МІЖРЕГІОНАЛЬНА

АКАДЕМІЯ УПРАВЛІННЯ ПЕРСОНАЛОМ

МАУП

Методичні рекомендації для самостійної роботи з дисципліни „Математичні методи та моделі оптимального управління” (для бакалаврів).

Київ 2016

Підготовлено професором кафедри вищої та прикладної математики Степахно І.В.

Затверджено на засіданні кафедри вищої та прикладної математики (протокол № від 2016р.)

Схвалено Вченою радою Інституту комп'ютерно-інформаційних технологій Міжрегіональної Академії управління персоналом

(протокол № __ від ___________________ 2016 р.)

Методичні вказівки та навчальні завдання для самостійної роботи з дисципліни „Математичні методи та моделі оптимального управління” для бакалаврів і спеціалістів.

- К.: МАУП. 2016. – __с.

Методичні вказівки містять пояснювальну записку; питання з декількох розділів дисципліни „Математичні методи та моделі в теорії управління”, які потребують додаткових пояснень; приклади роз'яснювальних завдань та умови задач.

Пояснювальна записка

Самостійна робота студентів є складовою навчального процесу, важливим чинником, який формує вміння навчатися, сприяє активізації засвоєння студентом знань та придбання необхідних навичок.

Самостійна робота є основним засобом опанування навчального матеріалу у позааудиторний час. Значно підвищується значення та статус самостійної роботи при введенні кредитно-модульної технології навчання, за якою скорочується обсяг аудиторної роботи студентів.

Мета самостійної роботи – сприяння засвоєння в повному обсязі навчальної програми та формуванню самостійності як особистісної риси та важливої професійної якості, сутність якої полягає в умінні систематизувати, планувати та контролювати власну діяльність.

У пропонованих методичних рекомендаціях розглянуть питання з декількох розділів предмету „Математичні методи та моделі оптимального управління”, які потребують окремих пояснень та визначень.

Надані основні теореми і твердження, приклади розв’язаних задач, та рішення.

Програмою курсу “Математичні методи та моделі оптимального управління” передбачено вивчення теоретичного матеріалу, практичні і лабораторні заняття, орієнтовані на формування у студентів знань, умінь і навичок, необхідних для розв’язування реальних задач оптимального керування з використанням сучасних комп’ютеризованих методів математичного прогнозування та оптимізації. Навчальна дисципліна охоплює дослідження міждисциплінарного характеру на стиках диференційних рівнянь, функціонального аналізу, теорії ймовірностей, математичної статистики, дослідження операцій та теорії прийняття оптимальних рішень у реальних умовах за наявності збурень, неповних даних і знань про керовані системи і процеси, а також методи побудови оптимальних відкритих та оптимальних замкнутих підсистем управління, необхідних для забезпечення надійного та ефективного функціонування взаємопов'язаних технічних, фінансово-економічних, соціально-екологічних та інших систем і підсистем, де прийняття управлінських рішень ґрунтується на дослідженнях динамічних характеристик керованої системи та інформаційного забезпечення підсистеми вибору управління. Дисципліна "Математичні методи та моделі оптимального управління" належить до основних дисциплін, необхідних для підготовки бакалаврів за напрямом "Комп'ютерні науки". Основна мета дисципліни — ознайомити студентів з методами та алгоритмами математичної теорії оптимального керування, а також сформувати уміння та навички розв'язування практичних задач оптимального керування з використанням обчислювальної техніки. У результаті вивчення дисципліни студенти повинні: · знати сучасні методи та моделі оптимального управління; методи цільового аналізу керованих процесів; методи прогнозування керованих процесів та об'єктів, методи побудови оптимальних стратегій у диференційних іграх; · набути умінь, необхідних для створення автоматизованих систем керування різного призначення; системного аналізу, прогнозування і оптимізації підсистем та всієї системи; багатокритеріального аналізу оптимально взаємодіючих керованих процесів. 4. Види контролю знань — індивідуальні завдання, залік, тестові завдання. Для вивчення дисципліни необхідні знання математичного аналізу, лінійної алгебри і аналітичної геометрії, диференціальних рівнянь, диференціальних рівнянь у частинних похідних, методів оптимізації і дослідження операцій. Курс є важливим для подальшого вивчення таких дисциплін з підготовки бакалаврів комп'ютерних наук: · "Моделювання економічних систем"; ·

“Системи штучного інтелекту”; · “Комп’ютерні мережі”; · “Теорія фінансів”; · “Розміщення продуктивних сил”; · “Організація інформаційної діяльності у сфері управління”.

Зміст самостійної роботи з дисципліни „Математичні методи та моделі оптимального управління”

1. Необхідні відомості з теорії диференціальних рівнянь і функціонального аналізу

Згідно з точкою зору, що склалася останнім часом, оптимальне управління є певним розділом теорії екстремальних завдань (теорії оптимізації), присвячений дослідженню і рішенню максимізації і мінімізації функціоналів на безлічі функцій спеціального виду. З іншого боку, - оптимальне управління тісне пов'язано з вибором найбільш вигідних (оптимальних) режимів, які описуються за допомогою систем диференціальних рівнянь. Якщо перша точка зору узгоджується з класифікацією, прийнятою в " класичній" математики, то друга - більше прикладна, оскільки орієнтована на рішення різних завдань з економіки і техніки.

Посібник присвячений принципу максимуму Л.С. Понтрягина - одному з основних інструментів рішення завдань оптимального управління динамічними системами. Спочатку наводяться короткі відомості з теорії диференціальних рівнянь, активно використовувані надалі, дається поняття функціонала і завдання його оптимізації , що відповідають різним різновидам завдання оптимального управління (з фіксованими і рухливими кінцями, з фіксованою і нефіксованою тривалістю управління) .

1.1. Диференціальні рівняння першого порядку

Диференціальним рівнянням першого порядку називають рівняння вигляду:

$$F(x, y, y') = 0, \tag{1.1}$$

яке зв'язує між собою незалежну змінну *x*, невідому функцію $y(x)$ та її похідну.

Диференціальне рівняння вигляду

$$y' = f(x, y) \tag{1.2}$$

називають диференціальним рівнянням першого порядку, розв'язаним відносно похідної першого порядку.

Загальним розв'язком диференціального рівняння (10.1) називають таку сукупність функцій $y = \varphi(x, C)$ (C – довільна стала), підстановка яких у рівняння (10.1) перетворює його на тотожність.

Частинним розв'язком рівняння (10.1) називають функція $y = \varphi(x, C_0)$, яку одержують із загального розв'язку $y = \varphi(x, C)$ при певному значенні параметра $C = C_0$.

Щоб із загального розв'язку виділити необхідний частинний потрібно задати умову Коші, тобто умову, згідно якої функція $y = \varphi(x, C)$ приймає задане значення y_0 в заданій точці x_0:

$$y(x_0) = y_0.$$

Задачу відшукання частинних розв'язків диференціального рівняння при заданій умові називають *задачею Коші*.

Диференціальні рівняння з відокремлюваними змінними

Диференціальне рівняння вигляду

$$y' = f(x)g(y), \tag{1.3}$$

де $f(x)$ і $g(x)$ – неперервні на деякому проміжку функції, називають *диференціальним рівнянням з відокремлюваними змінними*.

Це рівняння можна представити у вигляді $\frac{dy}{dx} = f(x)g(y)$. Перенісши диференціал dx та розділивши обидві частини рівняння на $g(y) \neq 0$, одержимо рівняння з відокремленими змінними

$$\frac{dy}{g(y)} = f(x)dx \tag{1.4}$$

Загальний розв'язок цього рівняння:

$$\int \frac{dy}{g(y)} = \int f(x)dx \tag{1.5}$$

за умови, що $g(y) \neq 0$.

Зауваження. При переході від рівняння (10.3) до (10.4) можлива втрата розв'язку $y = y_0$, якщо $g(y_0) = 0$. Тому необхідно здійснити перевірку шляхом підстановки $y = y_0$ у задане рівняння (10.3).

Рівняння (10.3) є частковим випадком рівняння вигляду

$$P(x)Q(y)dx + P_1(x)Q_1(y)dy = 0. \qquad (1.6)$$

Це рівняння називають *диференціальним рівнянням з відокремлюваними змінними в диференціалах*.

Для розв'язування рівняння (10.6) його праву і ліву частини ділять на $Q(y)P_1(x) \neq 0$ і одержують рівняння

$$\frac{P(x)}{P_1(x)}dx + \frac{Q_1(y)}{Q(y)}dy = 0. \qquad (1.7)$$

У рівнянні (10.7) при *dx* стоїть функція, що залежить лише від *x*, а при *dy* – лише від *y*. Про таке рівняння кажуть, що його *змінні відокремлені*.

Проінтегрувавши ліву і праву частини рівняння (10.7), одержують загальний розв'язок диференціального рівняння (10.6):

$$\int \frac{P(x)}{P_1(x)}dx = -\int \frac{Q_1(y)}{Q(y)}dy \qquad (1.8)$$

за умови, що $Q(y)$ • 0 і $P_1(x)$ • 0.

Зауваження. Здійснюючи операцію відокремлювання змінних, можна втратити деякі розв'язки даного рівняння, а саме: $x=x_1$, якщо $P_1(x_1)=0$, і $y=y_1$, якщо $Q(y_1)=0$.

Приклади. Знайти загальний розв'язок диференціальних рівнянь:

а) $\dfrac{dy}{dx} = -\dfrac{1}{x^2}$; б) $\dfrac{dy}{dx} = 2\sqrt{y}\sin 5x$.

Розв'язання. а) Перенесемо диференціал dx у праву частину:

$$dy = -\frac{dx}{x^2}.$$

Проінтегруємо обидві частини рівняння за відповідними змінними:

$$\int dy = -\int \frac{dx}{x^2}, \quad y = \frac{1}{x} + C,$$ *C* • *R*.

Отже, $y = \dfrac{1}{x} + C$, *C* • *R* – загальний розв'язок заданого рівняння.

б) Відокремимо змінні

$$\frac{dy}{2\sqrt{y}} = \sin 5x dx$$ (*y* • 0).

Проінтегруємо обидві частини рівняння:

$$\int \frac{dy}{2\sqrt{y}} = \int \sin 5x dx, \quad \sqrt{y} = -\frac{1}{5}\cos 5x + C, \quad y = \left(-\frac{1}{5}\cos 5x + C\right)^2,$$ *C* • *R*.

Підставивши *y*=0 у задане рівняння, переконуємося, що *y*=0 також є його розв'язком. Отже, загальний розв'язок заданого рівняння є таким:

$$y=0,\ y=\left(-\frac{1}{5}\cos 5x+C\right)^2,\ C \bullet R.$$

Відповідь: а) $y=\frac{1}{x}+C$, *C* • *R*; б) *y*=0, $y=\left(-\frac{1}{5}\cos 5x+C\right)^2$, *C* • *R*.

Приклад. Знайти загальний розв'язок диференціального рівняння

$$(xy^2+x)dx+(y-x^2y)dy=0.$$

Розв'язання: Винесемо з перших дужок змінну x, а з других – змінну y:

$$x(y^2+1)dx+y(1-x^2)dy=0. \qquad (1.9)$$

Розділивши праву і ліву частини рівняння на $\left(y^2+1\right)\left(1-x^2\right)\neq 0$, одержимо

$$\frac{xdx}{1-x^2}+\frac{ydy}{1+y^2}=0,\quad \frac{ydy}{1+y^2}=\frac{xdx}{x^2-1}.$$

Проінтегрувавши ліву та праву частини рівняння, будемо мати:

$$\int\frac{ydy}{1+y^2}=\int\frac{xdx}{x^2-1},\quad \frac{1}{2}\cdot\int\frac{d\left(1+y^2\right)}{1+y^2}=\frac{1}{2}\cdot\int\frac{d\left(x^2-1\right)}{x^2-1},$$

$$\ln\left|y^2+1\right|=\ln\left|x^2-1\right|+\ln\left|C\right|,\ \ln\left(y^2+1\right)=\ln\left|C\left(x^2-1\right)\right|,$$

$$y^2+1=\left|C\left(x^2-1\right)\right|,\ C \bullet R\backslash\{0\}.$$

Здійснюючи відокремлення змінних, ділили праву і ліву частини рівняння (10.9) на вираз $\left(y^2+1\right)\left(1-x^2\right)$, який перетворюється на нуль, коли $x=\pm 1$. При цьому можуть бути втраченими розв'язки: *x*=1, *x*=–1. Підставивши *x*=1, *x*=–1 у задане рівняння, переконуємося, що вони є його розв'язками.

Отже, $x=1$, *x*=–1, $y^2+1=\left|C\left(x^2-1\right)\right|$, *C* • *R*\{0} – загальний розв'язок заданого рівняння.

Відповідь: $x=1$, *x*=–1, $y^2+1=\left|C\left(x^2-1\right)\right|$, *C* • *R*\{0}.

1.2. Лінійні диференціальні рівняння другого порядку зі сталими коефіцієнтами

Рівняння вигляду:

$$y''+py'+qy=f(x) \qquad (1.10)$$

де *p*, *q* – сталі дійсні числа, а $f(x)$ – неперервна функція, називають *лінійним диференціальним рівнянням другого порядку зі сталими коефіцієнтами*. Загальний розв'язок рівняння (10.10) містить дві довільні сталі C_1 і C_2:

$$y(x) = \varphi(x,\ C_1, C_2).$$

Для знаходження єдиного розв'язку залучають додаткові умови

$$y(x_0) = y_0,\ \ y'(x_0) = y_1,$$

які називають *умовами Коші для диференціального рівняння другого порядку*.

Якщо $f(x) \equiv 0$, то рівняння (10.10) називають *лінійним однорідним диференціальним рівнянням другого порядку зі сталими коефіцієнтами*:

$$y'' + py' + qy = 0 \qquad (1.11)$$

Для розв'язування рівняння (10.11) складають *характеристичне рівняння*

$$k^2 + pk + q = 0. \qquad (1.12)$$

Залежно від одержаних розв'язків характеристичного рівняння записують загальний розв'язок рівняння (10.11).

1. Якщо k_1 і k_2 – дійсні і різні розв'язки характеристичного рівняння, то загальний розв'язок рівняння (10.11) є таким: $y(x) = C_1 e^{k_1 x} + C_2 e^{k_2 x}$, C_1, C_2 • R.
2. Якщо k_1=k_2=k – єдиний розв'язок характеристичного рівняння, то загальний розв'язок рівняння (10.11) є таким: $y(x) = C_1 e^{kx} + C_2 x e^{kx} = e^{kx}(C_1 + C_2 x)$, C_1, C_2 • R.
3. Якщо характеристичне рівняння не має дійсних розв'язків ($D = p^2 - 4q < 0$), то воно має два спряжені комплексні розв'язки $k_{1,2} = -\dfrac{p}{2} \pm i\dfrac{\sqrt{4q - p^2}}{2} = a \pm ib$. Тоді загальний розв'язок рівняння (1.11) є таким: $y(x) = e^{ax}(C_1 \sin bx + C_2 \cos bx)$, C_1, C_2 • R.

Приклади. Знайти загальний розв'язок диференціальних рівнянь:

а) $y'' + 2y' - 3y = 0$;   б) $4y'' - 8y' + 5y = 0$.

Розв'язання: Задані рівняння є лінійними однорідними рівняннями другого порядку зі сталими коефіцієнтами.

а) Запишемо характеристичне рівняння

$$k^2 + 2k - 3 = 0.$$

Це рівняння має два дійсних різних кореня: $k_1 = 1$, $k_2 = -3$. Тому загальний розв'язок заданого диференціального рівняння є таким: $y(x) = C_1 e^{x} + C_2 e^{-3x}$, C_1, C_2 • R.

б) Запишемо характеристичне рівняння $4k^2 - 8k + 5 = 0$. Воно має два комплексні кореня: $k_{1,2} = \frac{8 \pm \sqrt{-16}}{8} = 1 \pm \frac{1}{2} i$, a=1, $b = \frac{1}{2}$. Загальний розв'язок заданого диференціального рівняння є таким:

$$y(x) = e^x \left(C_1 \sin\frac{x}{2} + C_2 \cos\frac{x}{2} \right),$$ C_1, C_2 • R.

Відповідь: а) $y(x) = C_1 e^x + C_2 e^{-3x}$, C_1, C_2 • R ;

б) $y(x) = e^x \left(C_1 \sin\frac{x}{2} + C_2 \cos\frac{x}{2} \right)$, C_1, C_2 • R.

Приклад. Знайти частинний розв'язок рівняння $y'' - 6y' + 9y = 0$, що задовольняє умовам Коші: $y(0) = 0$, $y'(0) = 1$.

Розв'язання. Характеристичне рівняння $k^2 - 6k + 9 = 0$ має два однакових дійсних розв'язки $k_1 = k_2 = k = 3$. Загальний розв'язок диференціального рівняння має вигляд: $y(x) = e^{3x}(C_1 + C_2 x)$, C_1, C_2 • R.

Для знаходження частинного розв'язку, що задовольняє заданим умовам Коші, спочатку знайдемо $y'(x) = 3e^{3x}(C_1 + C_2 x) + C_2 e^{3x}$, а потім підставимо x=0 у загальний розв'язок $y(x)$ і в $y'(x)$:

$$y(0) = e^{3 \cdot 0}(C_1 + C_2 \cdot 0) = C_1,\quad y'(0) = 3e^{3 \cdot 0}(C_1 + C_2 \cdot 0) + C_2 e^{3 \cdot 0} = 3C_1 + C_2.$$

Для знаходження C_1 і C_2 розв'яжемо систему рівнянь

$$\begin{cases} C_1 = 0, \\ 3C_1 + C_2 = 1. \end{cases}$$

Її розв'язки: $C_1 = 0$, $C_2 = 1$. Отже, частинний розв'язок заданого диференціального рівняння, що задовольняє умовам Коші: $y(0) = 0$, $y'(0) = 1$, є таким $y(x) = xe^{3x}$.

Відповідь: $y(x) = xe^{3x}$.

Загальний розв'язок $y_{з.н.}(x, C_1, C_2)$ лінійного неоднорідного диференціального рівняння (10.10) ($f(x) \neq 0$) має такий вигляд:

$$y_{з.н.}(x, C_1, C_2) = y_{з.о.}(x, C_1, C_2) + y_{ч.н.}(x),$$

де $y_{з.о.}(x, C_1, C_2)$ – загальний розв'язок відповідного однорідного рівняння (10.11); $y_{ч.н.}(x)$ – деякий частинний розв'язок неоднорідного рівняння (10.10).

Розглянемо деякі випадки знаходження $y_{ч.н.}(x)$, коли $f(x)$ є функцією певного вигляду.

1. Якщо $f(x)=a_0+a_1x+a_2x^2+\ldots+a_nx^n$, то $y_{ч.н.}(x)$ шукають у вигляді:

$$y_{ч.н.}(x)=x^s\left(b_0+b_1x+b_2x^2+\ldots+b_nx^n\right),$$

де $s=0$ при $q\neq 0$; $s=1$ при $q=0,\ p\neq 0$; $s=2$ при $q=0,\ p=0$.

2. Якщо $f(x)=P(x)e^{mx}$, де $P(x)=a_0+a_1x+a_2x^2+\ldots+a_nx^n$ – деякий многочлен степеня *n*, то $y_{ч.н.}$ шукають у вигляді:

$$y_{ч.н.}(x)=x^sQ(x)e^{mx},$$

де $Q(x)$ – многочлен того самого степеня, що й $P(x)$, причому якщо число *m* не є коренем характеристичного рівняння $k^2+pk+q=0$, то *s*=0, в іншому разі *s* – кратність кореня *k*=*m* характеристичного рівняння.

3. Якщо $f(x)=a_1\sin\beta x+a_2\cos\beta x$, то $y_{ч.н.}$ шукають у вигляді:

$$y_{ч.н.}(x)=x^s\left(b_1\sin\beta x+b_2\cos\beta x\right),$$

де $s=1$, якщо одночасно $p=0,\ q>0,\ \beta=\sqrt{q}$, $s=0$ в інших випадках.

Приклади. Знайти загальний розв’язок диференціальних рівнянь:

а) $y''-3y'+2y=x^2$; б) $y''-4y'+3y=xe^x$.

Розв’язання. Обидва рівняння є лінійними неоднорідними рівняннями другого порядку зі сталими коефіцієнтами.

а) Спочатку розв’яжемо лінійне однорідне рівняння

$$y''-3y'+2y=0.$$

Характеристичне рівняння $k^2-3k+2=0$ має корені: $k_1=2$, $k_2=1$. Загальний розв’язок однорідного рівняння є таким: $y_{з.о.}(x)=C_1e^x+C_2e^{2x}$, C_1, C_2 • *R*.

Частинний розв’язок неоднорідного рівняння будемо шукати у вигляді:

$$y_{ч.н.}(x)=b_0+b_1x+b_2x^2,$$

де b_0, b_1, b_2 – числа, які потрібно знайти. Запишемо першу та другу похідні функції $y_{ч.н.}(x)$:

$$y'_{ч.н.}(x)=\left(b_0+b_1x+b_2x^2\right)'=b_1+2b_2x,\ y''_{ч.н.}(x)=\left(b_1+2b_2x\right)'=2b_2.$$

Знайдені похідні і функцію $y_{ч.н.}(x)$ підставимо у задане неоднорідне рівняння і згрупуємо доданки:

$$2b_2-3\left(b_1+2b_2x\right)+2\left(b_0+b_1x+b_2x^2\right)=x^2,$$

$$2b_2x^2+(2b_1-6b_2)x+2b_2-3b_1+2b_0=x^2$$

Прирівнявши коефіцієнти при однакових степенях x у правій і лівій частинах, одержимо систему рівнянь

$$\begin{cases} 2b_2=1, \\ 2b_1-6b_2=0, \\ 2b_2-3b_1+2b_0=0, \end{cases}$$

розв'язками якої є: $b_0=\frac{7}{4}, b_1=\frac{3}{2}, b_2=\frac{1}{2}$. Отже, $y_{ч.н.}(x)=\frac{7}{4}+\frac{3}{2}x+\frac{1}{2}x^2$.

Тоді $y_{з.н.}(x)=y_{з.о.}(x)+y_{ч.н.}(x)=C_1e^x+C_2e^{2x}+\frac{1}{2}x^2+\frac{3}{2}x+\frac{7}{4}$, C_1, C_2 • R.

б) Складемо характеристичне рівняння і знайдемо його корені: $k^2-4k+3=0$, $k_1=1,\ k_2=3$. Отже, однорідне рівняння має такий загальний розв'язок:

$$y_{з.о.}(x)=C_1e^x+C_2e^{3x},\ C_1,\ C_2 \cdot R.$$

Оскільки $f(x)=xe^x=P(x)e^{mx}$, то частинний розв'язок неоднорідного рівняння шукатимемо у вигляді $y_{ч.н.}(x)=x^sQ(x)e^{mx}$. В даному випадку $P(x)=x$ – многочлен першого степеня. Тому $Q(x)=b_0+b_1x$. Оскільки m=1, причому число 1 є коренем характеристичного рівняння $k^2-4k+3=0$ кратності 1, то s=1.

Отже, частинний розв'язок неоднорідного рівняння будемо шукати у вигляді:

$$y_{ч.н.}(x)=x(b_0+b_1x)e^x.$$

Для знаходження b_0, b_1 знайдемо першу і другу похідні функції $y_{ч.н.}(x)$:

$$y'_{ч.н.}(x)=\left(\left(b_0x+b_1x^2\right)e^x\right)'=(b_1x^2+(b_0+2b_1)x+b_0)e^x,$$

$$y''_{ч.н.}(x)=(b_1x^2+(b_0+4b_1)x+2b_0+2b_1)e^x$$

та підставимо їх разом з функцією $y_{ч.н.}(x)$ в задане неоднорідне рівняння. Одержимо:

$$(b_1x^2+(b_0+4b_1)x+2b_0+2b_1)e^x-4(b_1x^2+(b_0+2b_1)x+b_0)e^x+$$

$$+3(b_0x+b_1x^2)e^x=xe^x,$$

$$-4b_1x-2b_0+2b_1=x.$$

Прирівнявши коефіцієнти при однакових степенях x у правій і лівій частинах, одержимо систему рівнянь

$$\begin{cases} -4b_1 = 1, \\ -2b_0 + 2b_1 = 0, \end{cases}$$

розв'язками якої є: $b_0 = -\frac{1}{4}$, $b_1 = -\frac{1}{4}$. Отже, $y_{ч.н.}(x) = -\frac{1}{4}x(1+x)e^x$.

Тоді $y_{з.н.}(x) = y_{з.о.}(x) + y_{ч.н.}(x) = C_1e^x + C_2e^{3x} - \frac{1}{4}x(x+1)e^x$, *$C_1$, C_2 • R*.

Відповідь: а) $y_{з.н.}(x) = C_1e^x + C_2e^{2x} + \frac{1}{2}x^2 + \frac{3}{2}x + \frac{7}{4}$, *$C_1$, C_2 • R*;

б) $y_{з.н.}(x) = C_1e^x + C_2e^{3x} - \frac{1}{4}x(x+1)e^x$, *$C_1$, C_2 • R*.

Приклад. Знайти розв'язок задачі Коші: $y'' - y = 10\sin 3x$, $y(0) = 0$, $y'(0) = 0$.

Розв'язання. Спочатку знайдемо загальний розв'язок рівняння.

Характеристичне рівняння $k^2 - 1 = 0$ має розв'язки: $k_1 = 1,\ k_2 = -1$. Тому загальний розв'язок однорідного рівняння є таким: $y_{з.о.}(x) = C_1e^x + C_2e^{-x}$, *$C_1$, C_2 • R*.

Частинний розв'язок неоднорідного рівняння будемо шукати у вигляді

$$y_{ч.н.}(x) = b_1 \sin 3x + b_2 \cos 3x.$$

Знайдемо першу та другу похідні функції $y_{ч.н.}(x)$:

$$y'_{ч.н.}(x) = 3b_1 \cos 3x - 3b_2 \sin 3x,\quad y''_{ч.н.}(x) = -9b_1 \sin 3x - 9b_2 \cos 3x,$$

та підставимо $y''_{ч.н.}(x)$ і $y_{ч.н.}(x)$ у задане рівняння $y'' - y = 10\sin 3x$:

$$-9b_1 \sin 3x - 9b_2 \cos 3x - b_1 \sin 3x - b_2 \cos 3x = 10\sin 3x,$$

$$-10b_1 \sin 3x - 10b_2 \cos 3x = 10\sin 3x.$$

Прирівнявши коефіцієнти при функціях $\sin 3x$ і $\cos 3x$, одержимо $b_1 = -1,\ b_2 = 0$. Тому $y_{ч.н.}(x) = -\sin 3x$, $y_{з.н.}(x) = C_1e^x + C_2e^{-x} - \sin 3x$, *$C_1$, C_2 • R*.

Використаємо умову Коші для знаходження сталих C_1, C_2:

$$y'(x) = C_1e^x - C_2e^{-x} - 3\cos 3x,$$

$$y(0) = C_1e^0 + C_2e^{-0} - \sin(3\cdot 0) = c_1 + c_2 = 0,$$

$$y'(0) = C_1e^0 - C_2e^{-0} - 3\cos(3\cdot 0) = c_1 - c_2 - 3 = 0.$$

Розв'язавши систему рівнянь $\begin{cases} c_1 + c_2 = 0, \\ c_1 - c_2 = 3, \end{cases}$ одержимо: $C_1 = \frac{3}{2},\ C_2 = -\frac{3}{2}$.

Отже, $y(x)=\frac{3}{2}e^{x}-\frac{3}{2}e^{-x}-\sin 3x$ – частинний розв’язок диференціального рівняння $y''-y=10\sin 3x$, що задовольняє умовам Коші: $y(0)=0,\ \ y'(0)=0.$

Відповідь: $y(x)=\frac{3}{2}e^{x}-\frac{3}{2}e^{-x}-\sin 3x$.

1.3. Основні питання для самоконтролю

1. Означення загального диференціального рівняння.
2. Диференціальні рівняння першого порядку.
4. Задача Коші.
5. Теорема про існування та єдиності розв’язку.
6. Елементи якісної теорії диференціальних рівнянь першого порядку.
7. Використання диференційних рівнянь в економіці.
8. Розв'язування неповних диференціальних рівнянь першого порядку.
9. Розв'язування диференціальних рівнянь першого порядку з відокремленими змінними.
10. Розв'язування диференціальних рівнянь першого порядку з відокремлюваними змінними.
11. Однорідні та неоднорідні диференціальні рівняння другого порядку.
12. Загальні та частинні розв'язки диференціальних рівнянь другого порядку.
13. Задача Коші для диференціальних рівнянь другого порядку.
14. Знаходження частинних розв'язків для неоднорідних диференціальних рівнянь другого порядку зі спеціальною правою частиною.
15. Розв'язування лінійних диференціальних рівнянь першого порядку.
16. Неповні диференціальні рівняння першого порядку.
17. Диференціальні рівняння з відокремленими та відокремлюваними змінними.
18. Однорідні та лінійні диференціальні рівняння першого порядку.
19. Яке диференціальне рівняння називається неповним?
20. Як інтегрується неповне диференціальне рівняння?
21. Яке диференціальне рівняння називається рівнянням з відокремленими змінними?
22. Як записується диференціальне рівняння першого порядку у диференціальній формі?
23. Яка відмінність між диференціальним рівнянням з відокремленими і відокремлюваними змінними?

24. Як інтегруються диференціальні рівняння з відокремлюваними змінними?
25. Як інтегруються лінійні диференціальні рівняння першого порядку?
26. Однорідні та неоднорідні диференціальні рівняння другого порядку.
27. Загальні та частинні розв'язки диференціальних рівнянь другого порядку.
28. Задача Коші для диференціальних рівнянь другого порядку.
29. Знаходження частинних розв'язків для неоднорідних диференціальних рівнянь другого порядку зі спеціальною правою частиною.
30. Лінійні диференціальні рівняння другого порядку зі сталими коефіцієнтами.
31. Загальний та частинний розв’язки диференціального рівняння.
32. Задача Коші.
33. Які диференціальні рівняння другого порядку називаються лінійними?
34. Який розв'язок називається частинним, та загальним?
35. З чого складається загальний розв'язок лінійного неоднорідного диференціального рівняння другого порядку?
36. Як шукається загальний розв'язок однорідного рівняння?
37. Як шукається частинний розв'язок неоднорідного рівняння?
38. Як визначається частинний розв'язок по умові Коші?
39. Системи лінійних диференціальних рівнянь зі сталими коефіцієнтами.
40. Зведення системи рівнянь першого порядку до одного диференціального рівняння вищого порядку.
41. Про метод розв'язування системи рівнянь із застосуванням власних значень матриці.
42. Означення системи лінійних диференціальних рівнянь зі сталими коефіцієнтами.
43. Означення розв'язку системи.
44. Задача Коші.
45. Поняття про стійкість розв'язків задачі Коші.

46. Дати означення системи лінійних рівнянь з постійними коефіцієнтами.
47. Як зводиться система рівнянь до одного диференціального рівняння вищого порядку?
48. Як задається задача Коші для системи рівнянь?
49. Різницеві рівняння
50. Зв'язок між диференціальними рівняннями та різницевими.
51. Задача Коші для різницевих рівнянь.
52. Дати означення різницевому рівнянню.

53. Як можна записати різницеве співвідношення, що відповідає першій та другій похідні.
54. Який зв'язок існує між диференціальним та різницевим рівняннями?
55. Як ставиться задача Коші для різницевого рівняння?

1.4. Завдання для самостійного рішення

Розв'язування задач

1. $x^2 y' = 1 + \cos y$. 2. $2x\sqrt{1-y^2}dx + ydy = 0,\ y(0) = 1$.

3. $y' = \dfrac{xy + y^2 e^{-x/y}}{x^2}$. 4. $\left(x - y\cos\dfrac{y}{x}\right)dx + x\cos\dfrac{y}{x}dy = 0,\ y(1) = \dfrac{\pi}{2}$.

5. $y' + y\cos x = e^{-\sin x}$. $y' + y\cos x = 0, \Rightarrow \dfrac{dy}{y} = -\cos x\,dx, \Rightarrow y = Ce^{-\sin x}$. $C = C(x) \Rightarrow$

$\Rightarrow C' = 1,\ C = x + C_0. \Rightarrow y = (x + C_0)e^{-\sin x}$.

Завдання для самостійної роботи

1. $y' = \dfrac{1+y^2}{1+x^2}$. 2. $e^{x+y}dx = ydy$. 3. $y' = \dfrac{x^2+y^2}{2x^2}$. 4. $y' + \dfrac{3}{x}y = \dfrac{2}{x^3},\ y(1) = 1$.

5. $(x + 2y + 1)dx + (3 - 2x)dy = 0$. 6. $xy' + y = xy^2$.

Розв'язування задач

1. $y'' - 5y' + 4y = 0,\ y'' - 4y' + 4y = 0,\ y'' - 4y' + 5y = 0$.

2. $y'' - 5y' + 4y = 4x^2 + 2x - 1$. 3. $y'' - 4y' + 4y = e^{2x}$. 4. $y'' - 4y' + 5y = 9\cos 2x - 7\sin 2x$.

5. $y'' + 4y' + 4y = 3e^{-2x},\ y(0) = 0, y'(0) = 0$.

Завдання для самостійної роботи

1. $y'' - y = \dfrac{e^x}{1+e^x}$. 2. $y'' - y' = 2x$. 3. $y'' - 2y' - 3y = 4e^{-x}$.

4. $y'' - y' = x^2 - e^{3x},\ y(0) = 0,\ y'(0) = 0$. 5. $y'' + 2y' + 2y = \sin x$.

Розв'язування задач

1. $\begin{aligned} x_1' &= 2x_1 + x_2, \\ x_2' &= 3x_1 + 4x_2. \end{aligned}$ 2. $\begin{cases} x_1' = 3x_1 + x_2, \\ x_2' = -x_1 + x_2. \end{cases}$

Завдання для самостійної роботи

1. Записати у вигляді різницевих співвідношень такі диференціальні вирази:

$\dfrac{dx}{dt},\ \dfrac{d^2x}{dt^2},\ \dfrac{d^2x}{dt^2} + p(t)\dfrac{dx}{dt} + q(t)x = f(t).$

Записати систему лінійних алгебраїчних рівнянь, яка відповідає різницевому рівнянню, еквівалентному останньому диференціальному рівнянню.

2. Знайти загальний розв'язок диференціального рівняння:

а) $y'' + 2y' - 3y = 0$; б) $4y'' + 12y' + 9y = 0$; в) $y'' + 4y' + 5y = 0$; г) $y'' + 2y = 0$.

3. Розв'язати задачу Коші:

а) $y'' + 2y' = 0,\ \ y(0) = 1,\ \ y'(0) = 0$; б) $y'' - 3y' - 4y = 0,\ \ y(0) = 3,\ \ y'(0) = 7$.

2. ПОСТАНОВКА ЗАДАЧІ ОПТИМАЛЬНОГО УПРАВЛІННЯ

Стан суб'єкта управління характеризується n-вимірною вектор-функцією, наприклад, функцією часу $x'[\ x_1(t), x_2(t), \ldots, x_n(t)]$. Так, шестивимірна вектор-функція часу повністю визначає положення літака як твердого тіла у просторі. Три координати визначають положення центру мас, а три - коливання навколо центру мас.

Від керуючого органу до об'єкту управління поступає вектор-функція $u'[u_1(t), \ldots, u_r(t)]$. Вектори x' та u' , зазвичай зв'язані між собою якимось співвідношенням. Найбільш поширеним в даний час є рівняння, в якому вектори зв'язані системою звичайних диференційних рівнянь.

Нехай рух керуємого об'єкту змальовується системою диференційних рівнянь

$x' = f(x, u, t)$ (2.1)

де x' = (x_1 ,:, x_n) - вектор координат об'єкта або фазових координат,

f = (f_1 ,:, f_n) - задана вектор-функція,

u = (u_1 ,:, u_r) - вектор управління або просто управління.

В рівнянні (2.1) вектори x' та u' є функціями змінної t, яка означає час, причому t $\in$[to, T], де [to, T] - відрізок часу, на якому здійснюється управління системою.

На управління звичайно накладається умова

$u(t) \in U(t)$, $t \in [t_0, T]$ (2.2)

де U(t) - задана множина в R^n при кожному $t \in [to, T]$.

Будемо називати далі управлінням кусочно-неперервну на відрізку [to, T] (таку що має кінцеве число розривів першого роду) r-вимірну вектор-функцію неперервну зправа в точках розриву та неперервну в точці Т. управління називаеться допустимим, якщо воно задовільняє умові (2.2).

Зауважимо, що відокремитись розглядом неперервних керувань є неможливим, тому що з їх допомогою важко моделювати моменти перемикання управління, наприклад, включення та виключення двигунів, відділення ступенів ракети, повороти рулів і т. п..

Іноді розглядають і більш широкі класи допустимих керувань, наприклад, клас всіх вимірюваних керувань, задовільняючих умові (2.2).

Покажемо , як при довільному початковому положенні $x^0 \in R^n$ та допустимому керуванні и визначається траєкторія керуємого об'єкту. Розглянемо задачу Коші

$x'(t) = f(x(t), u(t), t),\ t_0 \leq t \leq T$ (2.3)

оскільки при розривних правих частинах класичне поняття рішення системи розв'язання системи диференційних рівнянь неможливо, пояснимо, що розуміється в даному випадку під розв'язком задачі (2.3). Для цього поступимо слідуючим чином.

Нехай функція и має скачки в точках $r_1, r_2, \ldots\ldots, r_k$ причому $t_0 \prec r_1 \prec r_2 \prec \ldots \prec r_k \prec T$. Припустимо, що задача (2.3) має розв'язок x, визначений на всьому відрізку [to, r_1], причому $x(r_1) = x_1$. Далі розглянемо задачу Коші

$x'(t) = f(x(t0, u(t), t),\ x(r_1) = x_1$.

Припускаючи, що вона має розв'язок на відрізку [r_1 , r_2] та $x(r_2) = x_2$, приходимо до задачі

$x'(t) = f(x(t0, u(t), t),\ x(r_2) = x_2$ і т. д.

Якщо функцію x вдалося визначити у вказаний спосіб на всьому відрізку [to, T], то будемо називати її розв'язком задачі (2.3) або фазовою траєкторією (іноді просто траєкторією), відповідною до управління и. Відмітимо, що x - неперервна по побудові функція, задовільняюча на відрізку [to, T] рівності

$$x(t) = x_0 + \int_{t_0}^{t} f(x(r), u(r), r) dr$$

При виконанні визначених умов на f розв'язок задачі (2.3), відповідне керуванню и, існує і єдине при довільному начальному положенні x_0 і довільно допустимому керуванні и.

Крім обмеження на управління можуть існувати обмеження і на фазові координати $x(t) \in X(T)\ t \in [t_0, T]$(2.4)

Обмеження на кінцях траєкторії потрібно розглядати окремо:

$x(t_0) \in S_0(t_0), t_0 \in \theta_0, x(t) \in S(T), T \in \theta$(2.5)

тут So(to) , S (T) - задані множини із R";

θ_0, θ- задані множжини із R, причому inf θ_0 < sup θ, to<T.

Таким чином, початковий і кінцевий моменти часу не обов'язково фіксовані. Фіксованим to, T відповідають множини θ_0, θ, які складаються із однієї точки; при цьому кажуть, що розглядається задача з закріпленим часом.

Якщо So(to) = {x_0} при будьякому to $\in \theta_{00}$, то лівий кінець траєкторії називають закріпленим. Якщо So(to) == R" при всіх to $\in \theta_{00}$, то лівий кінець траєкторії називають вільним. У всіх інших випадках лівий кінець називають рухомим. В аналогічних випадках кажуть про закріплений, вільний або рухомий правий кінець траєкторії.

Ціль управління в задачі оптимального управління складається в мінімізації декотрого функціонала на множені допустимих наборів.

Якщо кожній функції y=f(x) певного класу ставиться у співвідношенні по декотрому закону певне числове значення змінної I, то цю змінну називають функціоналом від однієї функціональної змінної I=I[y]=I[y(x)]=I[f(x)].

Найбільш частіше під задачами управління розуміються задачи, в яких роль функціонала виконує інтегральний функціонал

$$I = \int_{t_0}^{T} f_0(x(t), u(t), t) dt$$

.

Ми будемо розглядати задачу з цільовим функціоналом

$$\int_{t_0}^{T} f_0(x(t),u(t),t)dt + \varnothing(x(T),T) \qquad (2.6)$$

який представляє собою суму інтегрального функціоналу

$$I = \int_{t_0}^{T} f_0(x(t),u(t),t)dt$$

і термінального функціоналу Ф(x(T), T). Ця задача називається задачею Больца. Її окремими випадками є задача з інтегральним функціоналом, яка має назву задача Лагранжа, і задача з термінальним функціоналом, яка має назву задача Майєра. Задача з інтегральним функціоналом при $f_0 \equiv 1$ має назву задача оптимальної швидкодії.

Набір (to, T, x_0 , и, x), мінімізуючий функціонал (2.6), має назву розв'язку задачі оптимального управління, управління - оптимальним управлінням, а траєкторія x - оптимальною траєкторією. Часто розв'язком задачі оптимального управління називають пару (u, x).

Література [1, 2, 3[

3. ПРИНЦИП МАКСИМУМУ ПОНТРЯГІНА

Ефективним засобом дослідження задач оптимального управління є принцип максимума Понтрягіна, який являє собою необхідну умову оптимальності в таких задачах.

Формулювання принципу максимума.

Розглянемо задачу оптимального управління, яка є окремим випадком задачі, зформульованої вище

$$\int f_0(x(t),u(t),t)dt + \varnothing(x(t)) \to \min \qquad (3.1)$$

$$x'(t) = f(x(t),u(t),t), \ x(t_0) \in S_0, x(t) \in S, u(t) \in U, t_0 \le t \le T,$$

де $S_0 = \{x \in R^n \mid g_i(x) = 0, i = 1,\dots,m_0\}$ (3.2)

$$S = \{x \in R^n \mid g_i(x) = 0, i = m_0 + 1,..,m\}$$

При цьому припускається, що моменти to, T фіксовані, тобто розглядається задача з закріпленим часом; множина U не залежить від часу, фазові обмеження відсутні. Покладемо

$$H(x,u,t,\psi_0,\psi) = \sum_{i=0}^{n} \psi_i f_i(x,u,t)$$
,

де ψ_0 - константа,

$\psi(t) = (\psi_1(t),..., \psi_n(t)$

Функція Н називається функцією Гамільтона.

Система лінійних диференційних рівнянь $\psi' = -H_x$ відносно змінних $\psi_1(t),..., \psi_n(t)$ називається спряженою системою, відповідною керуванню и і траєкторії х. Тут

$$H_x^{'} = \left(\frac{\partial H}{\partial x_1},...,\frac{\partial H}{\partial x_n}\right).$$

В більш докладному покоординатному запису спряжена система має вид

$$\psi_i(t) = -\frac{\partial}{\partial x_i} H(x(t),u(t),t,\psi_0,\psi(t)), i = 1,..,n$$
, (3.3)

Система (7.2.3) має при будьяких початкових умовах єдиний розв'язок ψ, визначений і неперевний на всьому відрізку [to, T].

Слідуюча теорема виражае необхідні умови оптимальності в задачі (3.1).

Теорема (принцип максимума Понтрягіна)

Нехай функції $f_0, f_1,..,f_n$, u, Ф, g_1,..., g_m мають часні похідні по змінним x_1, ..., x_n й неперервні разом з тими похідними по совокупності аргументів x $\in R^n$, u $\in$U , t $\in$[to, T]. Припустимо, що (u, x)-розв'язок задачі (3.1). Тоді існує розв'язок ψ спряженої системи (7.2.3), відповідний керуванню і траєкторії х, і константа ψ_0 такі, що | ψ_0 | + ||ψ(t)|| при t $\in$[to, T], виконуються слідуючі умови:

а) (умова максимума) при кожному t $\in$[to, T] функція Гамільтона H(x, u, t, ψ_0, ψ), досягає максимума по $v \in U$ при v = u (t), т. е.

H(x(t), u(t)$, t, \psi_0, \psi)$=max H(x(t), v(t)$, t, \psi_0, \psi)$ (3.4)

б) (умова трансверсальності на лівому кінці траєкторії) існують числа $\lambda_1, \dots, \lambda_{m0}$, такі, що

$$\psi(t) = \sum_{i=1}^{m_0} \lambda_i g_i\ (x(t_0)) \quad (3.5)$$

в) (умова трансверсальності на правому кінці траєкторії) існують числа $\lambda_{m0-1}, \dots, \lambda_m$ такі, що

$$\psi(t) - \psi_0 \phi(x(t)) = \sum_{i=m0+1}^{m} \lambda_i g_i\ (x(T)) \quad (3.6)$$

Центральною в теоремі є умова максимума -(3.4).

Якщо відмовитись від пропозиції про те, що кінцевий момент часу T фіксований, то теорема є справедливою за винятком умови трансверсальності на правому кінці траєкторії. Умову (7.2.6) замінимо умовою

$$\psi(T) - \psi_0 \frac{\partial}{\partial x} \phi(x(T), T) = \sum \lambda_i \frac{\partial}{\partial x} g_i(x(T), T)$$

и додамо ще одну умову трансверсальності на правому кінці траєкторії:

$$H(x(T), u(T), T, \psi_0, \psi(T)) - \psi_0 \frac{\partial}{\partial t} \phi(x(T), T) = \sum \lambda_i \frac{\partial}{\partial t} g_i x(T), T)$$

4. ПРО МЕТОДИ РОЗВ'ЯЗАННЯ ЗАДАЧ ОПТИМАЛЬНОГО УПРАВЛІННЯ

Переконаємося спочатку, що необхідні умови оптимальності у формі принципу максимуму дають, взагалі, достатню інформацію для розв'язку задачі оптимального управління (2.1), (2.2).

Умова максимуму (2.4) дозволяє, у принципі, знайти управління і як функцію параметрів x, t, ψ_0, ψ

$$H(x,u(x,t,\psi_0,\psi),t,\psi_0,\psi) = \max H(x,v,t,\psi_0,\psi) \quad (4.7)$$

Розглянемо систему диференціальних рівнянь

$$x' = f(x,u(x,t,\psi_0,\psi),t)$$
$$\psi' = -H_x^{'}(x,u(x,t,\psi_0,\psi),t,\psi_0,\psi) \quad (4.8)$$

об'єднуючу систему рівнянь руху об'єкта і сполученої системи.

Як відомо, загальний розв'язок системи (4.8), що складається з 2n звичайних диференціальних рівнянь першого порядку, залежить від 2п параметрів. Крім того, система необхідних умов оптимальності містить т параметрів $\lambda_1,...\lambda_m$ і параметр ?0. Таким чином, загальне число невідомих дорівнює 2n+m+1.

Для їхнього визначення ми маємо 2п умов .2.5), (2.6) і т умов (2.2). Ще одне умову визначається з наступних розумінь.

Легко зрозуміти, що, у силу лінійності функції H по змінних принцип максимуму Понтрягина визначає вектор (ψ_0,ψ) із точністю до позитивного постійного множника. Тому якщо в конкретній задачі вдасться показати, що $\psi_0 \neq 0$, те думають звичайно ψ_0 == - 1. У противному випадку накладають яке умову норміровки, наприклад, $|\psi_0|^2 + \|\psi(t_0)\|^2 = 1$.

Таким чином, загальне число умов дорівнює 2n+m+1 і збігається з числом невідомих параметрів, що, у принципі, дозволяє визначити ці параметри. Викладені розуміння дають можливість у найпростіших випадках вирішити задачу оптимального управління у явному виді.

Опишемо чисельний метод, заснований на тих же міркуваннях. Для цього розглянемо крайову задачу для системи диференціальних рівнянь (4.8) із крайовими умовами (4.5), (4.6), а також виписаними на основі (2.2) крайовими умовами

$$g_i(x(t_0)) = 0, i = 1,...,m_0; g_i(x(T)) = 0, i = m_0 + 1,...,m \quad (4.9)$$

Ця задача називається крайовою задачею принципу максимума.

Задавши довільні початкової умови $x(t_0) = a, \psi(t_0) = b$ і вирішивши яким-небудь чисельним методом задачу Коші для системи (4.8), можна знайти x(T), ψ (T). При цьому на кожному кроці чисельного інтегрування значення $u(x,,t,\psi_0,\psi)$ знаходиться з розв'язку допоміжної оптимізаційної задачі (4.7) (вважаємо, що параметр ψ_0 заданий і дорівнює або 0, або -1).

Значення x (Г), $\psi(T)$ є очевидно, деякими функціями від а і Ь:

$x(T)=\varphi_1(a,b),\psi(T)=\varphi_2(a,b0$). Розв'язок крайової задачі принципу максимуму зводиться, таким чином, до розв'язку отриманої з (4.9), (4.5), (4.6) системи рівнянь

$$g_i(a)=0, i=1,...,m_0, g_i(\varphi_1(a,b))=0, i=m_0+1,...,m,$$

$$b=\sum_{i=1}^{m}\lambda_i g_i^{'}(a),$$

$$\varphi_2(a,b)-\psi_0\phi'(\varphi_1(a,b)=\sum_{i=m_0+1}^{m}\lambda_i g_i^{'}(\varphi_1(a,b)).$$

Ця система містить 2п+т невідомих а, Ь, $\lambda_1,...,\lambda_m$ і складається з 2п+т рівнянь. Її розв'язок можна знаходити відомими чисельними методами, наприклад методом Ньютона.

Відзначимо, що обчислення значень $\varphi_1(a,b),\varphi_2(a,b)$ дуже трудомістке, тому що вимагає при кожному (a, b) розв'язку задачі Коші для системи диференціальних рівнянь (4.8). Саме в таких випадках особливе значення набуває вивчення питань ефективності чисельних методів і побудови оптимальних методів .

При реалізації на ЕОМ методів розв'язку задач оптимального управління, заснованих на необхідних умовах экстремума, можуть зустрітися також значні важкості, викликані некоректністю постановки вихідної і допоміжних задач і деякими особливостями крайового задачі принципу максимуму. Це приводить до необхідності застосування методів регуляризації, обліку специфіки конкретної розв'язуваної задачі, її фізичного змісту і т.п.

Інші чисельні методи, не зв'язані безпосередньо з принципом максимуму, засновані на редукції вихідної задачі до деякій кінцевомірної задачі математичного програмування. Їх називають іноді прямими методами (утім, поділ обчислювальних методів на прямі і непрямі досить умовно).

Кінцевомірні аналоги задач оптимального управління мають особливості, що дозволяють ефективно застосовувати деякі методи нелінійного, динамічного програмування і т. д]. Продемонструємо приклад такого підходу.

Розглянемо наступну задачу оптимального управління

$$\int_{t_0}^{T} f_0(x(t0,u(t),t)dt + \phi(x(T)) \to \min$$

$$x'(t) = f(x(t),u(t0,t),u(t) \in U(t),x(t) \in G(t),t_0 \le t \le T,$$

де моменти часу t_0, T фіксовані. Це задача більш загального виду, ніж (4.1), тому що в (2.10) U залежить від часу і є фазові обмеження довільного виду, що, зокрема, можуть містити обмеження на кінцях траєкторії виду (4.2).

Зафіксуємо моменти часу $t_0 < t_1 < ... < t_{N-1} < t_N = T$ і замінимо задачу (2.10) її кінцеворізничним аналогом

$$\sum_{i=0}^{N-1} f_0(x^i,u^i,t_i)(t_{i+1} - t_i) + \phi(x^N) \to \min,$$

$$\frac{x^{i+1} - x^i}{t_{i+1} - t_i} = (x^i,u^i,t_i), i = 0,1,...N-1;$$
$$u^i \in U_i, i = 0,...,N-1; x^i \in G_i, i = 0,1,...,N,$$
$$U_i = U(t_i), G_i = G(t_i).$$

Поклавши
$\varphi_i^0(x^i,u^i) = f_0(x^i,u^i,t_i)(t_{i+1} - t_i), \varphi_i(x^i,u^i) = x^i + (t_{i+1} - t_i)f(x^i,u^i,t_i),$
задачу можна переписати у виді $\sum_{i=0}^{N-1} \varphi_i^0(x^i,u^i) + \phi(x^N) \to \min$ (4.11)

$$x^{i+1} = \varphi_i(x^i,u^i), i = 0,1,...,N-1,$$
$$u^i \in U_i, i = 0,1,...,N-1: x_i \in G_i, i = 0,1,...,N.$$

Ми одержали задачу математичного програмування зі змінними $x^o, x^1,...,x^N \in R^n, u^0, u^1 ..., u^{N-1} \in R^r$.

Задавши початковий стан x^0 і управління (u^0, u^1, ..., u^{N-1}), по формулах $x^{i+1} = \varphi_i(x^i, u^i)$ легко обчислити траєкторію ($x^{1,\dots,}x^{N)}$. Тим самим (3.12) зводиться до задачі зі змінними $x^{0,\ u0\ ,\ u1,\ \dots,\ uN-1}$, і її розмірність, таким чином, виявляється рівною n+Nr.

Для розв'язку задачі (4.11) часто застосовують метод динамічного програмування. У даному випадку цей метод виглядає в такий спосіб. Введемо функцію $\Lambda_k(x^k) = \min\limits_{u^k,\dots,u^{N-1}} \left[\sum_{i=k}^{N-1} \varphi_i^0(x^i, u^i) + \phi(x^N)\right], x^k \in G_k,$ де мінімум береться по таким $u^k \in U_k, \dots, u^{N-1} \in U_{N-1},$ що $x_{i+1} = \varphi_i(x^i, u^i) \in G_{i+1} (i = k, \dots, N-1)$ (будемо припускати, що усі фігуруючі тут і нижче мінімуми досягаються). Якщо множина таких наборів ($u^{до}$, ..., u^{N-1}) порожня, то значення $\Lambda_k(x^k$) не визначено. Неважко побачити, що $\Lambda_k(x^k) = \min\limits_{u^k} \left[\sum_{i=k}^{N-1} \varphi_k^0(x^k, u^k) + \Lambda_{k+1}(\varphi_k(x^k, u^k))\right],$ (4.12)

де мінімум береться по таким $u^k \in U_k$, що значення $\left[\Lambda_{k+1}(\varphi_k(x^k, u^k))\right]$ визначено.

Поклавши $\Lambda_N(x^N) = \phi(x^N)$ і проводячи обчислення по формулах (4.12) при k=N-1,N-2,...,0 можна знайти розв'язок задачі (4.11).

Дійсно, нехай $v^k(x^k)$- значення управління, реалізуючий мінімум у (4.12). Ясно, що значення задачі (4.11) , тобто мінімальне значення функції, що мінімізує, дорівнює $\Lambda_0(x_*^0) = \min \Lambda_0(x^0)$, де мінімум береться по таким $x^0 \in G_0$, що значення $\Lambda_0(x^0)$ визначено. Оптимальне управління й оптимальна траєкторія знаходяться, мабуть, по формулах

$$u_*^0 = v^0(x_*^0), x_*^1 = \varphi_0(x_*^0, u_*^{0+}), u_*^1 = v^1(x_*^1), \dots, x_*^N = \varphi_{N-1}(x_*^{N-1}, u_*^{N-1}). \quad (4.13)$$

При чисельній реалізації даного методу задаються сіткові апроксимації множин $G_0, U_0, \dots, U_{N-1},$ тобто деякої кінцевої множини $G_0^{'} \subset G_0, U_0^{'} \subset U_0, \dots, U_{N-1}^{'} \subset U_{N-1}.$ Потім будуються множини $G'_{i+1} = \varphi_i(G'_i, U'_i) \cap G_{i+1}$, що служать сітковими апроксимаціями цікавлячих нас підмножин $G_{i+1} (i = 0,..., N-1)$.

Далі по формулах (4.12) обчислюються значення $\Lambda_{N-1}(x^{N-1}), v^{N-1}(x^{N-1})$ для $x^{N-1} \in G'_{N-1}$ і т.д., причому при кожному k мінімум у (7.2.12) береться по $u^k \in U'_k$. Після того як приблизно знайдена точка x^0_*, що мінімізує $\Lambda_0(x^0)$, розв'язок задачі визначається формулами (4.13).

Відзначимо, що дискретні задачі оптимального управління зустрічаються на практику (наприклад, при описі імпульсних систем) і тому становлять інтерес не тільки як кінцеворізничні аналоги безупинних задач.

Література [4 – 10 [

5. ВАРІАЦІЙНА ЗАДАЧА

$$I = \int_a^b F(x, y_1, y_2, ..., y_n, \dot{y}_1, \dot{y}_2, ..., \dot{y}_n) dx; \quad (5.1)$$

$$y_i(a) = A_i; y_i(b) = B_i, i = \overline{1,n}$$

зводиться до розв'язку системи диференційних рівнянь

$$\frac{\partial F}{\partial y_i} - \frac{d}{dx}\left(\frac{\partial F}{\partial y_i}\right) = 0, i = \overline{1,n} \quad (5.2)$$

з граничними умовами

$$y_i(a) = A_i; y_i(b) = B_i, i = \overline{1,n} \quad (5.3)$$

Розв'язок подібних систем в кінцвому вигляді можливо лише в деяких випадках. Тому було проведено роботу по відшуканню приблизних методів розв'язання поставлених варіаційних задач. Ці методи отримали назву прямих методів розв'язку варіаційних задач. Суть методів полягає в розгляданні варіаційної задачі як граничної задачі на екстремум функції багатьох змінних. Пояснимо це на прикладі функціонала:

$$I[y] = \int_a^b F(x, y, y')dx. \quad (5.4)$$

Допустимо, функція $y(x)$ розкладається в ряд, наприклад степенний

$$y(x) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n x^n \quad (5.5)$$

або тригонометричний

$$y(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos nx + b_n \sin nx), \quad (5.6)$$

або любий функціональний

$$y(x) = \sum_{n=1}^{\infty} C_n \varphi(x). \quad (5.7)$$

Вважаючи ряд (7.3.7) таким що рівномірно сходиться, а функцію $F(x, y, y')$ такою, що дозволяє розклад в ряд по функціям $\varphi_n(x)$, отримаємо функціонал

$$I[y] = \varphi(C_1, C_2, \ldots, C_n, \ldots)$$

від нескінченної множини незалежних змінних. Тому, варіаціойні задачі - це звичайні задачі на екстремум з нескінченною кількістю змінних. В прямих методах (наприклад, в методі Рітца) вибирається кінцева кількість функцій $\varphi_i(x), i = \overline{1, n}$ і розв'язується задача на єкстремум з кінцевою кількістю змінних $C_1, C_2, \ldots, C_n$. Затим, якщо відомий загальний вигляд коєфіцієнтів C_n, здійснюючи граничний перехід при $n \to \infty$, отримують розв'язок варіаційні задачи.

Зупинемося детальніше на методі Рітца.

6. МЕТОД РІТЦА

Нехай потрібно знайти екстремум квадратичного функціонала

$$I[y] = \int_a^b \left[P(x)(y')^2 + Q(x)y^2 + R(x)y \right] dx \quad (6.7)$$

з умовами

$y(a) = y_a; y(b) = y_b.$ (6.8)

Запишемо для цього функціонала рівняння Ейлера

$$F(x, y) = P(x)(y')^2 + Q(x)y^2 + R(x)y;$$

$$\frac{\partial F}{\partial y} = 2Q(x)y + R(x); \frac{\partial F}{\partial y'} = 2P(x)y';$$

$$\frac{d}{dx}\left(\frac{\partial F}{\partial y'}\right) = 2P'(x)y' + 2P(x)y'';$$

$$\frac{\partial F}{\partial y} - \frac{d}{dx}\left(\frac{\partial F}{\partial y'}\right) = 0;$$

$$P(x)y'' + P'(x)y' - Q(x)y - \frac{R(x)}{2} = 0; \quad (6.9)$$

$$(P(x)y')' - Q(x) = \frac{R(x)}{2}. \quad (6.10)$$

Рівняння (7.3.9) лінійне, але з змінними коєфіцієнтами, тому знаходження розв'язку цього рівняння має деякі труднощі. Наближене рівняння екстремалі з використанням методу Рітца знаходять у вигляді

$$y(x) = \sum_{i=1}^{n} C_i \varphi_i(x), \quad (6.11)$$

де функції, які називаються базисними (координатними), обирають задовільняючими умовам (7.3.8), наприклад

$$\varphi_i(a) = \varphi_i(b) = 0, i = \overline{1, n}.$$

Тоді і (6.11) задовільняє умовам (6.8). Звичайно за систему функцій $\varphi_i(x), i = \overline{1, n}$ обирають частину нескінченної системи $\varphi_i(x) (i = 1, 2, \ldots, n, n+1, \ldots)$ лінійно незалежних функцій, які визначені і нескінченні на $[a, b]$, наприклад:

$$\varphi_i(x) = \sin \frac{i\pi(x-a)}{b-a}. \quad (6.12)$$

Підставляючи (6.11) в (6.9) і інтегруючи отриманий вираз, знаходимо

$I = I[C_1, C_2, \ldots, C_n]$

Тепер необхідна умова екстремума функціонала замінюється на умову

$$\frac{\partial I}{\partial C_i} = 0, i = \overline{1,n}. \qquad (6.13)$$

Розв'язуючи систему алгебраічних рівнянь (6.13), знайдемо C_i, а з ними і функцію $y(x)$.

Література [11- 20[

7. ПРИКЛАДНІ ЗАДАЧІ ДО ТЕМИ

Приклад 1

Постановка задачі

Методом Рітца побудувати n-е наближення для функції яка дає мінімум функціоналу

$$I(y) = \int_a^b F(x, y, y')dx \qquad (1)$$

визначеному на деякій множені простору $C^{(1)}$.

Розв'язок задачі

Якщо допустимі криві функціонала (1) задовільняють однорідним умовам y(a)=y(b)=0, то для координатних функцій $\varphi_n(x)$ можно прийняти , наприклад,

$\varphi_n(x) = (x-a)(b-x)x^n, n = 0,1,\ldots$ або

$$\varphi_n(x) = \sin\frac{\pi n(x-a)}{b-a}, n = 1,2,\ldots$$

Якщо умови не однорідні, наприклад $y(a) = A, a(b) = B$, то простіше, розв'язок варіаційної задачи шукати у вигляді

$$y_n = \varphi_0(x) + \sum_{R=1}^{n} C_R \varphi_R(x)$$

де $\varphi_0(x)$ задовільняє заданим граничним умовам $\varphi_0(a) = A$, $\varphi_0(b) = B$,а всі інші $\varphi_n(x)$ задовільняють однорідним граничним умовам $\varphi_R(a) = \varphi_R(b) = 0$.

За функцію $\varphi_0(x)$ можно вибрати, наприклад, лінійну функцію $\varphi_0(x) = ((B-A)/(b-a))(x-a) + A$

Відповідно процесу Рітца, розв'язок варіаційної задачі шукаємо у вигляді

$$y_n = \sum_{R=1}^{n} C_R \varphi_R(x) .$$

Підставивши y_n у функціонал (1) отримаємо функцію від n змінних $C_1, \ldots, C_n$

$$\Phi(C_1, \ldots, C_n) = \int_a^b F\left(x,\ \sum_{R=1}^{n} C_R \varphi_R(x),\ \sum_{R=1}^{n} C_R \varphi_R(x), \right) dx$$

яку потрібно дослідити на екстремум. Коефіцієнти $C_1, \ldots, C_n$ находяться із системи $\partial \Phi / \partial C_R = 0$, $R = 1, 2, \ldots, n$.

Розв'язок цих систем є дуже важкою задачею. Вона значно спрощується, якщо на екстремум досліджується квадратичний відносно невідомої функції та її похідних функціонал I(y). В цьому випадку система рівнянь буде лінійною відносно коефіцієнтів C_R.

Метод Рітца застосовується також до функціоналів, які залежать від функцій декількох змінних.

Приклад 2

Постановка задачі

Методом Рітца знайти екстремум функціонала

$$I(z) = \iint_G F(x, y, z, z'_x, z'_y) dy,$$

коли допустимі криві задовільняють граничній умові $z(x,y)|_{\gamma} = 0,$

Розв'язок задачі

Наближене значення екстремалі будемо шукати у вигляді

$$z_n = \sum_{R=1}^{n} C_R \varphi_R(x,y),$$

де всі $\varphi_R(x,y)|_{\gamma}=0$.

Послідовність координатних функцій $\varphi_1,\dots,\varphi_n$ можно побудувати слідуючим чином: знайдемо функцію $\omega=\omega(x,y)$, неперервну разом з похідним в області $\overline{G}$ і таку, що задовільняє умовам

$\omega(x,y)>0$ в G і $\omega(x,y)|_{\gamma}=0$.

Тоді послідовністю координатних функцій буде система функцій

$$\varphi_1=\omega, \varphi_2=\omega x, \varphi_3=\omega y, \varphi_5=\omega x^2, \varphi_5=\omega y^2, \dots$$

Функцію $\omega=\omega(x,y)$ можно вибирати так: якщо контур ⍰ має рівняння $\eta(x,y)=0$, то покладаємо що $\omega(x,y)=\pm\eta(x,y)$, де знак обирається так, щоб виконувалась умова $\omega(x,y)>0$. Якщо, наприклад, ⍰ - окружність $x^2+y^2=R^2$, то $\omega^2=R^2-x^2-y^2$; якщо ⍰ - контур прямокутника

$a\le x\le b$, $c\le y\le d$, то $\omega(x,y)=(b-x)(x-a)(b-y)(y-c).$

Приклад 3

Постановка задачі

Потрібно знайти екстремум квадратичного функціонала

$$I[y]=\int_0^{0,5}\left[x^2(y')^2+xy^2+y\right]dx$$

з початковими умовами

$y(0)=0; y(0)=0.$

Розв'язок задачі

За допомогою програми знаходимо

$$y(x) = 0{,}02 * \sin(\pi x) + 0{,}005 * \sin(2\pi x) + 0{,}0006 * \sin(3\pi x) - 0{,}003 * \sin(4\pi x) + 0{,}02 * \sin(5\pi x)$$

Значення інтеграла $I[y] = 67{,}98$

СПИСОК ЛІТЕРАТУРИ

Основна

1. Жильцов О.Б., Торбін Г.М. Вища математика з елементами інформаційних технологій: Навч. посіб. – К.: МАУП, 2002. – 408 с.
2. Практикум з вищої математики: Навч. посіб. для студ. вищ. навч. закл. / І.І.Юртин, О.Ю.Дюженкова, О.Б.Жильцов та ін.; за ред. І.І.Юртина. – К.: МАУП, 2003. – 248 с.
3. Высшая математика для экономистов: Учебник для вузов / Н.Ш.Кремер, Б.А.Путко, И.М.Тришин, М.Н.Фридман / Под ред. Проф. Н.Ш.Кремера. – М.: ЮНИТИ, 2000. – 471 с.
4. Алексеев В. М., Тихомиров В. М., Фомин С. В. Оптимальное управление. — М.: Наука, 1979. — 429 с.
5. Бейко И. В., Бейко М. Ф. Численные методы решения задач оптимального управления. — К.: Знання, 1970.
6. Бейко И. В., Бублик Б. Н., Зинько П. Н. Методы и алгоритмы решения задач оптимизации. — К.: Выща шк., 1983. — 512 с.
7. Белман Р., Калаба Р. Динамическое программирование и современная теория управления. — М.: Наука, 1969. — 226 с.
8. Болтянский В. Г. Математические методы оптимального управления. — М.: Наука, 1969. — 408 с.
9. Бублик Б. Н., Кириченко Н. Ф. Основы теории управления. — К.: Выща шк., 1975. — 328 с.
10. Будак Б. М., Васильев Ф. П. Приближенные методы решения задач оптимального управления. — М.: Изд-во.

МГУ, 1969. — Ч. 1,2.
11. Васильев Ф. П. Численные методы решения экстремаль-
ных задач. — М.: Наука, 1980. — 520 с.
12. Болтянский В.Г. «Математические методы оптимального управления» М, Наука, 1969. 408 с.
13. Белман Р., Калаба Р. «Динамическое программирование и современная теория управления» М., Наука, 1969. 226 с..
14. Будак Б.М. Васильев Ф.П. «Приближенные методы решения задач оптимального управления» ч.1,2. Изд. МГУ, 1969.
15. Васильев Ф.П. «Численные методы решения экстремальных задач» М. Наука, 1980. 520 с..
16. Бублик Б.Н. Кириченко Н.Ф. «Основы теории управления» К. Вища школа 1975. 328 с.
17. Бейко И.В., Бублик Б.Н., Зинько П.Н. «Методы и алгоритмы решения задач оптимизации» К. Вища школа 1983 512 с.

Додаткова

18. Боэм Б. Инженерное проектирование программного обеспечения: Пер. с англ. – М.: Мир, 1985. -328 с.
19. Ройс У. Управление проектами по созданию программного обеспечения: Пер. с англ. – М.: ЛОРИ, 2002. -424 с.
20. Соловьев В.И. Экономико-математическое моделирование рынка программного обеспечения. – М,: Вега-Инфо, 2009. – 176 с.

Інтернет-ресурси (пошук вGoogle):

21. Економіка програмного забезпечення
22. Економика программного обеспечения