

МІЖРЕГІОНАЛЬНА
АКАДЕМІЯ УПРАВЛІННЯ ПЕРСОНАЛОМ



МАУП

НАВЧАЛЬНА ПРОГРАМА
дисципліни
“МАТЕМАТИЧНИЙ АНАЛІЗ
(МАТЕМАТИЧНИЙ АНАЛІЗ
(ДОДАТКОВІ РОЗДІЛИ))”
(для бакалаврів)

Київ
ДП «Видавничий дім «Персонал»
2012

МАУП

ЗМІСТ

Пояснювальна записка	3
Тематичний план дисципліни “Математичний аналіз (Математичний аналіз (додаткові розділи))”	4
Зміст дисципліни “Математичний аналіз (Математичний аналіз (додаткові розділи))”	4
Питання для самоконтролю	10
Список літератури	16

Підготовлено професорами кафедри прикладної математики та програмування *І. В. Бейком і Р. М. Чернігою*

Затверджено на засіданні кафедри прикладної математики та програмування (протокол № 9 від 19.05.05)

Перезатверджено на засіданні кафедри прикладної математики та програмування (протокол № 10 від 19.06.08)

Перезатверджено на засіданні кафедри прикладної математики та інформаційних технологій (протокол № 36 від 13.07.11)

Схвалено Вченою радою Міжрегіональної Академії управління персоналом

Відповідальний за випуск *А. Д. Вегеренко*
Редактор *С. Г. Рогузко*
Комп’ютерне верстання *О. Л. Тищенко, О. М. Бабаєва*

Зам. № ВКЦ-4161

Формат 60×84/16. Папір офсетний.
Друк ротатійний трафаретний.

Наклад 30 пр.

Міжрегіональна Академія управління персоналом (МАУП)
03039 Київ-39, вул. Фрометівська, 2, МАУП
ДП «Видавничий дім «Персонал»
03039 Київ-39, просп. Червонозоряний, 119, літ. ХХ

Свідоцтво про внесення до Державного реєстру суб’єктів видавничої справи ДК № 3262 від 26.08.2008

Надруковано в друкарні ДП «Видавничий дім «Персонал»

Бейко І. В., Черніга Р. М. Навчальна програма дисципліни “Математичний аналіз (Математичний аналіз (додаткові розділи))” (для бакалаврів). — К.: ДП «Вид. дім «Персонал», 2012. — 19 с.

Навчальна програма містить пояснювальну записку, тематичний план, зміст дисципліни “Математичний аналіз (Математичний аналіз (додаткові розділи))”, питання для самоконтролю, а також список літератури.

© Міжрегіональна Академія управління персоналом (МАУП), 2012
© ДП «Видавничий дім «Персонал», 2012

29. *Lewin J.* An interactive introduction to mathematical analysis (with 1 CD-ROM). – Cambridge University Press. – Cambridge, 2003. – 492 p.
30. *Pier Jean-Paul.* Mathematical analysis during the 20th century. – Oxford University Press. – New York, 2001. – 428 p.
31. *Pugh Ch. Ch.* Real mathematical analysis. – Springer-Verlag. – New York, 2002. – 437 p.

ПОЯСНЮВАЛЬНА ЗАПИСКА

Мета курсу – сформувати у студентів знання, уміння та навички розв’язування задач математичного аналізу. “Математичний аналіз” – це фундаментальна математична дисципліна, яка вивчає основи теорії дійсних чисел, числові послідовності, числові функції, теорію границь, методи диференціального та інтегрального числення, інтеграли Рімана та інтеграли Стільтьєса, функціональні ряди, теорію функцій багатьох змінних, похідні вищих порядків, кратні інтеграли, криволінійні і поверхневі інтеграли, ряди та інтеграли Фур’є, а також окремі розділи функціонального аналізу – теорію вимірних функцій та інтеграла Лебега.

Для вивчення курсу необхідні знання з математики за програмою середньої школи.

У процесі навчання студенти здобувають знання і формують навички розв’язання основних задач математичного аналізу, які потрібні у подальшому вивченні математичних дисциплін за програмою підготовки бакалаврів за спеціальністю “Прикладна математика”, зокрема:

- диференціальних рівнянь;
- диференціальних рівнянь з частинними похідними;
- методів математичного моделювання;
- математичної фізики;
- методів оптимізації;
- варіаційного числення;
- теорії оптимального керування;
- теорії ймовірностей та математичної статистики.

Для підсумкової перевірки засвоєних знань студенти складають залік і два іспити.

ТЕМАТИЧНИЙ ПЛАН
дисципліни
“МАТЕМАТИЧНИЙ АНАЛІЗ
(МАТЕМАТИЧНИЙ АНАЛІЗ (ДОДАТКОВІ РОЗДІЛИ))”

№ пор.	Назва змістового модуля і теми
	Змістовий модуль I. Функції однієї змінної
1	Елементи загальної теорії множин. Множина дійсних чисел та дійсні функції на множині дійсних чисел
2	Послідовності, границі функції однієї дійсної змінної, неперервні функції
3	Похідні та інтеграли. Інтеграл Рімана та його застосування. Похідні вищих порядків
4	Числові, функціональні і степеневі ряди та їх збіжність
5	Функції обмеженої варіації. Інтеграл Стільтьєса
	Змістовий модуль II. Функції багатьох змінних
6	Функції багатьох змінних. Похідні від функцій багатьох змінних. Елементи аналізу в метричних просторах
7	Кратні, криволінійні і поверхневі інтеграли, їх застосування
8	Ряди Фур'є. Інтеграл Фур'є
9	Вимірні функції та інтеграл Лебега
Разом годин: 270	

ЗМІСТ
дисципліни
“МАТЕМАТИЧНИЙ АНАЛІЗ
(МАТЕМАТИЧНИЙ АНАЛІЗ (ДОДАТКОВІ РОЗДІЛИ))”

Змістовий модуль I. Функції однієї змінної

Тема 1. Елементи загальної теорії множин. Множина дійсних чисел і дійсні функції на множині дійсних чисел

Повторення найважливіших понять і формул зі шкільного курсу. Логічні знаки в математичних твердженнях. Множини натуральних, цілих і раціональних чисел, їх геометричне відображення. Дії над множинами. Об'єднання, перетин, доповнення. Правила двоїстості. Декартовий добуток і декартова множина та їх використання для геометричного відображення множини розв'язків рівнянь з двома невідомими. Потужність множини. Рівнопотужні множини. Зліченні

10. *Никольський С. М.* Курс математического анализа. — М.: Наука, 1990. — Т. 1. — 528 с.
11. *Никольський С. М.* Курс математического анализа. — М.: Наука, 1990. — Т. 2. — 544 с.
12. *Рудин У.* Основы математического анализа. — М.: Наука, 1982. — 520 с.

Додаткова

13. *Берман Г. Н.* Сборник задач по курсу математического анализа. — М.: Наука, 1975.
14. *Ванагас В., Гинзбург В., Манько В. и др.* Математический анализ. — М.: Итоги ВИНТИ 22, 1984. — 256 с.
15. *Двайт Г. Б.* Таблицы интегралов и другие математические формулы. — М.: Наука, 1977. — 228 с.
16. *Дьедоне Ж.* Основы современного анализа. — М.: Мир, 1964. — 400 с.
17. *Задачи и упражнения по математическому анализу / Под ред. Б. П. Демидовича.* — М.: Наука, 1968.
18. *Зорич В. А.* Математический анализ: В 2 т. — М.: Наука, 1981. — 1984.
19. *Кудрявцев Л. Д.* Курс математического анализа. — М.: Высш. шк., 1981. — Т.1; 2.
20. *Ляшко И. И., Боярчук А. К., Гай Я. Г., Калайда А. Ф.* Математический анализ: В 3 ч. — К.: Выща шк., 1983.
21. *Фихтенгольц Г. М.* Курс дифференциального и интегрального исчисления. — М.: Наука, 1969. — Т.1–3.
22. *Godement R.* Analyse methematique. I. — Springer-Verlag. — Berlin, 1998. — 390 s.
23. *Godement R.* Analyse methematique. II. — Springer-Verlag. — Berlin, 1998. — 380 s.
24. *Godement R.* Analyse methematique. III. — Springer-Verlag. — Berlin, 2002. — 490 s.
25. *Godement R.* Analyse methematique. IV. — Springer-Verlag. — Berlin, 2003. — 599 s.
26. *Kaczor W. J., Nowak M. T.* Problems in mathematical analysis. I. — AMS, Providence, 2000. — 368 p.
27. *Kaczor W. J., Nowak M. T.* Problems in mathematical analysis. II. — AMS, Providence, 2001. — 398 p.
28. *Kaczor W. J., Nowak M. T.* Problems in mathematical analysis. III. — AMS, Providence, 2003. — 356 p.

151. Дати означення перетворення Фур'є.
152. Сформулювати теорему про знаходження функції за перетворенням Фур'є (формула обергання).
153. Записати косинус- і синус-перетворення Фур'є.
154. Дати означення міри Лебега плоских множин.
155. Сформулювати загальне поняття міри.
156. Що таке сігма-адитивність міри?
157. Дати означення борелівської множини та борелівської функції.
158. Які функції називаються вимірними?
159. Дати означення збіжності майже скрізь та збіжності за мірою.
160. Як будеється інтеграл Лебега для простих функцій?
161. Дати загальне означення інтеграла Лебега по множині скінченної міри.
162. Сформулювати теорему про абсолютну неперервність інтеграла Лебега.
163. Написати нерівність Чебишева.
164. Які умови для граничного переходу під знаком інтеграла Лебега?
165. Сформулювати теорему Леві.

СПИСОК ЛІТЕРАТУРИ

Основна

1. *Валєєв К. Г. та ін.* Вища математика: Навч.-метод. посіб. для са-мост. вивч. дисциплін. — К.: КНЕУ, 1999.
2. *Вища математика: Зб. задач / За ред. В. П. Дубовика, І. І. Юри-ка.* — К.: А.С.К, 2001.— 480 с.
3. *Вища математика: Підручник: У 2 кн. / За ред. Г. Л. Кулініча.* — К.: Либідь, 2003.
4. *Городній М. Ф., Митник Ю. В., Каши́ровський О. І.* Основи мате-матичного аналізу — К.: КМ “Академія”, 2004. — Ч.1. — 98 с.
5. *Дороговецев А. Я.* Математичний аналіз. — К.: Либідь, 1993. — Ч.1. — 320 с.
6. *Дороговецев А. Я.* Математичний аналіз. — К.: Либідь, 1993 — Ч.2. — 304 с.
7. *Дубовик В. П., Юрик І. І.* Вища математика. — К.: Вища шк., 1993. — 648 с.
8. *Ильин В. А., Садовничий В. А., Сендов Б. Х.* Математический ана-лиз. — М.: Наука, 1979. — 720 с.
9. *Колмогоров А. М., Фомін С. В.* Елементи теорії функцій та функ-ціонального аналізу. — К.: Вища шк., 1974. — 456 с.

множини. Теорема про зліченність об'єднання зліченної кількості злічених множин. Зліченність множини раціональних чисел. Теоре-ма про зліченність декартового добутку злічених множин. Теорема про існування незлічених множин. Множина потужності контину-ум.

Поняття функції. Способи задання функцій. Окремі класи функ-цій: складні, монотонні, парні, непарні, періодичні. Алгебраїчні дії над функціями. Змінні в часі функції та їх геометричне відображення. Існування ірраціональних чисел. Множини дійсних чисел: відрізок, інтервал, півінтервал, окіл. Точні межі множини дійсних чисел. Дії над дійсними числами. Сума, добуток, степінь, корінь, середнє ариф-метичне і середнє геометричне та нерівності Коші.

Література [1; 3; 5; 7; 8; 10; 12]

Тема 2. Послідовності, границі функції однієї дійсної змінної, неперервні функції

Функції з областю визначення на множині натуральних чисел (послідовності).

Збіжні послідовності та методи відшукування границі збіжної послідовності. Нескінченні границі. Теорема про границі суми, добутку та частки послідовностей. Теорема про єдиність границі збіжної послідовності. Теорема про обмеженість збіжної послідовності. Теорема про три послідовності.

Монотонні послідовності. Критерій існування границі монотонної послідовності. Підпослідовності і часткові границі послідовностей. Теорема про існування збіжної підпослідовності в обмеженій послідовності. Критерій Коші про збіжність послідовності. Граничний перехід в арифметичних операціях над послідовностями. Граничний перехід у нерівностях. Верхня і нижня границі послідовності.

Гранична точка множини. Означення Коші і означення Гайне гра-ниці функції у точці та теорема про їх рівносильність. Властивості границі функції у точці.

Однобічні границі. Існування границі функції у точці. Досліджен-ня локальної поведінки функції. Властивості границь функцій. Граничний перехід і арифметичні операції над функціями. Заміна змін-них при обчисленні границь. Відношення “О” та “о” та їх властивості. Асимптотична поведінка функції. Еквівалентні функції. Видокрем-лення головної частини функції. Означення неперервності функції в точці та на множині. Приклади функцій, неперервних лише в одній точці. Властивості функцій, неперервних у точці. Арифметичні опе-

рації над неперервними функціями. Проміжні значення неперервної функції. Точки розриву функції. Типи точок розриву.

Література [1; 3; 5; 7; 8; 10; 12]

Тема 3. Похідні та інтеграли. Інтеграл Рімана та його застосування. Похідні вищих порядків

Середня швидкість і миттєва швидкість зростання значення функції із зростанням значення аргументу. Означення похідної та її геометрична інтерпретація. Похідні від елементарних функцій. Обчислення похідної від суми, добутку, частки, оберненої функції та композиції функцій. Приклади неперервних функцій, які не мають похідної. Теорема Ферма, Роля, Лагранжа і Коші про значення похідних. Наслідки цих теорем та приклади їх застосування. Диференціал функції. Необхідна і достатня умова диференційовності функції в точці. Похідні і диференціали старших порядків. Формули Тейлора для елементарних функцій. Розкриття невизначеностей за правилом Л'юпітала. Використання поліноміальних наближень для підвищення точності наближеного розв'язку алгебраїчного рівняння. Дослідження функцій за допомогою похідних. Умови локального екстремуму. Знаходження екстремумів функцій. Визначення проміжків опуклості, точок перегину, асимптот. Побудова графіків.

Інтегральна властивість функції — площа криволінійної трапеції. Зв'язок між площею криволінійної трапеції та похідною. Площа криволінійної трапеції для найпростіших функцій. Невизначений інтеграл та його основні властивості. Таблиця інтегралів основних елементарних функцій. Два основних методи інтегрування (заміна змінних та інтегрування частинами). Інтегрування раціональних дробів. Формула Ньютона — Лейбніца. Властивості визначеного інтеграла — інтеграла Рімана. Приклади обчислення визначених інтегралів. Формули для точного обчислення площі криволінійної трапеції. Функції, для яких будуються точні формули обчислення площі криволінійної трапеції. Обчислення об'єму тіл обертання. Обчислення довжини дуги гладкої кривої. Обчислення поверхні тіл обертання. Невласні інтеграли за необмеженими інтервалами. Критерій Коші збіжності, абсолютно й умовно збіжні інтеграли. Достатні ознаки збіжності. Невласні інтеграли від необмежених функцій. Заміна змінних і формула інтегрування частинами для невластних інтегралів. Рівномірна збіжність невластних інтегралів, що залежать від параметра. Дослідження збіжності невластних інтегралів.

Література [1;3; 5; 7; 8; 10;12]

124. Сформулювати теорему, яка зводить обчислення криволінійного інтеграла першого роду до відповідного інтеграла Рімана.
125. Дати означення криволінійного інтеграла другого роду через границю відповідної інтегральної суми.
126. Який зв'язок між криволінійними інтегралами першого і другого родів?
127. Що таке гладка крива в m -вимірному просторі?
128. Записати формулу Гріна і пояснити її застосування.
129. Коли значення криволінійного інтеграла не залежить від шляху інтегрування?
130. Що таке двовимірний многовид (поверхня) в m -вимірному просторі?
131. Записати формулу для обчислення площі поверхні, заданої параметрично, у тривимірному просторі.
132. Записати формулу для обчислення площі поверхні, заданої явним чином, у тривимірному просторі.
133. Сформулювати теорему, яка зводить обчислення поверхневого інтеграла першого роду до відповідного подвійного інтеграла.
134. Яка фізична інтерпретація поверхневого інтеграла першого роду і як за його допомогою знайти центр маси поверхні?
135. Як вводиться орієнтація гладкої поверхні?
136. Який загальний запис поверхневого інтеграла другого роду по орієнтованій поверхні?
137. Записати та пояснити формулу Гауса — Остроградського.
138. Сформулювати фізичну інтерпретацію формули Гауса — Остроградського і записати її у векторній формі.
139. Дати означення ортонормованої системи функцій.
140. Які властивості ортонормованої системи тригонометричних функцій?
141. Як обчислюються коефіцієнти Фур'є?
142. Як розвинути функцію у тригонометричний ряд Фур'є?
143. Що таке комплексна форма ряду Фур'є?
144. Розповісти про ядра Діріхле і Феєра.
145. Сформулювати теорему про збіжність ряду Фур'є в точці.
146. Сформулювати теорему про рівномірну збіжність рядів Фур'є.
147. За яких умов можна почленно диференціювати ряди Фур'є?
148. За яких умов можна почленно інтегрувати ряди Фур'є?
149. Що таке інтеграл Фур'є та інтегральні формули Фур'є.
150. Сформулювати ознаки Діні та Ліпшиця.

104. Сформулювати необхідні умови для існування локальних екстремумів функції багатьох змінних.
105. Сформулювати достатні умови для існування локальних екстремумів функції багатьох змінних.
106. Сформулювати достатні умови для існування локальних екстремумів функції двох змінних.
107. Ввести поняття вектор-функції (відображення), дати означення лінійної вектор-функції.
108. Дати означення неперервності вектор-функції в точці та на множині.
109. Сформулювати теорему про умови для неперервності вектор-функції.
110. Дати означення диференційовності вектор-функції в точці та на множині.
111. Що таке розбиття прямокутника у двовимірному просторі Евкліда?
112. Дати означення подвійного інтеграла по прямокутнику.
113. Сформулювати теорему, яка зводить обчислення подвійного інтеграла по прямокутнику до двох інтегралів Рімана.
114. Дати означення потрійного інтеграла по паралелепіпеду в тривимірному просторі Евкліда.
115. Сформулювати теорему, яка зводить обчислення потрійного інтеграла по паралелепіпеду до подвійного інтеграла та інтеграла Рімана.
116. Дати означення вимірної за Жорданом множини на площині.
117. Дати означення m -кратного інтеграла за вимірною (за Жорданом) множиною, вважаючи, що $m=2$ або $m=3$.
118. Сформулювати найпростіші властивості m -кратного інтеграла.
119. Записати формулу обчислення m -кратного інтеграла від неперервної функції по циліндричній множині.
120. Що таке якобіан відображення? Яка його величина при переході до полярної системи координат?
121. Сформулювати теорему про заміну змінних для обчислення кратних інтегралів?
122. Дати означення криволінійного інтеграла першого роду через границю відповідної інтегральної суми.
123. Яка фізична інтерпретація криволінійного інтеграла першого роду, якщо підінтегральна функція є невід'ємною?

Тема 4. Числові, функціональні і степеневі ряди та їх збіжність

Числовий ряд, його сума, збіжність. Необхідна умова збіжності ряду. Властивості збіжних рядів. Критерій Коші збіжності ряду. Ряди з невід'ємними членами. Критерій збіжності і наслідок. Ознаки порівняння. Ознаки Д'Аламбера і Коші. Логарифмічна ознака та інтегральна ознака Маклорена — Коші збіжності рядів з невід'ємними членами. Знакозмінні ряди. Ряди Лейбніца. Абсолютно й умовно збіжні ряди. Властивості абсолютно збіжних рядів. Ознаки збіжності Лейбніца, Діріхле та Абеля. Інші властивості збіжних рядів: групування та переставлення членів ряду, множення рядів.

Функціональні ряди. Множина збіжності ряду. Рівномірна збіжність функціонального ряду. Критерій Коші рівномірної збіжності функціонального ряду. Ознаки рівномірної збіжності. Властивості рівномірно збіжних рядів. Степеневі ряди. Радіус збіжності та множина збіжності степеневих рядів. Теорема Коші — Адамара. Рівномірна збіжність степеневих рядів. Властивості суми степеневих рядів. Розвинення функцій в степеневі ряди Тейлора і Маклорена. Поняття комплексного числа. Комплексні розв'язки алгебраїчних рівнянь та їх геометричне відображення. Дії над комплексними числами. Тригонометричні і гіперболічні функції. Тригонометричне зображення комплексних чисел. Степеневі ряди з комплексними членами. Теорема Коші — Адамара для комплексних рядів. Показникова функція на комплексній площині.

Література [1; 3; 5; 7; 8; 10; 12]

Тема 5. Функції обмеженої варіації. Інтеграл Стільтьєса

Монотонні функції та їх найпростіші властивості. Теорема про розклад монотонної функції. Поняття функції обмеженої варіації. Означення і приклади. Теорема Жордана. Інтеграл Стільтьєса. Суми Дарбу — Стільтьєса. Критерій інтегровності. Класи інтегровних функцій. Властивості інтеграла Стільтьєса. Інтеграл Стільтьєса відносно функції обмеженої варіації. Теорема про граничний перехід.

Література [5; 9; 11; 12]

Змістовий модуль II. Функції багатьох змінних

Тема 6. Функції багатьох змінних. Похідні від функцій багатьох змінних. Елементи аналізу в метричних просторах

Відстань між векторами у багатовимірному просторі Евкліда. Окіл вектора. Границя послідовності векторів. Метрика метричного простору та її властивості.

Функції двох змінних, поняття функції багатьох змінних. Функції на метричних просторах. Границя функції у точці. Неперервні функції. Необхідна та достатня умови неперервності. Компактні множини та їх властивості. Властивості неперервних функцій на компактах. Нерухома точка, принцип стискаючих відображень (теорема Банаха). Застосування теореми Банаха, зокрема, для розв'язання функціональних рівнянь. Функції багатьох змінних. Границя функції багатьох змінних. Неперервність функції багатьох змінних у точці. Неперервність композиції неперервних функцій. Неперервність функції на множині. Теорема про функції, неперервні на множинах. Рівномірна неперервність. Частинні похідні і частинні диференціали функції багатьох змінних. Градієнт функції. Похідна за напрямом. Диференційованість функції в точці. Диференціал функції. Диференціювання складної функції. Інваріантність форми першого диференціала. Основні закони диференціювання. Геометричний зміст частинних похідних і повного диференціала. Похідні і диференціали вищих порядків. Формула Тейлора. Локальні екстремуми функції багатьох змінних. Необхідні умови локального екстремуму. Достатні умови строго локального екстремуму. Опуклі функції. Поняття вектор-функції (відображення). Неперервність відображень. Диференційовність відображень. Властивості диференційовних відображень. Теорема про диференціювання складної вектор-функції. Теорема про існування і властивості оберненого відображення.

Література [1; 3; 5; 7; 8; 10; 12]

Тема 7. Кратні, криволінійні і поверхневі інтеграли, їх застосування

Поняття розбиття прямокутника. Виведення подвійного інтеграла по прямокутнику. Теорема про безпосереднє обчислення подвійного інтеграла по прямокутнику (зведення подвійного інтеграла до двох інтегралів Рімана). Виведення потрійного інтеграла по 3-вимірному брусі (паралелепіпеді). Формули обчислення потрійних інтегралів

80. Сформулювати теорему про граничний перехід під знаком в інтеграла Стільтьєса.
81. Дати означення метрики (віддалі) та метричного простору.
82. Сформулювати властивості віддалі в метричному просторі.
83. Дати означення збіжності послідовності елементів метричного простору.
84. Що таке внутрішня точка множини?
85. Дати означення фундаментальної послідовності в метричному просторі та повного метричного простору.
86. Ввести поняття функції, що діє з одного метричного простору в інший, і дати означення границі такої функції в точці.
87. Дати означення неперервності функції в точці та на множині.
88. Які основні властивості неперервних дійсних функцій?
89. Дати означення покриття та відкритого покриття множини.
90. Ввести поняття компактної множини та компактного простору.
91. Сформулювати теорему Больцано — Ваєрштраса для компактних множин.
92. Сформулювати критерій компактності (теорема Гауздорфа).
93. Дати означення нерухомої точки та відображення стиску.
94. Сформулювати теорему Банаха.
95. Дати означення похідної за напрямом у точці та на відкритій множині.
96. Сформулювати теорему про обчислення похідних за напрямом.
97. Дати означення частинної похідної дійсної функції багатьох змінних за k -тою змінною.
98. Дати означення похідної (градієнта) дійсної функції багатьох змінних.
99. Записати формулу, що виражає похідну за напрямом через градієнт.
100. Дати означення диференційовності функції та диференціала функції.
101. Сформулювати теорему про диференційовність суми, добутку та частки двох диференційовних функцій.
102. Дати означення похідної другого порядку за двома напрямками і частинної похідної другого порядку.
103. Дати означення точки абсолютного максимуму (мінімуму) і локального максимуму (мінімуму) для дійсної функції багатьох змінних.

51. Сформулювати основну теорему інтегрального числення (формула Ньютона — Лейбніца).
52. Записати формулу для обчислення об'єму тіла обертання.
53. Що таке невластний інтеграл за необмеженим інтервалом і який критерій його збіжності?
54. Що таке абсолютна та умовна збіжність невластних інтегралів?
55. Дати означення невластного інтеграла від необмеженої функції.
56. Дати означення збіжності числового ряду.
57. Сформулювати три ознаки порівняння.
58. Сформулювати ознаку Д'Аламбера.
59. Сформулювати ознаку Коші.
60. Сформулювати інтегральну ознаку Маклорена — Коші.
61. Дати означення умовно і абсолютно збіжного рядів.
62. Сформулювати ознаку Лейбніца збіжності числових рядів.
63. Сформулювати ознаку Абеля збіжності числових рядів.
64. Дати означення поточної та рівномірної збіжностей функціонального ряду.
65. Сформулювати ознаку Ваєрштраса збіжності функціональних рядів.
66. Дати означення степеневому ряду та його радіусу збіжності.
67. Сформулювати теорему Коші — Адамара.
68. Сформулювати теорему про неперервність суми степеневому ряду.
69. Написати формули розвинення функції в ряди Маклорена і Тейлора.
70. Дати означення збіжності та абсолютної збіжності ряду з комплексними числами.
71. Сформулювати теорему Коші — Адамара для збіжності степеневому ряду.
72. Дати означення функції обмеженої варіації.
73. Що таке варіація функції?
74. Сформулювати теорему Жордана.
75. Записати суми Дарбу — Стільгьеса.
76. Дати означення інтеграла Стільгьеса (Рімана — Стільгьеса).
77. Сформулювати властивості інтеграла Стільгьеса.
78. Чи є неперервна функція інтегрованою за Стільгьесом?
79. Чи існує інтеграл Стільгьеса відносно функції обмеженої варіації?

шляхом зведення до подвійних та інтегралів Рімана. Властивості подвійних та потрійних інтегралів по брусах. Вимірні множини за Жорданом. Міра Жордана. Циліндричні множини. Подвійні та потрійні інтеграли по вимірних множинах. Формули для обчислення таких інтегралів. Формули заміни змінних, зокрема, переходу до полярної системи координат.

Криволінійний інтеграл 1-го роду і його властивості. Зведення до інтеграла Рімана (визначеного інтеграла). Криволінійний інтеграл 2-го роду і його властивості. Випадок замкнутого контуру. Формула Гріна. Зв'язок між криволінійними інтегралами 1-го та 2-го роду. Застосування криволінійних інтегралів 1-го та 2-го роду. Поверхневі інтеграли 1-го роду. Зведення поверхневого інтегралу до подвійного. Односторонні та двосторонні поверхні. Орієнтація поверхні. Приклад односторонньої поверхні (лист Мьобіуса). Поверхневі інтеграли 2-го роду. Зв'язок між поверхневими інтегралами 1-го та 2-го роду. Формула Гауса — Остроградського. Застосування формули Гауса — Остроградського для обчислення поверхневих інтегралів.

Література [1; 3; 6–8; 11; 12]

Тема 8. Ряди Фур'є. Інтеграл Фур'є

Ряд Фур'є по ортонормованій послідовності функцій. Збіжність у середньому квадратичному. Рівність Парсеваля. Коефіцієнти Фур'є. Розвинення функцій в тригонометричний ряд Фур'є. Комплексна форма ряду Фур'є. Збіжність рядів Фур'є. Ядро Діріхле і інтеграл Діріхле. Ядро Феєра, теорема Феєра та її наслідки. Рівномірна збіжність рядів Фур'є. Диференціювання та інтегрування рядів Фур'є. Інтеграл Фур'є. Збіжність інтеграла Фур'є в точці. Ознаки Діні та Лівшиця. Перетворення Фур'є та його властивості. Застосування перетворення Фур'є.

Література [1; 3; 6–8; 11; 12]

Тема 9. Вимірні функції та інтеграл Лебега

Міра плоских множин. Міра Лебега плоских множин. Загальне поняття міри. Адитивність та сігма-адитивність. Продовження міри за Лебегом. Продовження міри за Жорданом. Вимірні функції: означення та властивості. Дії над вимірними функціями. Збіжність майже скрізь і збіжність за мірою. Теорема Єгорова. Інтеграл Лебега для простих функцій. Загальне означення інтеграла Лебега. Абсолютна неперервність і граничний перехід під знаком інтеграла Лебега. Порівняння інтеграла Лебега та інтеграла Рімана.

Література [9; 11; 12]

ПИТАННЯ ДЛЯ САМОКОНТРОЛЮ

1. Дати поняття множини і навести означення дій над множинами.
2. Дати означення відображення (функції), образу та праобразу відображення. Що таке бієкція?
3. Дати означення рівнопотужності та зліченності множин.
4. Що таке множини цілих, раціональних і дійсних чисел і яка потужність кожної з цих множин?
5. Описати діагональний метод Кантора та його застосування.
6. Що таке середнє арифметичне і середнє геометричне? Сформулювати нерівність Коші для них.
7. Сформулювати дві нерівності Коші.
8. Дати означення точної верхньої та нижньої граней числової множини.
9. Чи може незліченна множина бути обмеженою? Навести приклад.
10. Сформулювати лему про вкладені відрізки?
11. Дати означення границі послідовності (окремо для випадку збіжності до нескінченності). Чи можуть елементи числової послідовності мати однакові значення?
12. Сформулювати теорему про границі суми, частки та добутку збіжних послідовностей.
13. Сформулювати теорему про три послідовності.
14. Знайти границю послідовності чисел коренів n -го степеня від чисел $n = 1, 2, 3, \dots$.
15. Отримати число Ойлера e як границю числової послідовності.
16. Дати означення фундаментальної послідовності.
17. Сформулювати критерій Коші збіжності послідовності.
18. Що таке границя функції в точці? Дати означення за Коші і Гайне.
19. Яке значення набуває границя $\sin x/x$ при x , що прямує до нуля.
20. Що таке 'о'-маленьке? Сформулювати теорему, яка зводить існування 'о'-маленького між двома функціями до існування відповідної границі.
21. Дати означення еквівалентності двох функцій.
22. Означення неперервності функції в точці.
23. Сформулювати теорему про неперервність суми, частки та добутку двох функцій.
24. Сформулювати дві теореми Ваєрштраса про неперервну функцію на відрізку.
25. Дати означення рівномірно неперервної функції і навести приклад такої функції, яка є неперервною, але не є рівномірно неперервною.
26. Дати означення похідної функції в точці.
27. Пояснити геометричний зміст похідної.
28. Пояснити фізичний зміст похідної.
29. Сформулювати теорему про похідні від суми, добутку і частки двох функцій.
30. Як знайти похідну суперпозиції двох функцій: складної та оберненої?
31. Записати похідні від найпростіших елементарних функцій.
32. Сформулювати теореми Ферма і Лагранжа для функцій, які мають похідні.
33. Що таке диференціал функції? Сформулювати теорему, яка зводить обчислення диференціала функції в точці до обчислення похідної.
34. Записати формули Тейлора із залишковим членом у формі Пеано і Лагранжа.
35. Що таке правила Л'юпіталя і для чого вони застосовуються?
36. Який зв'язок між монотонністю функції та її похідною?
37. Сформулювати необхідні і достатні умови екстремуму функції.
38. Що таке точка перегину функції та як її шукати?
39. Яка схема побудови графіка заданої функції за допомогою похідних і границь?
40. Дати означення первісного та невизначеного інтеграла.
41. Сформулювати найпростіші властивості невизначеного інтеграла.
42. Записати невизначені інтеграли в разі найпростіших елементарних функцій.
43. Сформулювати два основних способи знаходження невизначених інтегралів (методи підстановки та інтегрування частинами).
44. Як інтегрувати найпростіші раціональні дроби?
45. Записати загальну схему інтегрування раціонального дроби.
46. Які інтеграли підстановками зводяться до інтегрування раціонального дроби?
47. Що таке визначений інтеграл (інтеграл Рімана)?
48. Яка геометрична інтерпретація інтеграла Рімана?
49. Сформулювати умову інтегрованості функції на відрізку.
50. Сформулювати властивості інтеграла Рімана.