

МІЖРЕГІОНАЛЬНА
АКАДЕМІЯ УПРАВЛІННЯ ПЕРСОНАЛОМ



МАУП

НАВЧАЛЬНА ПРОГРАМА
дисципліни
“РІВНЯННЯ МАТЕМАТИЧНОЇ ФІЗИКИ”
(для бакалаврів)

Київ
ДП «Видавничий дім «Персонал»
2010

МАУП

ПОЯСНЮВАЛЬНА ЗАПИСКА

Мета курсу — здобути знання, вміння та навички розв’язання задач з курсу рівнянь математичної фізики. Математична фізика — фундаментальна математична дисципліна, предметом якої є побудова та дослідження математичних моделей фізичних явищ. Основою цих математичних моделей є диференціальні (як правило, з частинними похідними) та інтегро-диференціальні рівняння, які впливають із відомих законів фізики. Усі класичні розділи фізики — механіка, гідромеханіка та термодинаміка суцільного середовища (гідро- та аеродинаміка, теорія пружності, теорія дифузії та теплопровідності), електродинаміка, квантова механіка та теорія поля — базуються на законах, які можна записати у вигляді відповідних рівнянь математичної фізики.

Для вивчення курсу необхідні знання з теорії функції комплексної змінної, математичного аналізу, лінійної алгебри та звичайних диференціальних рівнянь.

У процесі навчання студенти здобувають знання і формують навички розв’язання основних задач з математичної фізики, потрібні для подальшого вивчення математичних дисциплін за програмою підготовки бакалавра за спеціальністю “Прикладна математика”, зокрема, для вивчення:

- числових методів розв’язання рівнянь математичної фізики;
- диференціальних рівнянь з частинними похідними;
- методів математичного моделювання;
- варіаційного числення.

Для підсумкової перевірки засвоєних знань студенти складають екзамен.

ТЕМАТИЧНИЙ ПЛАН дисципліни

“РІВНЯННЯ МАТЕМАТИЧНОЇ ФІЗИКИ”

№ пор.	Назва змістового модуля і теми
1	2
1	Змістовий модуль I. Основні типи рівнянь математичної фізики Класифікація лінійних рівнянь і класичні приклади рівнянь математичної фізики
2	Метод відокремлення змінних та його застосування

Підготовлено професором кафедри прикладної математики та програмування *Р. М. Чернігою*

Затверджено на засіданні кафедри прикладної математики та програмування Інституту інформаційних технологій МАУП (протокол № 5 від 18.01.06)

Перезатверджено на засіданні кафедри прикладної математики та інформаційних технологій (протокол № 6 від 12.03.09)

Схвалено Вченою радою Міжрегіональної Академії управління персоналом

Черніга Р. М. Навчальна програма дисципліни “Рівняння математичної фізики” (для бакалаврів). — К.: ДП «Вид. дім «Персонал», 2010. — 12 с.

Навчальна програма містить пояснювальну записку, тематичний план, зміст дисципліни “Рівняння математичної фізики”, питання для самоконтролю, а також список літератури.

- © Міжрегіональна Академія управління персоналом (МАУП), 2010
- © ДП «Видавничий дім «Персонал», 2010

1	2
3	Змістовий модуль II. Спеціальні функції в математичній фізиці
4	Узагальнені гіпергеометричні та сферичні функції
5	Циліндричні функції
6	Змістовий модуль III. Класичні рівняння математичної фізики
7	Рівняння Лапласа та Пуассона
8	Рівняння дифузії (теплопровідності)
9	Хвильове рівняння (рівняння Д'Аламбера)
10	Нелінійні рівняння математичної фізики
Разом годин: 108	

ЗМІСТ
дисципліни

“РІВНЯННЯ МАТЕМАТИЧНОЇ ФІЗИКИ”

Змістовий модуль I. Основні типи рівнянь математичної фізики

Тема 1. Класифікація лінійних рівнянь і класичні приклади рівнянь математичної фізики

Поняття загального диференціального рівняння з частинними похідними (ДРЧП); лінійні ДРЧП другого порядку; класифікація лінійних ДРЧП другого порядку (еліптичні, гіперболічні та параболічні) за характеристичними формами; характеристики лінійних ДРЧП другого порядку та рівняння характеристик; приклади знаходження характеристик для двовимірних ДРЧП; рівняння Лапласа, хвильове рівняння (рівняння Д'Аламбера) та рівняння теплопровідності (дифузії); фізичні задачі (про коливання струни, про перенесення тепла), які приводять до цих рівнянь; фундаментальні розв'язки цих рівнянь.

Література [1–10; 12; 13]

Тема 2. Метод відокремлення змінних та його застосування

Задача Діріхле (перша крайова задача) та задача Ноймана (друга крайова задача) для рівняння Лапласа; перша крайова задача для рівняння теплопровідності; перша і друга крайові задачі у випадку двовимірних рівнянь Лапласа і теплопровідності та хвильового рівняння; формула Д'Аламбера; метод відокремлення змінних (метод Фур'є) для лінійних ДРЧП; розв'язання рівняння дифузії на відрізку методом відокремлення змінних; розв'язання хвильового рівняння на відрізку методом відокремлення змінних; загальна схема методу

відокремлення змінних для крайових задач; розв'язання задачі Діріхле для рівняння Лапласа на крузі методом відокремлення змінних.

Література [1–10; 12; 13]

Змістовий модуль II. Спеціальні функції в математичній фізиці

Тема 3. Узагальнені гіпергеометричні та сферичні функції

Узагальнені гіпергеометричні функції: означення та основні властивості. Зв'язок узагальнених гіпергеометричних функцій з елементарними та спеціальними функціями. Виродження узагальнених гіпергеометричних функцій. Узагальнене гіпергеометричне рівняння. Гармонічні поліноми та їх властивості. Означення сферичних функцій. Ортогональність і повнота системи сферичних функцій на сфері одиничного радіуса. Диференціальне рівняння сферичних функцій. Загальний вигляд розв'язку рівняння Лапласа у сферичних координатах. Розклад фундаментального розв'язку рівняння Лапласа в ряд за сферичними функціями. Розв'язок задачі Діріхле для рівняння Лапласа в кулі методом відокремлення змінних.

Література [4; 5, 9–13]

Тема 4. Циліндричні функції

Циліндричні функції. Означення та класифікація циліндричних функцій. Співвідношення між циліндричними функціями Беселя, Ноймана і Ганкеля. Диференціальне рівняння для циліндричних функцій. Циліндричні функції у випадку, коли незалежна змінна прямує до нуля або до нескінченності. Метод перевалу. Ортогональність і повнота системи циліндричних функцій на відрізку. Загальний вигляд розв'язку рівняння Лапласа в циліндричних координатах. Розв'язок задачі Діріхле для рівняння Лапласа в циліндрі методом відокремлення змінних.

Література [4; 5; 9–13]

Змістовий модуль III. Класичні рівняння математичної фізики

Тема 5. Рівняння Лапласа та Пуассона

Означення та фізична інтерпретація рівнянь Лапласа та Пуассона. Введення n -вимірних сферичних координат. Фундаментальний розв'язок рівняння Лапласа в n -вимірному просторі. Функція Гріна задачі Діріхле. Функція Гріна в n -вимірному просторі. Розв'язок задачі Діріхле в n -вимірному півпросторі за допомогою функції Гріна. Розв'язок задачі Діріхле в n -вимірній кулі за допомогою функції Гріна.

Література [1–10; 12]

Тема 6. Рівняння дифузії (теплопровідності)

Означення та сфери застосування рівняння дифузії. Фундаментальний розв'язок рівняння дифузії в n -вимірному просторі. Розв'язок задачі Коші для рівняння дифузії в n -вимірному просторі. Постановка основних крайових (межових) задач для рівняння теплопровідності та теореми про умови єдиності розв'язку цих задач. Єдиність і неперервна залежність класичного розв'язку змішаної крайової задачі для загального рівняння дифузії зі змінними коефіцієнтами.

Література [1–10; 12]

Тема 7. Хвильове рівняння (рівняння Д'Аламбера)

Означення та сфери застосування хвильового рівняння (рівняння Д'Аламбера). Розв'язок задачі Коші для $(n+1)$ -вимірного хвильового рівняння, а саме при $n = 1, 2, 3$. Формули Д'Аламбера та Пуасона. Принцип Гюйгенса. Постановка основних крайових (межових) задач для хвильового рівняння та теореми про умови єдиності розв'язку цих задач. Єдиність і неперервна залежність класичного розв'язку змішаної крайової задачі для загального хвильового рівняння зі змінними коефіцієнтами. Поняття про інтеграл енергії.

Література [1–10; 12]

Тема 8. Нелінійні рівняння математичної фізики

Роль нелінійних диференціальних рівнянь при моделюванні процесів живої та неживої природи. Основні методи побудови точних розв'язків для нелінійних рівнянь: метод оберненої задачі розсіювання, метод симетрії Лі, а також деякі найновіші підходи. Ілюстрація методу оберненої задачі розсіювання на прикладі нелінійного рівняння Шрьодінгера. Побудова точних розв'язків і дослідження їх властивостей у випадку деяких нелінійних рівнянь математичної фізики та біології: рівняння Бюргерса, рівняння Фішера та деяких рівнянь типу реакції — дифузії — конвекції.

Література [14–21]

ПИТАННЯ ДЛЯ САМОКОНТРОЛЮ

1. Загальний вигляд диференціального рівняння з частинними похідними.
2. Загальний вигляд лінійного диференціального рівняння з частинними похідними другого порядку.

3. Принцип лінійної суперпозиції розв'язків.
4. Як записується відповідна квадратична форма для заданого лінійного диференціального рівняння з частинними похідними другого порядку?
5. Канонічний вигляд квадратичної форми.
6. Означення параболічного, еліптичного та гіперболічного типів рівнянь за коефіцієнтами канонічної квадратичної форми заданого рівняння.
7. Означення характеристичної кривої (характеристики) для рівняння другого порядку з двома незалежними змінними.
8. Рівняння характеристик для рівняння другого порядку з двома незалежними змінними.
9. Теорема для визначення параболічності, еліптичності та гіперболічності рівняння другого порядку з двома незалежними змінними.
10. Рівняння Трікомі та області, в яких воно еліптичне і гіперболічне.
11. Рівняння Лапласа та оператор Лапласа.
12. Що таке гармонічна функція?
13. Фундаментальні розв'язки рівняння Лапласа.
14. Принцип максимуму для рівняння Лапласа.
15. Оператор Лапласа для двох незалежних функцій.
16. Що отримується в підсумку, якщо подіяти оператором Лапласа на дійсну або уявну частину аналітичної функції?
17. Що таке задача Діріхле для круга?
18. Як розв'язати задачу Діріхле за допомогою функції Гріна?
19. Функція Гріна для півплощини.
20. Функція Гріна для круга.
21. Багатовимірне хвильове рівняння (рівняння Д'Аламбера).
22. Загальний розв'язок двовимірного хвильового рівняння.
23. Формула Д'Аламбера для двовимірного хвильового рівняння.
24. Формула Пуасона для $(1+2)$ -вимірного хвильового рівняння.
25. Багатовимірне рівняння теплопровідності (дифузії).
26. Двовимірне рівняння теплопровідності.
27. Який розв'язок рівняння теплопровідності називається фундаментальним?
28. Принцип максимуму для рівняння теплопровідності.
29. Формула Пуасона, якою задається розв'язок задачі Коші для двовимірного рівняння теплопровідності.
30. Як обчислюються похідні у формулі Пуасона?
31. Формула Пуасона, якою задається розв'язок задачі Коші для багатовимірного рівняння теплопровідності.

32. Постановка задачі про коливання струни із закріпленими кінцями (основна змішана задача для хвильового рівняння).
33. Схема побудови розв'язку задачі про коливання струни із закріпленими кінцями методом Фур'є.
34. Розв'язок задачі про коливання струни із закріпленими кінцями у формі ряду Фур'є.
35. Загальний вигляд лінійного ДРЧП другого порядку, для якого можна реалізувати метод Фур'є.
36. Схема побудови розв'язку крайової задачі (з нульовими умовами на межі) для лінійного ДРЧП другого порядку методом Фур'є.
37. Що таке задача Штурма-Ліувіля?
38. Що таке власні значення та власні функції задачі Штурма-Ліувіля?
39. Що таке узагальнена гіпергеометрична функція?
40. Властивості гіпергеометричних функцій.
41. Зв'язок гіпергеометричних функцій з елементарними.
42. Узагальнене гіпергеометричне рівняння.
43. Що таке гармонічні поліноми?
44. Які властивості гармонічних поліномів?
45. Означення сферичних функцій.
46. Що таке ортогональність сферичних функцій на сфері?
47. Диференціальне рівняння для сферичних функцій.
48. Який загальний вигляд розв'язку рівняння Лапласа у сферичних координатах?
49. Розвинути в ряд за сферичними функціями фундаментальний розв'язок рівняння Лапласа.
50. Означення циліндричних функцій.
51. Класифікація циліндричних функцій.
52. Зв'язок між циліндричними функціями Бесселя, Ноймана і Ганкеля.
53. Диференціальне рівняння, яке приводить для циліндричних функцій.
54. Поведінка циліндричних функцій на нескінченності.
55. Що таке ортогональність циліндричних функцій на відрізку?
56. Загальний вигляд розв'язку рівняння Лапласа в циліндричних координатах.
57. Розв'язання задачі Діріхле для рівняння Лапласа в циліндрі методом відокремлення змінних.
58. Рівняння Пуассона. Як отримати з нього рівняння Лапласа?
59. Фундаментальне розв'язання рівняння Лапласа в n -вимірному просторі.
60. Що таке функція Гріна задачі Діріхле для двовимірного простору?
61. Функція Гріна в n -вимірному просторі.
62. Розв'язок задачі Діріхле у тривимірному півпросторі за допомогою функції Гріна.
63. Розв'язок задачі Діріхле в кулі за допомогою функції Гріна.
64. Розв'язок задачі Коші для рівняння дифузії в $(n+1)$ -вимірному просторі.
65. Які три умови повинен задовольняти розв'язок коректно поставленої крайової задачі математичної фізики?
66. Класифікація крайових умов (умов на межах області), тобто умови 1-го, 2-го та 3-го родів.
67. Як з крайової умови 3-го роду отримати умови 1-го та 2-го родів?
68. Постановка крайової задачі про поширення тепла в тонкому скінченному стержні на основі рівняння теплопровідності, якщо на кінцях стержня підтримується стала температура.
69. Постановка крайової задачі про поширення тепла в тонкому скінченному стержні на основі рівняння теплопровідності, якщо кінці стержня теплоізовані.
70. Постановка крайової задачі про поширення тепла в паралелепіпеді на основі рівняння теплопровідності з використанням крайових умов 1-го роду.
71. Який розв'язок називається класичним для крайової (змішаної) задачі для рівняння дифузії?
72. Умови, за яких справджуватиметься єдиність і неперервна залежність класичного розв'язку крайової (змішаної) задачі для двовимірного рівняння дифузії зі змінними коефіцієнтами.
73. Постановка змішаної крайової задачі для загального рівняння дифузії зі змінними коефіцієнтами.
74. Чи виконується принцип Гюйгенса при поширенні хвиль на площині і як це пов'язано з розв'язком задачі Коші для хвильового рівняння?
75. Постановка крайової задачі про коливання мембрани на основі хвильового рівняння.
76. Постановка змішаної крайової задачі для загального рівняння Д'Аламбера зі змінними коефіцієнтами.
77. Який розв'язок називається класичним для змішаної крайової задачі для хвильового рівняння?
78. Умови, за яких справджуватиметься єдиність і неперервна залежність класичного розв'язку змішаної крайової задачі для загального двовимірного рівняння Д'Аламбера зі змінними коефіцієнтами.

79. Що таке інтеграл енергії?
80. Як інтеграл енергії пов'язаний із законом збереження енергії?
81. Два основних методи для побудови точних розв'язків нелінійних ДРЧП.
82. На чому базується метод оберненої задачі розсіяння для розв'язання нелінійних двовимірних ДРЧП?
83. Рівняння Бюргерса та його зв'язок з рівнянням дифузії.
84. Що таке заміна Коула – Гопфа?
85. Рівняння Фішера.
86. Який має вигляд найвідоміший точний розв'язок рівняння Фішера?
87. Нелінійне рівняння Шрьодінгера.
88. Який має вигляд найвідоміший односолітонний розв'язок нелінійного рівняння Шрьодінгера?
89. Загальний вигляд рівняння реакції-дифузії.
90. Як знайти стаціонарні точки рівняння реакції-дифузії?

СПИСОК ЛІТЕРАТУРИ

Основна

1. Вірченко Н. О. Основні методи розв'язання задач математичної фізики. К.: Вид-во КПІ, 1997. — 370 с.
2. Бицадзе А. Б. Уравнения математической физики. — 2-е изд. — М.: Наука, 1982. — 336 с.
3. Годунов С. К. Уравнения математической физики. — М.: Наука, 1979. — 392 с.
4. Владимиров В. С. Уравнения математической физики. — 4-е изд. — М.: Наука, 1981. — 512 с.
5. Білоколот Є. Д., Шека Д. Д. Збірник задач з курсу “Рівняння математичної фізики”. — К.: Вид-во Київ. ун-ту, 2003. — 76 с.

Додаткова

6. Курант Р., Гильберт Д. Методы математической физики. — Т. 1, 2. — М.: Физматгиз, 1951.
7. Рид М., Саймон Б. Методы современной математической физики. — Т. 1–4. — М.: Мир, 1982.
8. Азошков В. И., Дубовский П. Б., Шутяев В. П. Методы решения задач математической физики. — М.: Физматгиз, 2002. — 320 с.
9. Білоколот Є. Д., Юрачківський А. П., Шека Д. Д. Спеціальні функції в задачах математичної фізики. — К.: ВПЦ “Київський університет”, 2000. — 92 с.

10. Боголюбов А. Н., Кравцов В. В. Задачи математической физики: Учеб. пособие. — М.: Изд-во МГУ, 1998. — 350 с.
11. Вірченко Н. О., Ляшко І. І. Графіки елементарних та спеціальних функцій. — К.: Наук. думка, 1996. — 582 с.
12. Тихонов А. Н., Самарский А. А. Уравнения математической физики. — М.: Наука, 1972. — 736 с.
13. Юрачківський А. П., Грязнова В. О. Метод відокремлення змінних у задачах математичної фізики: Навч. посіб. для студ. природ. фак-тів. — К.: РВЦ “Київський університет”, 1988. — 142 с.
14. Солитоны и нелинейные волновые уравнения / Р. Додд и др. — М.: Мир, 1988. — 400с.
15. Черніга Р. М. Застосування одного конструктивного методу для побудови нелінійських розв'язків нелінійних еволюційних рівнянь // Укр. мат. журн. — 1997. — Т. 49. — С. 814–827.
16. Черніга Р. М. Нові точні розв'язки та їхні властивості одного нелінійного рівняння математичної біології // Укр. мат. журн. — 2001. — Т. 53. — С. 1409–1421.
17. Черніга Р. М., Дутка В. А. Дифузійна система Лотки-Вольтера: симетрії Лі, точні та числові розв'язки // Укр. мат. журн. — 2004. — Т. 56. — С. 1395–1404.
18. Черніга Р. М. Нелінійні еволюційні рівняння: галілеївська інваріантність, точні розв'язки та їхнє застосування: Автореф. ... док-ра фіз.-мат. наук. — К., 2003. — 38 с.
19. Ablowitz M. J., Segur H. J. Solitons and the Inverse Scattering Transform. — Philadelphia: SIAM, 1981. — 400 p.
20. Cherniha R., King J. R. Nonlinear Reaction-Diffusion Systems with Variable Diffusivities: Lie Symmetries, Ansatzes and Exact Solution // Journ. Math. Anal. Appl. — 2005. — V. 308. — P. 11–35.
21. Dixon J. M., Tuszynski J. A., Clarkson P. A. From Nonlinearity to Coherence. — Oxford: Clarendon Press, 1997. — 600 p.

ЗМІСТ

Пояснювальна записка	3
Тематичний план дисципліни “Рівняння математичної фізики”	3
Зміст дисципліни “Рівняння математичної фізики”	4
Питання для самоконтролю.....	6
Список літератури.....	10

Відповідальний за випуск *Ю. В. Нешкуренко*
Редактор *І. В. Хронюк*
Комп'ютерне верстання *А. П. Нечиторук*

Зам. № ВКЦ-4696

Формат 60×84/₁₆. Папір офсетний.
Друк ротаційний трафаретний. Наклад 30 пр.
Міжрегіональна Академія управління персоналом (МАУП)
03039 Київ-39, вул. Фрометівська, 2, МАУП
ДП «Видавничий дім «Персонал»
03039 Київ-39, просп. Червонозоряний, 119, літ. XX
*Свідоцтво про внесення до Державного реєстру
суб'єктів видавничої справи ДК № 3262 від 26.08.2008*