

МІЖРЕГІОНАЛЬНА
АКАДЕМІЯ УПРАВЛІННЯ ПЕРСОНАЛОМ



МАУП

НАВЧАЛЬНА ПРОГРАМА
з дисципліни
“ДИФЕРЕНЦІАЛЬНІ РІВНЯННЯ В ЧАСТИННИХ
ПОХІДНИХ”
(для бакалаврів)

МАУП

Київ
ДП «Видавничий дім «Персонал»
2009

Підготовлено к. ф.-м. н., доцентом кафедри прикладної математики та програмування *В. І. Панчуком*

Затверджено на засіданні кафедри прикладної математики та програмування (протокол № 8 від 03.04.08)

Схвалено Вченою радою Міжрегіональної Академії управління персоналом

Панчук В. І. Навчальна програма дисципліни “Диференціальні рівняння в частинних похідних” (для бакалаврів). — К.: ДП «Вид. дім «Персонал», 2009. — 16 с.

Навчальна програма містить пояснювальну записку, тематичний план, зміст дисципліни “Диференціальні рівняння в частинних похідних”, питання для самоконтролю, список літератури.

- © Міжрегіональна Академія управління персоналом (МАУП), 2009
- © ДП «Видавничий дім «Персонал», 2009

ПОЯСНЮВАЛЬНА ЗАПИСКА

“Диференціальні рівняння в частинних похідних” як фундаментальна дисципліна посідає важливе місце в системі загальної математичної освіти. В ній розглядаються питання загальної теорії рівнянь даного класу та постановки коректних задач для них.

Поштовхом до розвитку теорії диференціальних рівнянь в частинних похідних стали задачі математичної фізики, які базуються на фізичних законах, що в більшості описуються рівняннями даного класу. Характерно, що математичні задачі, які при цьому виникають, мають багато спільних рис.

Основною метою вивчення студентами цієї дисципліни є оволодіння основами математичного апарату розв'язування диференціальних рівнянь з частинними похідними та набуття навиків використання цього апарату при математичному моделюванні природних процесів і явищ.

Програмою курсу передбачається виклад основних питань загальної теорії рівнянь з частинними похідними, аналітичних методів розв'язування класичних задач, пов'язаних з рівняннями теплопровідності, дифузії та переносу субстанцій, коливань струни, рівнянням Лапласа і Пуассона. Наведено приклади деяких інших задач, які описуються мовою рівнянь в частинних похідних і часто використовуються при математичному моделюванні різних природних процесів. Особливе місце відводиться математичним постановкам класичних задач математичної фізики: виведенню диференціальних рівнянь з частинними похідними та вибору відповідних умов. Окрім аналітичних методів досліджень, до лекційного матеріалу включено короткий виклад наближених чисельних методів, які дозволяють розв'язувати нелінійні задачі, а також задачі зі складними формами областей.

Для засвоєння матеріалу навчальної програми студенти повинні володіти знаннями, набутими при вивченні загальної фізики, диференціального та інтегрального числення, алгебраїчних та звичайних диференціальних рівнянь, алгебри та геометрії в обсягах, передбачених навчальними планами. Курс лекцій тісно пов'язаний також з курсами чисельних методів і математичного моделювання.

У результаті вивчення дисципліни “Диференціальні рівняння в частинних похідних” студенти повинні

знати:

- важливі типи рівнянь з частинними похідними, як вони виникають, яким умовам повинні задовольняти;
- найпоширеніші аналітичні та чисельні методи розв'язування типових задач математичної фізики;

уміти:

- використовувати основні закони фізики при постановці характерних задач математичної фізики;
- застосовувати математичний апарат диференціальних рівнянь в частинних похідних в задачах моделювання природних явищ та процесів тощо.

Указаний обсяг знань та навичок з теорії диференціальних рівнянь в частинних похідних слугує підґрунтям для подальшого вивчення інших навчальних курсів за програмою підготовки бакалаврів напрямку “Комп’ютерні науки”.

Підсумковими перевітками засвоєння студентами знань викладацького матеріалу є залік та іспит.

ТЕМАТИЧНИЙ ПЛАН
дисципліни
“ДИФЕРЕНЦІАЛЬНІ РІВНЯННЯ
В ЧАСТИННИХ ПОХІДНИХ”

№ пор.	Назва змістового модуля та теми
1	2
	Змістовий модуль I. Загальні відомості з теорії рівнянь в частинних похідних
1	Вступ до теорії рівнянь з частинними похідними. Основні поняття та визначення
2	Лінійні рівняння першого порядку з частинними похідними
3	Лінійні рівняння другого порядку з частинними похідними від двох незалежних змінних. Приклади простих математичних моделей природних процесів
	Змістовий модуль II. Рівняння параболічного типу в дифузійних задачах

1	2
4	Дифузійні процеси в обмежених областях
5	Інтегрування мішаної задачі для рівняння теплопровідності методом відокремлення змінних
6	Метод розкладу розв'язку неоднорідних рівнянь на власні функції
7	Поняття чисельного розв'язування параболічних задач (за методом кінцевих різниць)
Змістовий модуль III. Гіперболічні рівняння	
8	Задачі, що приводять до рівнянь гіперболічного типу
9	Хвильові процеси в необмежених та напівобмежених областях. Формула Д'Аламбера
10	Хвильові процеси в обмежених областях
Змістовий модуль IV. Рівняння еліптичного типу	
11	Фізичні процеси, що описуються рівняннями еліптичного типу. Лапласіан і його властивості
12	Постановка основних крайових еліптичних задач та методи їх розв'язування
13	Чисельне розв'язування задачі Діріхле (методом кінцевих різниць)
Разом годин 162	

ЗМІСТ **дисципліни**

“ДИФЕРЕНЦІАЛЬНІ РІВНЯННЯ В ЧАСТИННИХ ПОХІДНИХ”

Змістовий модуль I. Загальні відомості з теорії рівнянь в частинних похідних.

Тема 1. Вступ до теорії рівнянь з частинними похідними. ***Основні поняття та визначення***

Поняття про рівняння в частинних похідних, їх походження і роль як основного інструменту для дослідження природних процесів. Основні типи рівнянь з частинними похідними (за класифікаційною схемою). Постановка задачі, інтегрування рівнянь в частинних похідних.

Тема 2. Лінійні рівняння першого порядку з частинними похідними

Загальний вигляд рівняння в частинних похідних першого порядку. Лінійне однорідне рівняння, його геометрична інтерпретація. Поняття про характеристики. Лінійні неоднорідні рівняння. Правила інтегрування рівнянь першого порядку в частинних похідних. Задача Коші.

Література [1–5; 15; 16; 18]

Тема 3. Лінійні рівняння другого порядку з частинними похідними від двох незалежних змінних. Приклади простих математичних моделей природних процесів

Загальний вигляд рівняння в частинних похідних другого порядку. Класифікація рівнянь другого порядку від двох змінних. Опис природних процесів на мові просторових і часових похідних: рівняння малих поперечних коливань струни, рівняння теплопровідності.

Література [1–9; 13; 14; 16]

Змістовий модуль II. Рівняння параболічного типу в дифузійних задачах

Тема 4. Дифузійні процеси в обмежених областях

Простий фізичний експеримент з теплопровідності. Виведення одновимірного рівняння теплопровідності: перше знайомство з параболічним рівнянням. Деякі модифікації рівняння теплопровідності. Три найважливіші типи граничних умов. Основні складові математичної моделі теплопровідності (коректна постановка задач). Принцип максимуму для розв'язків рівняння теплопровідності. Висновки і зауваження.

Література [1–9; 13; 14]

Тема 5. Інтегрування мішаної задачі для рівняння теплопровідності методом відокремлення змінних

Метод відокремлення змінних, область застосування та кроки реалізації методу. Зведення задачі теплопровідності з неоднорідними

граничними умовами до відповідної задачі з однорідними граничними умовами. Процедура зведення залежних від часу граничних умов до однорідних. Метод відокремлення змінних для складніших задач теплопровідності. Задача Штурма-Ліувіля. Деякі висновки та зауваження.

Література [1–9; 13; 14]

Тема 6. Метод розкладу розв'язку неоднорідних рівнянь на власні функції

Основна ідея методу розкладу на власні функції. Процес побудови розв'язку методом розкладу на власні значення. Приклад застосування методу для конкретної задачі. Висновки та зауваження.

Література [1–9; 11; 14]

Тема 7. Поняття чисельного розв'язування параболічних задач (за методом кінцевих різниць)

Різницеві аналоги задачі теплопровідності. Явні схеми для рівнянь дифузійного типу. Схема Кранка-Ніколсона для рівняння теплопровідності. Алгоритми розв'язування задачі теплопровідності та його комп'ютерна реалізація. Порівняльний аналіз аналітичних та чисельних розв'язків.

Література [3; 10; 17; 19]

Змістовий модуль III. Гіперболічні рівняння

Тема 8. Задачі, що приводять до рівнянь гіперболічного типу

Загальні відомості про новий клас рівнянь. Виведення рівняння коливання струни: перше знайомство з гіперболічним рівнянням. Рівняння коливання мембрани. Інтуїтивна інтерпретація хвильового рівняння. Розподіл електричного струму в проводі (система телеграфних рівнянь). Деякі зауваження.

Література [1–9; 11–14]

Тема 9. Хвильові процеси в необмежених та напівобмежених областях. Формула Д'Аламбера

Постановка задачі про вільні коливання необмеженої струни. Основні кроки одержання розв'язку задачі (формули Д'Аламбера). Просторово-часове трактування формули Д'Аламбера. Приклади

різного застосування формули Д'Аламбера. Розв'язування задачі для напівнескінченної струни. Висновки та зауваження.

Література [1–9; 11–14]

Тема 10. Хвильові процеси в обмежених областях

Види хвильових рухів. Математичне формулювання граничних умов, що відображають: задані режими в граничних точках, задані сили на границях, пружне закріплення кінців струни. Постановка задачі про коливання обмеженої струни, розв'язування задачі методом відокремлення змінних (стоячі хвилі).

Постановка задачі про коливання вільно опертої балки (рівняння четвертого порядку), схема розв'язування задачі методом відокремлення змінних. Деякі типові задачі про балку.

Ідея методу зведення задач до безрозмірного вигляду на прикладі задачі про коливання струни, важливість аналізу розмірностей.

Плоскі, циліндричні, сферичні хвилі. Хвилі в тривимірному просторі. Формула Пуассона. Розв'язування двовимірної хвильової задачі методом спуску. Запис хвильового рівняння у полярних координатах. Постановка та розв'язування задачі про коливання круглої мембрани. Розв'язування задачі на власні значення для рівняння Гельмгольца та рівняння Бесселя.

Системи рівнянь в частинних похідних. Приклади фізичних процесів, що описуються системами рівнянь з частинними похідними. Про застосування методів лінійної алгебри до систем рівнянь. Розв'язування простих лінійних систем виду $u_t + A_{ux} = 0$. Зауваження.

Література [1–9; 11–14]

Змістовий модуль IV. Рівняння еліптичного типу

Тема 11. Фізичні процеси, що описуються рівняннями еліптичного типу. Лапласіан і його властивості

Властивості оператора Лапласа. Інтуїтивний зміст деяких фізичних законів. Як виникають стаціонарні рівняння. Запис лапласіана в різних системах координат. Канонічна форма параболічних та еліптичних рівнянь.

Література [1–9; 11–14]

Тема 12. Постановка основних крайових еліптичних задач та методи їх розв'язування

Загальні властивості крайових задач. Основні типи граничних умов у крайових задачах.

Внутрішня задача Діріхле для круга, схема її розв'язування, аналіз розв'язку. Інтегральна форма Пуассона.

Задача Діріхле для кільця. Варіанти задачі Діріхле для кільця. Зовнішня задача Діріхле.

Побудова розв'язку неоднорідної задачі Діріхле (функція Гріна). Потенціали точкових витоків і стоків. Рівняння Пуассона для круга. Визначення функції Гріна. Зауваження.

Література [1–9; 11–14]

Тема 13. Чисельне розв'язування задачі Діріхле (методом кінцевих різниць, метод Монте-Карло)

Кінцево-різницева апроксимація оператора Лапласа. Алгоритм чисельного розв'язування задачі Діріхле та його реалізація на комп'ютері. Деякі висновки та зауваження.

Література [3; 10; 17; 19]

ПИТАННЯ ДЛЯ САМОКОНТРОЛЮ

1. Дайте означення диференціального рівняння в частинних похідних та запишіть його у загальному вигляді.
2. Чому необхідно вивчати диференціальні рівняння в частинних похідних?
3. Запишіть лінійне рівняння першого порядку у загальному вигляді.
4. Розкажіть про метод характеристик та його використання при розв'язуванні рівнянь першого порядку.
5. Наведіть приклад задачі Коші, що описується рівнянням першого порядку з постійними коефіцієнтами.
6. Розкажіть про нелінійні рівняння першого порядку.
7. Для чого потрібно класифікувати рівняння в частинних похідних? Назвіть основні ознаки, за якими їх класифікують.
8. Побудуйте класифікаційну діаграму рівнянь в частинних похідних.

9. Перевірте, чи є функція $u = x^2 + y^2$ розв'язком рівняння $x \frac{\partial u}{\partial x} + y \frac{\partial u}{\partial y} = 0$.
10. Чи буде розв'язком рівняння функція $x \frac{\partial u}{\partial x} + y \frac{\partial u}{\partial y} = 0$ функція $f(x^2 + y^2)$?
11. У чому Ви вбачаєте відмінність загального розв'язку рівнянь в частинних похідних від загального розв'язку звичайних диференціальних рівнянь?
12. Наведіть приклади параболічних, гіперболічних, еліптичних рівнянь.
13. Опишіть простий фізичний експеримент з теплопровідності мовою рівнянь в частинних похідних. На який фундаментальний закон опираються при виведенні рівняння теплопровідності?
14. Назвіть три типи співвідношень, якими може описуватися модель теплопровідності.
15. Яким чином описуються наявні джерела тепла у рівнянні теплопровідності?
16. Запишіть рівняння теплопровідності з урахуванням конвекції.
17. Підставте розмірність кожної з величин у рівняння $u_t = \alpha^2 u_{xx} - \beta u$ і покажіть, що всі доданки мають однакову розмірність $^\circ\text{C}/\text{с}$.
18. Розкажіть, що Ви знаєте про граничні та початкові умови для задачі теплопровідності. Запишіть їх.
19. У чому полягає основна ідея методу відокремлення змінних у задачах теплопровідності?
20. Коли застосовується метод відокремлення змінних для розв'язування задач теплопровідності?
21. Назвіть основні кроки розв'язування задачі теплопровідності методом відокремлення змінних.
22. Поняття про елементарні розв'язки. Як вони знаходяться?
23. Покажіть, що функція $u(x, t) = e^{-\lambda^2 \alpha^2 t} [A \sin(\lambda x) + B \cos(\lambda x)]$ задовольняє рівнянню $u_t = \alpha^2 u_{xx}$ при довільних значеннях A, B, λ .
24. Як знаходяться розв'язки, які задовольняють рівнянню теплопровідності? рівнянню теплопровідності та граничним умовам? рівнянню теплопровідності, граничним і початковим умовам?
25. Поняття про ортогональні системи функцій.
26. При яких умовах застосовують метод відокремлення змінних?

27. Опишіть математичну постановку змішаної задачі про теплопровідність теплоізованого стрижня з неоднорідними граничними умовами при заданому початковому розподілі температури стрижня.
28. Поняття про стаціонарні розв'язки задачі теплопровідності.
29. У чому полягає суть перетворення неоднорідних граничних умов до однорідних в задачі теплопровідності?
30. Сформулюйте змішану задачу про теплопровідність теплоізованого стрижня з нестационарними граничними умовами.
31. Зробіть математичну постановку задачі теплопровідності стрижня, у граничній умові якої міститься похідна, при заданому початковому розподілі температури стрижня.
32. Розкажіть про власні значення та власні функції крайової задачі:

$$X'' + \lambda^2 X = 0,$$

$$X(0) = 0,$$

$$X'(1) + hX(1) = 0.$$

33. Сформулюйте у загальному вигляді задачу Штурма-Ліувіля.
34. Розкажіть про основні властивості задачі Штурма-Ліувіля.
35. Запишіть одновимірне рівняння теплопровідності при врахуванні теплообміну через бокову поверхню.
36. Запишіть математичну постановку задачі про теплопровідність стрижня при наявності теплообміну через бокову поверхню, заданих нульових значеннях температури на його кінцях та відомому початковому розподілі температури $\varphi(x) = 10 + 2x$.
37. Розкажіть суть спрощення задачі про теплообмін через бокову поверхню.
38. Запишіть одновимірне рівняння теплопровідності, в якому враховується густина наявного джерела тепла.
39. Розкажіть про можливі способи кінцево-різницевої апроксимації частинних похідних.
40. Розкажіть про явні різницеві схеми для рівнянь теплопровідності.
41. Поняття про неявні схеми для одновимірних рівнянь теплопровідності.
42. Наведіть приклад різницевого аналога простої задачі теплопровідності.

43. Розробіть алгоритм чисельного розв'язування простої задачі дифузійного типу методом кінцевих різниць.
44. Побудуйте блок-схему реалізації розробленого алгоритму на комп'ютері.
45. Виведіть рівняння поперечних коливань закріпленої струни.
46. Дайте інтуїтивне тлумачення хвильового рівняння.
47. Запишіть систему телеграфних рівнянь t а покажіть, як з неї отримати телеграфне рівняння відносно напруги, ... відносно сили струму.
48. Дайте загальну характеристику хвильових рівнянь.
49. Виконайте постановку задачі Коші для коливання необмеженої струни.
50. Розкажіть про основні кроки одержання формули Д'Аламбера.
51. Дайте просторово-часове трактування формули Д'Аламбера.
52. Розв'яжіть за формулою Д'Аламбера задачу коливання напівнескінченної струни.
53. Сформулюйте математичні умови для випадку заданих режимів у граничних точках (граничні умови першого роду).
54. Сформулюйте математичні умови при заданих діючих на границях силах (граничні умови другого роду).
55. Однорідні та неоднорідні граничні умови пружного закріплення кінців струни (граничні умови третього роду).
56. У чому полягає основна ідея методу відокремлення змінних для задачі коливання обмеженої струни?
57. Назвіть основні кроки методу відокремлення змінних при розв'язуванні задачі коливання обмеженої струни.
58. При яких значеннях константи відокремлення змінних існують нетривіальні та обмежені розв'язки?
59. В чому полягає властивість ортогональності системи функцій?
60. Форми представлення n -ної моди коливання або n -ної гармоніки?
61. У чому полягає ідея введення безрозмірних змінних в задачах математичної фізики?
62. Як зводиться до безрозмірного вигляду дифузійна задача?
63. Наведіть приклад безрозмірного представлення простої задачі про коливання струни.
64. Розкажіть про значення аналізу розмірностей для моделювання фізичних процесів.

65. Розкажіть, що Ви знаєте про плоскі, циліндричні, сферичні хвилі.
66. Опишіть модель поширення хвиль у тривимірному просторі.
67. Формула Пуассона як узагальнення формули Д'Аламбера на тривимірний випадок.
68. Запишіть хвильове рівняння у полярних координатах.
69. Виконайте математичну постановку мішаної задачі про коливання закріпленої круглої мембрани.
70. Назвіть основні кроки розв'язування змішаної задачі про коливання закріпленої круглої мембрани методом Фур'є.
71. Запишіть рівняння гармонічних коливань та знайдіть загальний його розв'язок.
72. Запишіть рівняння Гельмгольца та опишіть хід його розв'язування методом відокремлення змінних.
73. Запишіть рівняння Бесселя та розкажіть про хід його розв'язування.
74. Розкажіть про ортогональність функцій Бесселя $J_0(k_{0,i}r)$.
75. Побудуйте просту лінійну систему виду $u_t + Au_x = 0$ та розкажіть про послідовність її розв'язування з використанням апарату лінійної алгебри.
76. Розкажіть про основні властивості оператора Лапласа.
77. Запишіть лапласіан в системах координат: полярній, циліндричній, сферичній.
78. Розкажіть про крайові задачі та її основні властивості крайової задачі.
79. Наведіть приклади стаціонарних задач.
80. Дайте означення гармонічної функції.
81. Принцип максимуму для рівняння Лапласа.
82. Опишіть три основні типи граничних умов для еліптичної задачі.
83. Наведіть деякі варіанти постановок задач Діріхле.
84. Розкажіть кроки розв'язування задачі Діріхле для кільця методом Фур'є.
85. Наведіть різні варіанти точкових витоків і стоків.
86. Запишіть рівняння Пуассона для круга.
87. Наведіть різні способи кінцево-різницевої апроксимації оператора Лапласа.

88. Розробіть алгоритм чисельного розв'язування задачі Діріхле, побудуйте блок-схему та напишіть програму його реалізації на комп'ютері.
89. Порівняйте чисельний та існуючий аналітичний розв'язки.
90. Зведіть параболічне рівняння до канонічної форми.

СПИСОК ЛІТЕРАТУРИ

Основна

1. *Вірченко Н. О.* Основні методи розв'язання задач математичної фізики: Навч. посіб. — К.: КПП, 2006. — 370 с.
2. *Гончаренко В. М.* Основи теорії рівнянь з частинними похідними. — К.: Вища шк., 1995. — 352 с.
3. *Фарлоу С.* Уравнения с частными производными. — М.: Мир, 1985. — 383 с.
4. *Владимиров В. С.* Уравнения математической физики. — М.: Наука, 1976.
5. *Білокопос Є. Д., Шека Д. Д.* Збірник задач з курсу “Рівняння математичної фізики”. — К.: Вид. Київ. ун-ту, 2003. — 76 с
6. *Тихонов А. Н., Самарский А. А.* Уравнения математической физики. — М.: Наука, 1976. — 724 с.
7. *Араманович И. Г., Левин В. И.* Уравнения математической физики. — М.: Наука, 1976. — 287 с.
8. *Годунов С. К.* Уравнения математической физики. — М.: Наука, 1979. — 392 с.
9. *Будак Б. М., Самарский А. А., Тихонов А. Н.* Сборник задач по математической физике. — М.: Наука, 1976. — 683 с.
10. *Марчук Г. И.* Вычислительная математика. — М.: Наука, 1986. — 455 с.

Додаткова

11. *Петровский И. Г.* Лекции об уравнениях с частными производными. — М.: Госиздат физ.-мат. лит., 1961. — 400 с.
12. *Соболев С. Л.* Уравнения математической физики. — М.: Госиздат техн.-теор. лит., 1954.
13. *Курант Р.* Уравнения с частными производными. — М.: Мир, 1964. — 830 с.
14. *Положий Г. Н.* Уравнения математической физики. — М.: Высш. шк., 1964. — 560 с.

15. *Степанов В. В.* Курс дифференциальных уравнений. — М.: ГИФМЛ, 1958. — 468 с.
16. *Высшая математика: Сб. задач / Х. И. Гаврильченко, А. Ф. Кривой, П. С. Кропивянский и др.* — К.: Вища шк., 1991. — 455 с.
17. *Самарский А. А.* Введение в численные методы. — М.: Наука, 1982.
18. *Фихтенгольц Г. М.* Основы математического анализа: В 2 т. — М.: Наука, 1968. — 404 с.
19. *Фельдман Л. П., Петренко А. І., Дмитрієва О. А.* Чисельні методи в інформатиці. — К., 2006. — 480 с.

МАУП

ЗМІСТ

Пояснювальна записка	3
Тематичний план дисципліни “Диференціальні рівняння в частинних похідних”	4
Зміст дисципліни “Диференціальні рівняння в частинних похідних”	5
Питання для самоконтролю	9
Список літератури	14

Відповідальний за випуск	<i>А. Д. Вегеренко</i>
Редактор	<i>О. М. Коваленко</i>
Комп’ютерне верстання	<i>О. А. Варваріна</i>

Зам. № ВКЦ-4179

Формат 60×84/₁₆. Папір офсетний.
Друк ротатійний трафаретний.
Тираж 50 пр.

Міжрегіональна Академія управління персоналом (МАУП)
03039 Київ-39, вул. Фрометівська, 2, МАУП

ДП «Видавничий дім «Персонал»
03039 Київ-39, просп. Червонозоряний, 119, літ. XX

*Свідоцтво про внесення до Державного реєстру
суб’єктів видавничої справи ДК № 3262 від 26.08.2008 р.*