое в жизни, науке, технике. Серия «Математика, кибернетика»; № 2).

217. **Спрент П.** Как обращаться с цифрами, или статистика в действии / Пер. с англ. А.Ф. Якубова. - Минск: Высш. шк., 1983. -271 с.

218. **Статистическое** программное обеспечение - 1988 / Пер. с англ. В.Э. Фигурнова. - М.: Интерквадро, 1989. - VI, 77 с.

219. **Статников Р.Б., Матусов И.Б.** Многокритериальное проектирование машин.- М.: Знание, 1989. - 48 с. - (Новое в жизни, науке, технике. Серия «Математика, кибернетика»; № 5).

220. **Стинрод Н., Чинн** У. Первые понятия топологии. Геометрия отображений отрезков, кривых, окружностей и кругов / Пер. с англ. И.А. Вайнштейна. - М.: Мир, 1967.-224 с.

221. **Танака К.** Итоги рассмотрения факторов неопределенности и неясности в инженерном искусстве // Нечеткие множества и теория возможностей: Последние достижения / Пер. с англ. В.Б. Кузьмина; Под ред. Р. Ягера. - М., 1986. -С. 37-50.

222. **Тихонов А.Н.** [Выступление на годичном общем собрании Академии наук СССР] // Вестн. Акад. наук СССР. - 1989. - № 2. - С. 94-95.

223. **Тихонов А.Н.** Математические модели и научно-технический прогресс: (автоматизация обработки наблюдениий) // Что такое прикладная математика. -М.: Знание, 1980. - 64 с. - (Новое в жизни, науке, технике. Серия «Математика, кибернетика»; № 10).

224. **Тихонов А.Н., Кальнер В.Д., Гласко В.Б.** Математическое моделирование технологических процессов и метод обратных задач в машиностроении. -М.: Машиностроение, 1990. - 264 с.

225. **Тихонов А.Н., Арсении В.Я.** Методы решения некорректных задач: Учеб. пособие для вузов. - 3-е изд., испр. - М.: Наука, 1986.-299с.

226. **Тихонов А.Н.** Об обратных задачах // Некорректные задачи математической физики и анализа.- Новосибирск: Наука, 1984. - 264 с.

227. **Турецкий В.Я.** Математика и информатика. - 3-е изд., испр. и доп. - М.: ИНФРА-М, 2000. - 560 с. - (Серия «Высшее образование»).

228. **Тьюки** Дж. **У.** Анализ результатов наблюдений. Разведочный анализ / Пер. с англ. А.Ф. Кушнира, А.Л. Петросяна, Е.Л. Резникова; Под ред. В.Ф. Пи-саренко. - М.: Мир, 1981. - 695 с.

229. **Устойчивые** статистические методы оценки данных / Пер. с англ. Ю.И. Малахова; Под ред. Н.Г. Волкова. - М.: Машиностроение, 1984. - 232 с.

230. **Финни** Д. Введение в теорию планирования экспериментов: Пер. с англ. / Под ред. Ю.В. Линника. - М.: Наука, 1970. - 288 с.

231. **Фишер Р.А.** Статистические методы для исследователей. - М.: Госстат-издат, 1958.-268 с.

232. **Форсайт Дж., Малькольм М., Моулер К.** Машинные методы математических вычислений / Пер. с англ. Х.Д. Икрамова. - М.: Мир, 1980. - 280 с.

233. **Фотеев Н.К.** Технология электроэрозионной обработки. - М.: Машиностроение, 1980.-184 с.

234. **Ханика Ф. де П.** Новые идеи в области управления: Рук. для управляющих / Пер. с англ. А.И. Гомана - М.: Прогресс, 1969. - 125 с.

235. **Хикс** Ч.Р. Основные принципы планирования эксперимента: Пер. с англ. / Под ред. В.В. Налимова. - М.: Мир, 1967. - 406 с.

236. **Хьюбер Дж.П.** Робастность в статистике: Пер. с англ. - М.: Мир, 1984. -306 с.

237. **Цыпкин Я.З.** Адаптация и обучение в автоматических системах. - М.: Наука, 1968.-399 с.

238. **Чупров А.А.** Очерки по теории статистики. - М.: Госстатиздат, 1959. - 320 с.

Научно-практическое издание

Кононюк Анатолий Ефимович

Основы научных исследований
(Общая теория эксперимента)

Книга 3

Авторская редакция

Подписано в печать 31.03.2011 г.
Формат 60х84/16.
Усл. печ. л. 16,5. Тираж 300 экз.

Издатель и изготовитель:
Издательство «Освита Украины»
04214, г. Киев, ул. Героев Днепра, 63, к. 40
Свидетельство о внесении в Государственный реестр
издателей ДК №1957 от 23.04.2009 г.
Тел./факс (044) 411-4397; 237-5992
E-mail: osvita2005@ukr.net, www.rambook.ru

Издательство «Освита Украины» приглашает
авторов к сотрудничеству по выпуску изданий, касающихся вопросов управления, модернизации, инновационных процессов, технологий, методических и методологических аспектов образования и учебного процесса в высших учебных заведениях.
Предоставляем все виды издательских и полиграфических услуг.