МІЖРЕГІОНАЛЬНА
АКАДЕМІЯ УПРАВЛІННЯ ПЕРСОНАЛОМ

МАУП

МЕТОДИЧНІ МАТЕРІАЛИ ЩОДО ЗАБЕЗПЕЧЕННЯ САМОСТІЙНОЇ РОБОТИ СТУДЕНТІВ

з дисципліни

“МЕТОДИ ОПТИМІЗАЦІЇ І ДОСЛІДЖЕННЯ ОПЕРАЦІЙ”

(для бакалаврів)

Київ 2013

Підготовлено професором кафедри прикладної математики та програмування *І. В. Бейком* та доцентом кафедри прикладної математики та програмування *П. М. Зіньком*

Затверджено на засіданні кафедри кафедри прикладної математики
та програмування (протокол № 1 від 30.08.07)

Схвалено Вченою радою Міжрегіональної Академії управління персоналом

Бейко І. В., Зінько П. М. Методичні матеріали щодо забезпечення самостійної роботи з дисципліни “Методи оптимізації і дослідження операцій” (для бакалаврів). — К.: МАУП, 2013. — 46 с.

Методичні матеріали містять пояснювальну записку, тематичний зміст дисципліни, а також список літератури.

Призначена для самостійної роботи студентів денної та заочної форм навчання, які вивчають дисципліну “Методи оптимізації і дослідження операцій”

ПОЯСНЮВАЛЬНА ЗАПИСКА

Мета навчальної дисципліни “Методи оптимізації і дослідження операцій” — допомогти студентам опанувати сучасними методами розв’язування задач оптимізації та дослідження операцій для підвищення якості управління керованими системами і процесами за допомогою використання сучасного математично-комп’ютерного інструментарію, зокрема, допомогти студентам оволодіти сучасним математично-комп’ютерним інструментарієм дослідження операцій для прийняття оптимальних рішень.

Для забезпечення високої якості навчання та поглиблення знань поряд з аудиторними заняттями студенти здобувають знання також і під час самостійної та індивідуальної роботи на навчальній базі Інституту кібернетики та інформаційних технологій та за його межами. Основний зміст самостійної роботи студентів полягає у вивченні теоретичних положень та набуття практичних навичок їх застосування у сфері професіональної та управлінської діяльності. Самостійна робота студента виконується у бібліотеці, у навчальних кабінетах, у комп’ютерних класах та в домашніх умовах. Самостійна робота студента організаційно і методично планується і спрямовується як особиста творча праця студента. Відведений для самостійної роботи обсяг часу регламентується робочим навчальним планом і згідно з Болонською декларацією становить понад 50% загального обсягу відведеного для вивчення дисципліни. При виконанні самостійної роботи студенти отримують індивідуальну консультацію та допомогу з боку викладачів та фахівців деканату. Самостійна робота студента включає роботу на практичних заняттях і над конспектами лекцій, роботу з опрацювання літературних джерел, роботу в з бібліотеках, зокрема, в електронних бібліотеках Інтернету, вивчення навчального матеріалу за підручниками, навчальними посібниками, а також підготовку доповідей, рефератів, написання курсових робіт; пошукову і науково-дослідну діяльність та самотестування. До самостійної роботи відноситься також вивчення та освоєння методичних вказівок до лабораторних робіт і вивчення додаткової літератури, пов’язаної з виконанням цих робіт.

Самостійна робота студентів з дисципліни “Методи оптимізації і дослідження операцій” здійснюється з використанням навчально-методичних матеріалів та математично-комп’ютерного інструментарію для поглиблення знань і більш досконалого опануванням навчальним матеріалом, теоретичними знаннями та навичками їх практичного застосування. Постійне самостійне навчання допомогає поглибити знання та оволодіти сумою знань і вмінь необхідних для високо кваліфікованого фахівця професіонала. Завдання викладача на аудиторних заняттях вміло подати студентам основи знань, навчити їх самостійно вчитися та добувати нові знання, виділяти ті цікаві моменти дисципліни, які пробуджують у студентів потяг до поглиблення знань.

Практичне значення дисципліни "Методи оптимізації і дослідження операцій" полягає у тому, що прийняття управлінських рішень на усіх рівнях управління зводиться до розв'язування математичних задач оптимізації. Індивідуальна робота студентів сприятиме поглибленню їх знань з дисципліни "Методи оптимізації і дослідження операцій" шляхом творчого пошуку у вивченні сучасної проблематики теорії оптимізації. У процесі самостійної індивідуальної роботи використовуються тестові та розрахункові завдання. За допомогою тестів визначається рівень засвоєння студентом основних принципів та методичних положень, на які спирається сучасна теорія оптимізації і дослідження операцій. Вивчення курсу включає оглядові лекції, анотації до кожної теми курсу, тестові завдання, практичні завдання та завдання для індивідуальної роботи. Лекційний матеріал призначається для спрямування студентів у найбільш раціональному напрямі опанування новими знаннями і акцентуванні уваги на найбільш складних та вузлових питаннях навчальної дисципліни. Конспектування лекції допомогає зберігати студенту важливу інформацію та аналізувати її в подальшому. При підготовці до практичних занять студент використовує конспект лекцій. Якщо у конспекті бракує матеріалу з окремих питань, або вони винесенні на самостійне опрацювання, студент опрацьовує рекомендовані підручники, навчальні посібники та відповідне програмне забезпечення для ПК.

При використанні інтерактивних електронних джерел студент за допомогою гіпертекстової технології наявної у системах MS Word, Adobe Reader, Adobe Acrobat та ін. може знаходити потрібну інформацію та потрібні відповіді на допоміжні питання. Інтерактивні гіпертекстові електронні джерела полегшують подачу багаточисленного багатоформатного допоможного мультимедіа-матеріалу. Сучасні текстові редактори надають можливість створення електронних конспектів для самостійного поглибленого вивчення навчального матеріалу. Самостійній роботі допомагає вміння знаходити необхідний матеріал за літературними першоджерелами, які наводяться у навчально-методичних матеріалах дисципліни, а також і в найбагатших міжнародних фондах Інтернету за URL-адресами Web-документів та Ftp-файлів з літературних джерел у географічно віддалених фондах та архівах, а також шляхом участі у мережевих конференціях, де можна отримати відповіді та поради щодо питань з розшукуваної інформації. В Інтернеті існують різні інформаційно-пошукові системи (http://www.yahoo.com, http://www.portal.edu.ru, http://www.ipl.org та ін.) основані на інформації розподіленій у тематичних розділах за ключовими словами, яка автоматично збирається мережевими програмами і автоматично видається на запити за відповідними ключовими словами.

ЗМІСТ САМОСТІЙНОЇ РОБОТИ
з дисципліни
“МЕТОДИ ОПТИМІЗАЦІЇ І ДОСЛІДЖЕННЯ ОПЕРАЦІЙ”

Тема 1. Задачі одномірної оптимізації

Основні питання, які необхідно опрацювати і засвоїти

1. Задача оптимізації за критерієм оптимальності у вигляді функції однієї змінної. Метод перебору.
2. Метод золотого перетину для мінімізації унімодальних функцій.
3. Метод мінімізації Ліпшицевих функцій
4. Метод поділу відрізка пополам та метод золотого перетину
5. Методи мінімізації за допомогою похідних. Терема Ферма і метод Ньютона.
6. Методи Монте-Карло

Студент повинен знати:

- Формуліровки задач оптимізації та необхідних і достатніх умов екстремуму та глобального мінімуму функції одної змінної.
- методи відшукання мінімальних значень унімодальних функцій.
- методи мінімізації функцій, які задовольняють умови Ліпшиця
- методи оптимального пошуку мінімуму і метод золотого перетину

- методи відшукання мінімальних значень за допомогою похідних
- методи Ньютона для мінімізації диференцьованих функцій.
- Методи Монте-Карло.

Студент повинен вміти:

- будувати алгоритми і розв'язувати задачі відшукання мінімальних значень унімодальних функцій.
- будувати алгоритми для мінімізації ліпшицевих функцій
- будувати алгоритми для розв'язування задач оптимізації методом золотого перетину
- аналітично розв'язувати задачі мінімізації за допомогою похідних
- розв'язувати задачі оптимізації за допомогою метода Ньютона та методів Монте-Карло.

Індивідуальне завдання

Тип завдання: розробка алгоритмів та програм для розв'язування задач оптимізації; проведення числових експериментів для оптимізації параметрів алгоритму; ознайомлення та опрацювання тематичної літератури.

Мета завдання: перевірка знань студентів, набутих у процесі вивчення методів та алгоритмів одномірної оптимізації.

Самостійна робота: проаналізувати дані результатів отриманих в індивідуально проведених обчислювальних експериментах

Ключові терміни: *задачі оптимізації, локально оптимальні, екстремальні та глабальні розв'язки, необхідні умови оптимальності, достатні умови лакального мінімуму, оптимальні алгоритми, наближені розв'язки, метод золотого перетину.*

Література [І, тема 1; 4; 5, гл. 4; 6, тема 1; 10, с. 4–15; 15, гл. 1–2]

1. Метод золотого перетину

Задача 1. Знайти $\arg \min\limits_{x\in[a_0,b_0]} f_0(x)$ для заданої функції $f_0 : R^1 \to R^1$ і заданого відрізка $[a_0,b_0$.

Припущення 1. Функція f_0 така, що на відрізку $[a_0,b_0]$ точка її локального мінімуму $x*$ є точкою абсолютного мінімуму на відрізку $[a_0,b_0]$.

Алгоритм 1

Початок. I. Обчислити константу $\alpha=(3-\sqrt{5})/2$ ($\alpha\cong 0{,}3819$)

II. Обчислити точки

$$y_1=a_0+\alpha(b_0-a_0);$$

$$z_1=a_0+b_0-y_1$$

і значення $f_0(y_1)$, $f_0(z_1)$.

III. Якщо $f_0(y_1)\le f_0(z_1)$, то покласти $a_1=a_0$, $b_1=z_1$ і перейти на крок IV, інакше покласти $a_1=y_1$, $b_1=b_0$ і перейти на крок IV.

IV. Покласти k = 1.

Основний цикл. V. Якщо $f_0(y_k)\le f_0(z_k)$, то обчислити $y_{k+1}=a_k+b_k-y_k$, $f_0(y_{k+1})$ і перейти на крок VI, інакше покласти $y_{k+1}=z_k$, $f_0(y_{k+1})=f_0(z_k)$ і перейти на крок VII.

VI. Покласти

$$z_{k+1}=y_k,\quad f_0(z_{k+1})=f_0(y_k)$$

і перейти на крок 8.

VII. Обрахувати $z_{k+1}=a_k+b_k-z_k$, $f_0(z_{k+1})$ і перейти на крок VIII.

VIII. Якщо $f_0(y_{k+1})\le f_0(z_{k+1})$, то покласти $a_{k+1}=a_k$, $b_{k+1}=z_{k+1}$ і перейти на крок IX, інакше покласти $a_{k+1}=y_{k+1}$, $b_{k+1}=b_k$ і перейти на крок IX.

IX. Обчислити $x^k=(a_{k+1}+b_{k+1})/2$.

X. Покласти $k=k+1$ і перейти на крок V.

Теорема 1. *Якщо виконується припущення 1, то послідовність* $\{x^k\}_k^\infty$, *породжена алгоритмом 1, така, що*

$$\lim_{k\to\infty} f_0(x^k)=f_0(x^*);\quad \lim_{k\to\infty}\left|x^k-x^*\right|=0.$$

Зауваження 1. Довжина відрізку $[a_k,b_k]_{з.п.}$, побудованого по методу золотого перерізу, на 17% більша довжини відрізку $[a_k,b_k]_{Фіб.}$, побудованого по методу Фібоначі. Проте метод золотого перерізу має наступну перевагу, що на кожній його ітерації доводиться робити менше обчислень.

Зауваження 1□. Іноді на практиці комбінують обидва методи: перші кроки роблять по методу золотого перерізу, а коли оптимум достатньо близький, обраховують число m і переходять до методу Фібоначі.

2. Метод Фібоначі

Задача 0. Знайти $\arg \min\limits_{x\in[a_0,b_0]} f_0(x)$ для заданої функції $f_0 : R^1 \to R^1$ і заданого відрізка $[a_0, b_0]$.

Припущення 0. Функція f_0 така, що на відрізку $[a_0, b_0]$ точка її локального мінімуму x^* є точкою абсолютного мінімуму f_0 на відрізку $[a_0, b_0]$.

Методи Фібоначі є оптимальними для класу функцій f_0, які задовольняють припущенню 0 за кількістю обчислень мінімізуючої функції f_0 при заданій точності обчислень x^*.

1. Основний алгоритм

Алгоритм 1

Початок. I. Вибрати число $\varepsilon > 0$ – точність обчислення точки мінімуму функції f_0 на відрізку $[a_0, b_0]$; покласти $F_1 = F_2 = 1$.

II. Покласти $j = 1$.

III. Обчислити число $F_{j+2} = F_{j+1} + F_j$.

IV. Якщо $F_{j+1} < \frac{1}{\varepsilon}(b_0 - a_0) \le F_{j+2}$, то покласти $m = j$ і перейти на крок V; інакше покласти $j = j + 1$ і перейти на крок III.

V. Обчислити точки

$$y_1 = a_0 + \frac{F_m}{F_{m+2}}(b_0 - a_0);$$

$$z_1 = a_0 + b_0 - y_1.$$

VI. Якщо $f_0(y_1) \le f_0(z_1)$, то покласти $a_1 = a_0$, $b_1 = z_1$ і перейти на крок VII; інакше покласти $a_1 = y_1$, $b_1 = b_0$ і перейти на крок VII.

VII. Покласти $k = 1$.

Основний цикл. VIII. Якщо $f_0(y_k) \le f_0(z_k)$, то обчислити точку $y_{k+1} = a_k + b_k - y_k$, обчислити значення $f_0(y_{k+1})$ і перейти на крок IX; інакше покласти $y_{k+1} = z_k$, $f_0(y_{k+1}) = f_0(z_k)$ і перейти на крок X.

IX. Покласти $z_{k+1} = y_k$; $f_0(z_{k+1}) = f_0(y_k)$ і перейти на крок XI.

X. Обчислити точку $z_{k+1} = a_k + b_k - z_k$, обчислити значення $f_0(z_{k+1})$ і перейти на крок XI.

XI. Якщо $f_0(y_{k+1}) \le f_0(z_{k+1})$, то покласти $a_{k+1} = a_k$, $b_{k+1} = z_{k+1}$ і перейти на крок XII; інакше покласти $a_{k+1} = y_{k+1}$, $b_{k+1} = b_k$ і перейти на крок XII.

XII. Якщо $k < m-1$, то покласти $k = k+1$ і перейти на крок VIII; інакше покласти $\bar{x}^* = (a_m + b_m)/2$ і завершити обчислення.

Теорема 1. *Якщо виконується припущення 0, то для будь-якого* $\varepsilon > 0$ *точка* $\bar{x}^*$, *породжена алгоритмом 1, задовольняє нерівність* $|x^* - \bar{x}^*| \le \varepsilon$.

Зауваження 1. Недоліком алгоритму 1 є те, що похибка в обчисленнях точок y_k, z_k можуть настільки швидко накопичуватися, що очікувана точність розв'язку буде суттєво відрізнятися від реальної. Наступна модифікація методу Фібоначі менш чутлива до похибок обчислень.

2. Модифікація методу Фібоначі

Алгоритм 2

Початок. Кроки I – IV такі ж, як у алгоритмі 1.

V. Обчислити точки

$$y_1 = a_0 + \frac{F_m}{F_{m+2}}(b_0 - a_0);$$

$$z_1 = a_0 + \frac{F_{m+1}}{F_{m+2}}(b_0 - a_0).$$

VI. Якщо $f_0(y_1) \le f_0(z_1)$, то покласти $a_1 = a_0$, $b_1 = z_1$ і перейти на крок VII; інакше покласти $a_1 = y_1$, $b_1 = b_0$ і перейти на крок VII.

VII. Покласти $k = 1$.

Основний цикл. VIII. Якщо $f_0(y_k) \le f_0(z_k)$, то обчислити точку

$$y_{k+1} = a_k + \frac{F_{m-k}}{F_{m+2}}(b_0 - a_0),$$

обчислити значення $f_0(y_{k+1})$ і перейти на крок IX; інакше покласти $y_{k+1} = z_k$, $f_0(y_{k+1}) = f_0(z_k)$ і перейти на крок X.

IX. Посласти $y_{k+1} = z_k$; $f_0(y_{k+1}) = f_0(z_k)$ і перейти на крок XI.

X. Обчислити точку $z_{k+1} = a_k + \frac{F_{m-k+1}}{F_{m+2}}(b_0 - a_0)$, обчислити значення $f_0(z_{k+1})$ і перейти на крок XI.

XI. Якщо $f_0(y_{k+1}) \le f_0(z_{k+1})$, то покласти $a_{k+1} = a_k$, $b_{k+1} = z_{k+1}$ і перейти на крок XII; інакше покласти $a_{k+1} = y_{k+1}$, $b_{k+1} = b_k$ і перейти на крок XII.

XII. Якщо $k < m-1$, то покласти $k = k+1$ і перейти на крок VIII; інакше покласти $\bar{x}^* = (a_m + b_m)/2$ і завершити обчислення.

Точка $\bar{x}^*$ задовольняє нерівність $|x^* - \bar{x}^*| \le \varepsilon$, якщо виконується припущення 0.

3. Оптимальний метод пошуку екстремуму унімодальних функцій, що задовольняють умову Ліпшиця

Задача 1. Знайти $\arg \min_{x \in [a_0, b_0]} f_0(x)$ для заданої функції $f_0 : R^1 \to R^1$ і заданого відрізка $[a_0, b_0]$.

Припущення 1. $(\boldsymbol{i})-$ функція f_0 визначена, неперервна і задовольняє умові Ліпшиця з константою γ на $[a_0, b_0]$; $(\boldsymbol{ii})-$ функція f_0 унімодальна, тобто на відрізку $[a_0, b_0]$ має єдину точку мінімуму, зліва від якої f_0 строго спадає, а справа строго зростає з ростом x.

Наведений нижче алгоритм є оптимальним для класу функцій, які задовольняють умовам припущення 1, тобто дає найменше гарантоване значення довжини інтервалу, що містить мінімум функції f_0, після обчислення її в заданому числі N точок. На k-й ітерації алгоритму спочатку знаходять (використовуючи константу γ і значення функції f_0 в точках $x_1, x_2, ..., x_{k-1}$) інтервал локалізації $[a_1, b_1]$ точки мінімуму функції f_0, далі всередині інтервалу $[a_1, b_1]$ – точку x_k, в якій необхідно обчислювати функцію f_0. При обчисленні інтервалу локалізації враховується скінченність константи Ліпшиця γ, що в практичних задачах приводить до значного виграшу (порівнюючи з методом Фібоначі, який є оптимальним в класі унімодальних функцій при $\gamma = \infty$).

Алгоритм 1

Початок. I. Задати константу N — кількість обчислень функції f_0.

II. Знайти числа Фібоначі $F_0, F_1, ..., F_{N+1}$, які визначаються співвідношеннями

$$F_0 = F_1 = 1,\ F_{n+1} = F_{n-1} + F_n,\ n = 1,2,\dots\ .$$

III. Покласти $a_1 = a_0$, $b_1 = b_0$.

IV. Покласти $k = 1$.

Основний цикл. V. Якщо $k = 1$, то перейти на крок VIII; інакше перейти на крок VI.

VI. Обчислити

$$f_{k-1}^* = \min_{1 \le i \le k-1} f_0(x_i).$$

VII. Якщо значення f_{k-1}^* в (1.1) досягається в двох сусідніх точках x_{k_1}, x_{k_2}, $k_1 \in [1:(k-1)]$, $k_2 \in [1:(k-1)]$, таких, що $x_{k_1} < x_{k_2}$, то покласти $a_1 = x_{k_1}$, $b_1 = x_{k_2}$ і перейти на крок VIII; якщо значення f_{k-1}^* в (1.1) досягається в одній точці x_{k_1}, $k_1 \in [1:(k-1)]$, то покласти $x_{k-1}^* = x_{k_1}$ і перейти на крок X.

(Наступні кроки VIII–IX алгоритму відповідають ситуації, коли всередині інтервалу $[a_1, b_1]$ не проводились обчислення функції f_0).

VIII. Якщо $k = N + 1$, то скінчити обчислення (у цьому випадку точка мінімуму функції f_0 належить інтервалу $[a_1, b_1]$, довжина якого не перевищує гарантованого значення $(b_0 - a_0)/F_N$; інакше перейти на крок IX.

IX. Обчислити точку x_k наступного обчислення функції f_0

$$x_k = a_1 + (b_1 - a_1) F_{N-k+1} / F_{N-k+2}$$

(або $x_k = a_1 + (b_1 - a_1) F_{N-k} / F_{N-k+2}$);

обчислити $f_0(x_k)$; покласти $k = k + 1$ і перейти на крок V.

(Кроки X–XVIII алгоритму відповідають ситуації, коли всередині інтервалу локалізації $[a_1, b_1]$ точки мінімуму існує точка x_{k-1}^*, в яких на попередніх ітераціях проводились обчислення функції f_0).

X. Якщо функція f_0 не обчислювалась зліва і справа від точки x_{k-1}^* (це можливо при $k = 2$), то покласти $a_1 = a_0$, $b_1 = b_0$ і перейти на крок XIV; якщо для всіх $i \in [1:(k-1)]$ виконується нерівність $x_{k-1}^* \le x_i$ (тобто, якщо функція f_0 не обчислювалась зліва від точки x_{k-1}^*), то знайти точку x_{k_3}, $k_3 \in [1:(k-1)]$, $x_{k_3} \ne x_{k-1}^*$, найближчу до x_{k-1}^* з правої сторони, покласти $\overline{b_1} = x_{k_3}$ і перейти на крок XI;

якщо для всіх $i \in [1:(k-1)]$ виконується нерівність $x^*_{k-1} \ge x_i$ (тобто якщо функція f_0 не обчислювалась справа від точки x^*_{k-1}), знайти точку x_{k_4}, $k_4 \in [1:(k-1)]$, $x_{k_4} \ne x^*_{k-1}$, найближчу до x^*_{k-1} з лівої сторони, покласти $\overline{a_1} = x_{k_4}$ і перейти на крок XII;

якщо функція f_0 обчислювалась зліва і справа від точки x^*_{k-1}, то знайти точку x_{k_5}, $k_5 \in [1:(k-1)]$, $x_{k_5} \ne x^*_{k-1}$, найближчу до x^*_{k-1} зліва, і точку x_{k_6}, $k_6 \in [1:(k-1)]$, $x_{k_6} \ne x^*_{k-1}$, найближчу до x^*_{k-1} з правої сторони, покласти $\overline{a_1} = x_{k_5}$, $\overline{b_1} = x_{k_6}$ і перейти на крок XIII.

XI. Знайти інтервал локалізації $[a_1, b_1]$ точки мінімуму функції f_0 (після обчислень функції f_0 в $k-1$ точках $x_1, x_2, ..., x_{k-1}$) за правилом

$$a_1 = a_0;$$

$$b_1 = \overline{b_1} - \frac{1}{\gamma}(f_0(\overline{b_1}) - f^*_{k-1})$$

і перейти на крок XIV.

XII. Знайти інтервал локалізації $[a_1, b_1]$ точки мінімуму функції f_0 (після обчислень функції f_0 в $k-1$ точках $x_1, x_2, ..., x_{k-1}$) за правилом

$$a_1 = \overline{a_1} + \frac{1}{\gamma}\left(f_0\left(\overline{a_1}\right) - f^*_{k-1}\right);$$

$$b_1 = b_0$$

і перейти на крок XIV.

XIII. Знайти інтервал локалізації $[a_1, b_1]$ точки мінімуму функції f_0 (після обчислень функції f_0 в $k-1$ точках $x_1, x_2, ..., x_{k-1}$) за правилом

$$a_1 = \overline{a_1} + \frac{1}{\gamma}\left(f_0\left(\overline{a_1}\right) - f^*_{k-1}\right);$$

$$b_1 = \overline{b_1} - \frac{1}{\gamma}\left(f_0\left(\overline{b_1}\right) - f^*_{k-1}\right)$$

і перейти на крок XIV.

XIV. Якщо $k = N+1$, то закінчити обчислення (у цьому випадку точка мінімуму функції f_0 належить інтервалу $[a_1, b_1]$, довжина якого не перевищує гарантованого значення $(b_0 - a_0)/F_N$); інакше перейти на крок XV.

XV. Обчислити

$c_k = (x^*_{k-1} - a_1)/(b_1 - a_1)$.

XVI. Обчислити

$$t_k = \begin{cases} 1-(1-c_k)\,F_{N-k+1}/F_{N-k+2}, & \text{якщо } 0 \le c_k \le 1/2; \\ c_k F_{N-k+1}/F_{N-k+2}, & \text{якщо } 1/2 \le c_k \le 1. \end{cases}$$

XVII. Обчислити точку

$x_k = a_1 + (b_1 - a_1)t_k$.

XVIII. Обчислити значення $f_0(x_k)$, покласти $k = k+1$ і перейти на крок V.

Теорема 1. *Нехай виконується припущення 1 і* $[a_1, b_1]$ *— інтервал локалізації точки мінімуму функції* f_0, *обчислений на* k*-й ітерації* $(k = 1, \ldots, N)$. *Тоді за* $N - k + 1$ *ітерацій, що залишились, алгоритм 1 приводить до інтервалу локалізації точки мінімуму функції* f_0, *довжина якого не перевищує значення* $(b_1 - a_1)\times s_{N-k+1}$, *де*

$$s_{N-k+1} = \begin{cases} \max\{(1-c_k)/F_{N-k+1}, c_k/F_{N-k}\}, & 0 \le c_k \le 1/2; \\ \max\{(1-c_k)/F_{N-k}, c_k/F_{N-k+1}\}, & 1/2 \le c_k \le 1, \end{cases}$$

або $s_{N-k+1} = 1/F_{N-k+1}$, якщо всередині інтервалу локалізації $[a_1, b_1]$ точки мінімуму обчислення функції f_0 не проводились.

Зауваження 1. Якщо $\gamma = \infty$, то алгоритм 1 дає оптимальний гарантований результат, рівний $(b_0 - a_0)F^{-1}_{N+1}$, тобто, як метод Фібоначі. На практиці врахування скінченності константи Ліпшиця γ в алгоритмі 1 приводить до значного виграшу (порівнюючи з методом Фібоначі), який одержують за рахунок специфічної побудови інтервалу локалізації $[a_1, b_1]$ точки мінімуму на кожній ітерації.

4. Методи дотичних

Задача 0. Знайти $\arg \min\limits_{x \in [a_0, b_0]} f_0(x)$ для заданої функції $f_0 : R^1 \to R^1$ і заданого відрізка $[a_0, b_0]$.

1. Випадок диференційованої функції

Припущення 1. $(\boldsymbol{i})-$ функція f_0 неперервно— диференційована на відрізку $[a_0, b_0]$; $(\boldsymbol{ii})-$ функція f_0 випукла на відрізку $[a_0, b_0]$; $(\boldsymbol{iii})-$ $f_0'(a_0) < 0$ і $f_0'(b_0) > 0$.

Алгоритм 1

Початок. І. Вибрати число □□□□ — точність обчислення точки мінімуму; покласти $k = 0$.

ІІ. Обчислити похідні $f_0'(a_0)$ і $f_0'(b_0)$ функції f_0 в точках a_0 і b_0, відповідно.

Основний цикл. ІІІ. Знайти точку x^k — корінь рівняння

$$f_0(a_k) + f_0'(a_k)(x - a_k) = f_0(b_k)(x - b_k).$$

IV. Обчислити $f_0'(x^k)$.

V. Якщо $f_0'(x^k) = 0$, то покласти $x^* = x^k$ і припинити обчислення; інакше перейти на крок VI.

VI. Якщо $f_0'(x^k) < 0$, то покласти $a_{k+1} = x^k$, $b_{k+1} = b_k$, і перейти на крок VIII; інакше перейти на крок VII.

VII. Якщо $f_0'(x^k) > 0$, то покласти $a_{k+1} = a_k, b_{k+1} = x^k$, і перейти на крок VIII.

VIII. Якщо $b_{k+1} - a_{k+1} \le$, то покласти $x^* = (a_{k+1} + b_{k+1})/2$ і припинити обчислення; інакше перейти на крок IX.

IX. Покласти $k = k + 1$ і перейти на крок III.

Теорема 1. *Якщо виконується припущення 1, то для послідовності* $\{x^k\}_{k=0}^{\infty}$, *породжена алгоритмом 1, справедливо*

$$\lim_{\substack{k\to\infty \\ \varepsilon\to 0}} f_0(x^k) = \min_{x\in[a_0, b_0]} f_0(x)$$

Якщо, крім того, що точка мінімуму x^* єдина, то

$$\lim_{\substack{k\to\infty \\ \varepsilon\to 0}} x^k = x^*.$$

2. Випадок недиференційованої функції

Припущення 2. $(\boldsymbol{i})-$ функція f_0 випукла на відрізку $[a_0, b_0]$; $(\boldsymbol{ii})-$ $f_0'(a_0 + 0) < 0$ і $f_0'(b_0 - 0) < 0$.

Алгоритм 2

Початок. I. Задати число □□□0 — точність обчислення точки мінімуму функції f_0; покласти $k=0$.

II. Обчислити правосторонню $f_0'(a_0+0)$ та лівосторонню $f_0'(b_0-0)$ похідні функції f_0 в точках a_0 і b_0, відповідно та покласти $г_0 = f_0'(a_0+0)$, $\beta_0 = f_0'(b_0-0)$.

Основний цикл. III. Знайти точку x^k — корінь рівняння

$f_0(a_k)+f_0'(a_k)(x-a_k)=f_0(b_k)(x-b_k)$.

IV. Обчислити правосторонню $f_0'(x^k+0)$ і та лівосторонню $f_0'(x^k-0)$ похідні функції f_0 в точці x^k.

V. Якщо $f_0'(x^k-0)f_0'(x^k+0)\le 0$, то покласти $x^*=x^k$ і припинити обчислення; інакше вибрати довільне число $д_k$ з відрізка $\left[f_0'(x^k-0), f_0'(x^k+0)\right]$ та перейти на крок VI.

VI. Якщо $д\delta_k<0$, то покласти $a_{k+1}=x^k$, $\gamma_k=\delta_k$, $b_{k+1}=b_k$, $\beta_{k+1}=\delta_k$, і перейти на крок VII.

VII. Якщо $b_{k+1}-a_{k+1}\le$, то покласти $x^*=(a_{k+1}+b_{k+1})/2$ і припинити обчислення; інакше перейти на крок VIII.

VIII. Покласти $k=k+1$ і перейти на крок III.

Теорема 2. *Якщо виконується припущення 2, то для послідовності* $\{x^k\}_{k=0}^{\infty}$, *породжена алгоритмом 2, справедливе твердження теореми 1.*

5. Метод Ньютона

Задача 0. Знайти $\arg\min\limits_{x\in[a_0,b_0]} f_0(x)$ для заданої функції $f_0:R^1\to R^1$ і заданого відрізка $[a_0,b_0]$.

Припущення 0. Функція f_0 двічі неперервно-диференційована на $[a_0,b_0]$ і задовольняє умову

$$\left|f_0''(x)-f_0''(y)\right|\le\alpha|x-y|,\ \alpha<\infty.$$

Ідея методу Ньютона полягає в тому, що функція $f_0'(x)$ лінеаризується в околі точки x^k і знаходять точку x^{k+1}, в якій лінеаризована функція перетворюється в нуль.

Алгоритм 1

Початок. I. Вибрати початкове наближення $x^0 \in [a_0, b_0]$; покласти $k = 0$.

Основний цикл. II. Обчислити $f_0'(x^k)$ – першу похідну функції f_0 в точці x^k.

III. Якщо $f_0'(x^k) = 0$, то припинити обчислення (в цьому випадку точка x^k є стаціонарною точкою функції f_0), інакше перейти на крок IV.

IV. Обчислити $f_0''(x^k)$ – другу похідну функції f_0 в точці x^k.

V. Обчислити наступне наближення

$$x^{k+1} = x^k - \frac{f_0'(x^k)}{f_0''(x^k)}.$$

VI. Покласти $k = k + 1$ і перейти на крок II.

Теорема 1. *Якщо виконується припущення 0 і, крім того,* $(\boldsymbol{i})-$ $f_0'(a_0) f_0'(b_0) < 0;$ $(\boldsymbol{ii})-$ для всіх $x \in [a_0, b_0]$ – $f_0''(x) > 0;$ $(\boldsymbol{iii})-$ для всіх $x \in [a_0, b_0]$ виконується нерівність

$$0 \leq 1 - \left[\frac{f_0'(x)}{f_0''(x)}\right]' \leq \gamma < 1,$$

то послідовність $\{x^k\}_{k=0}^{\infty}$, породжена алгоритмом 1, збігається до стаціонарної точки $\bar{x}$ функції f_0 з квадратичною швидкістю, тобто

$$\left|x^{k+1} - \bar{x}\right| \leq \beta \left|x^k - \bar{x}\right|^2.$$

Тут

$$\beta = \sup_{k=0,1,\ldots} \frac{\left|f_0'''(\theta^k) \cdot f_0''(\eta^k)\right|}{\left[f_0''(\theta^k)\right]^2},$$

де $\theta^k \in [x^k, \bar{x}];$ $\eta^k \in [\theta^k, \bar{x}].$

2. Метод січних

Метод січних є модифікацією методу Ньютона (алгоритму 1), в якому замість другої похідної $f''\left(x^k\right)$ використовується її різницева апроксимація.

Алгоритм 2

Початок. I. Вибрати довільне початкове наближення $x^0 \in [a_0, b_0]$; покласти $k = 0$.

Основний цикл. II. Обчислити $f_0'(x_k)$ – першу похідну функції f_0 в точці x^k.

III. Якщо $f_0'\left(x^k\right) = 0$, то зупинити обчислення (в цьому випадку точка x^k є стаціонарною точкою функції f_0), інакше перейти на крок IV.

IV. Обчислити наступне наближення

$$x^{k+1} = x^k - \frac{f_0'\left(x^k\right)\left(x^k - x^{k-1}\right)}{f_0'\left(x^k\right) - f_0'\left(x^{k-1}\right)}.$$

V. Покласти $k = k + 1$ і перейти на крок II.

Теорема 2. *Якщо виконуються всі умови теореми 1, то послідовність $\left\{x^k\right\}_{k=0}^{\infty}$, породжена алгоритмом 2, збігається до стаціонарної точки $\bar{x}$ функції f_0 з надлінійною швидкістю*

$$\lim_{k\to\infty} \frac{\left|x^{k+1} - \bar{x}\right|}{\left|x^k - \bar{x}\right|^{\tau}} = \left|\frac{2f_0''(\bar{x})}{f_0'''(\bar{x})}\right|^{1/\tau},$$

де τ – розв’язок рівняння $t^2 = t + 1$ $\left(\tau = \left(1 + \sqrt{5}\right)/2 \cong 1{,}618\right)$.

Тема 2. Задачі багатомірної оптимізації без обмежень

Основні питання, які необхідно опрацювати і засвоїти

1. Задача оптимізації за критерієм оптимальності у вигляді функції багатьох змінних.
2. Методи градієнтного спуску.
3. Методи узагальнених градієнтів
4. Методи Ньютона.
5. Методи Монте-Карло

Студент повинен знати:

- формуліровку задач оптимізації функцій багатьох змінних.
- аналітичні методи відшукання мінімальних значень функцій багатьох змінних.
- методи мінімізації функцій за допомогою градієнтів,
- методи Ньютона для мінімізації диференцьованих функцій багатьох змінних.
- Методи Монте-Карло.

Студент повинен вміти:

- будувати алгоритми і розв'язувати задачі відшукання мінімальних значень функцій багатьох змінних аналітичними методами.
- будувати алгоритми для мінімізації функцій за допомогою обчислення градієнтів
- будувати алгоритми оптимізації з використанням узагальнених градієнтів
- розв'язувати задачі оптимізації методами Ньютона
- розв'язувати загальну задачу оптимізації методами Монте—Карло.

Індивідуальне завдання

Тип завдання: розробка алгоритмів та програм для розв'язування задач оптимізації функцій багатьох змінних; проведення числових експериментів для оптимізації параметрів алгоритмів; ознайомлення та опрацювання тематичної літератури.

Мета завдання: перевірка знань студентів, набутих у процесі вивчення методів та алгоритмів багато мірної оптимізації.

Самостійна робота: проаналізувати дані результатів отриманих в індивідуально проведених обчислювальних експериментах.

Ключові терміни: *задачі оптимізації функцій багатьох змінних, необхідні та достатні умови мінімуму,алгоритми прискореної оптимізації.*

Література [I, тема 1; 4; 5, гл. 4; 6, тема 1; 10, с. 4–15; 15, гл. 1–2]

1. Методи градієнтного спуску

Задача. Знайти $\arg \min\limits_{x \in [a_0, b_0]} f_0(x)$ для заданої випуклої вниз функції $f_0 : R^n \to R^1$.

В алгоритмі 1 на k -й ітерації в якості вектору руху h^k до наступного наближення x^{k+1} обираємо протилежний до одиничного вектора узагальненого градієнта функції f_0 в точці x^k. Кроковий множник ρ є сталою величиною. При заданому $\delta > 0$ можна вказати таке $\rho = \rho(\delta)$, що породжена алгоритмом 1 послідовність $\{x^k\}_{k=0}^{\infty}$ попадає в область, де мінімізуюча функція f_0 відрізняється від свого мінімуму на величину δ.

Алгоритм 1

Початок. I. Вибрати довільне початкове наближення $x^0 \in R^n$, постійний кроковий множник $\rho > 0$; покласти $k = 0$.

Основний цикл. II. Обчислити узагальнений градієнт $g(x^k)$ функції f_0 в точці x^k. Якщо $g(x^k)$=0, то $x^k \in X^*$; інакше перейти на крок III.

III. Обчислити вектор h^k (який визначає напрямок руху до наступного наближення x^{k+1})

$$h^k = g(x^k)/\|g(x^k)\|.$$

IV. Обчислити наступне наближення

$$x^{k+1} = x^k - \rho h^k$$

V. Покласти $k = k+1$ і перейти на крок II.

Теорема 1. *Якщо f_0 випукла функція, то для довільного $\delta > 0$ можна знайти таке $\rho(\delta)$, що для послідовності $x^0, x^1, ..., x^k, ...$, породженої алгоритмом 1, при $\rho = \rho(\delta)$ знайдеться таке $k = k^*$, що $x^{k^*} \in X^*$, або така послідовність $x^{k_0}, x^{k_1}, ..., x^{k_i}, ...$, що*

$$\lim_{i\to\infty} f_0(x^{k_i}) - \min_{x\in R^n} f_0(x) < \delta.$$

Теорема 1. *Якщо випукла функція f_0 має область мінімумів X^* таку, що містить сферу радіуса $r > \rho/2$, то для послідовності $x^0, x^1, ..., x^k, ...$, породженої алгоритмом 1, знайдеться таке $k = k^*$, що $x^{k^*} \in X^*$.*

В алгоритмі 2 на k —й ітерації в якості вектору, який визначає напрям руху до наступного наближення x^{k+1}, обирається одиничний вектор узагальненого градієнта функції f_0 в точці x^k. Кроковий множник ρ_k задовольняє умовам

$$\rho_k \ge 0;\ \sum_{k=0}^{\infty} \rho_k = \infty,\ \lim_{k\to\infty} \rho_k = 0 \cdot$$

Алгоритм 2

Початок. I. Вибрати довільне початкове наближення $x^0 \in R^n$ і покласти $k = 0$.

Основний цикл. II. Обчислити узагальнений градієнт $g\left(x^k\right)$ функції f_0 в точці x^k. Якщо $g\left(x^k\right)=0$, то покласти $x^* = x^k$ і припинити обчислення; інакше перейти на крок III.

III. Обчислити вектор

$$h^k = g\left(x^k\right) / \left\| g\left(x^k\right) \right\|.$$

IV. Обчислити значення крокового множника ρ_k, яке задовольняє умовам теореми 2.

V. Обчислити наступне наближення

$x^{k+1} = x^k - \rho_k h^k$.

V. Покласти $k = k+1$ і перейти на крок II.

Теорема 2. *Нехай* $f_0(x)$ *– випукла функція, область мінімумів* X^* *якої обмежена. Тоді, якщо крокові множники* ρ_k, $k = 0,1,\ldots,$ *такі, що*

$$\rho_k \ge 0;\ \ \lim_{k\to\infty} \rho_k = 0;\ \ \sum_{k=0}^{\infty} \rho_k = \infty,$$

то нескінченна послідовність $\left\{x^k\right\}_{k=0}^{\infty}$, *породжена алгоритмом 2, задовольняє граничним співвідношенням*

$$\lim_{k\to\infty} \min_{x\in X^*} \left\| x^k - x \right\| = 0;$$

$$\lim_{k\to\infty} f_0\left(x^k\right) = \min_{x\in R^n} f_0(x).$$

Теорема 2′. *Нехай множина мінімумів*

$$X^* \underline{\underline{\Delta}} \left\{ x \mid f_0(x) = \inf_{x\in R^n} f_0(x) \right\}$$

випуклої функції f_0 *непорожня і крокові множники* ρ_k, $k = 0,1,\ldots,$ *задовольняють умовам*

$$\rho_k > 0,\ k = 0,1,\ldots;\ \lim_{k\to\infty} \rho_k = 0;\ \sum_{k=0}^{\infty} \rho_k = \infty.$$

Тоді, якщо виконується одна з наступних п'яти умов: $(\boldsymbol{iv})-$ множина X^* обмежена; $(\boldsymbol{v})-\ \sum_{k=0}^{\infty} \rho_k^2 < \infty$; $(\boldsymbol{v})-\ \sum_{k=0}^{\infty} \rho_k^2 < \infty$; $(\boldsymbol{vi})-\ \operatorname{int} X^* \neq \varnothing$; $(\boldsymbol{vii})-$ множина X^* є лінійним многовидом в R^n; $(\boldsymbol{viii}) - n = 2$, то граничні точки нескінченної послідовності $\{x^k\}_{k=0}^{\infty}$, породженої алгоритмом 2, належать множині X^*. При цьому умови $(\boldsymbol{v})$ і $(\boldsymbol{vii})$ забезпечують збіжність послідовності $\{x^k\}_{k=0}^{\infty}$ до точки $\bar{x} \in X^*$, а умова $(\boldsymbol{vi})$ забезпечує скінченність алгоритму 2.

Алгоритм 3

Початок. I. Вибрати довільне початкове наближення $x^0 \in R^n$ і покласти $k = 0$.

Основний цикл. II. Обчислити узагальнений градієнт $g\left(x^k\right)$ функції f_0 в точці x^k.

III. Обчислити значення крокового множника ρ_k, яке задовольняє умовам теореми 3.

IV. Обчислити наступне наближення

$$x^{k+1} = x^k - \rho_k g(x^k).$$

V. Покласти $k = k+1$ і перейти на крок II.

Теорема 3. Нехай $f_0(x)$ — випукла вниз функція, область мінімумів X^* якої обмежена. Тоді, якщо $(\boldsymbol{i})-$ крокові множники ρ_k, $k = 0,1,\ldots$, такі, що $\rho_k \geq 0$; $\lim_{k\to\infty} \rho_k = 0$; $\sum_{k=0}^{\infty} \rho_k = \infty$; $(\boldsymbol{ii})-$ послідовність узагальнених градієнтів $\left\{g\left(x^k\right)\right\}_{k=0}^{\infty}$, породжена алгоритмом 3, обмежена, то нескінченна послідовність $\{x^k\}_{k=0}^{\infty}$ задовольняє граничним співвідношенням

$$\lim_{k\to\infty} \min_{x\in X^*} \left\| x^k - x \right\| = 0;$$

$$\lim_{k\to\infty} f_0\left(x^k\right) = \min_{x\in R^n} f_0(x).$$

Метод лінеаризації для розв'язування мінімаксних задач

Задача 1. Знайти $\arg\min\limits_{x\in R^n} f_0(x)$, де
$$f_0(x)\underline{\Delta}\max_{1\le i\le m} f_i(x),$$
тут $f_i(x)$ задані неперервно диференційовані функції.

Позначимо через $\Im_\delta(x)$ множину
$\{i\,|\,1\le i\le m, f_i(x)\ge f_o(x)-\delta\},\quad \delta\ge 0.$

Алгоритм 1

Початок. I. Вибрати довільне початкове наближення $x^o\in R^n$ і константи $\varepsilon\in(1/2,\ 1)$, $\delta>0$ (рекомендується вибирати δ досить малим; $\varepsilon=2/3$); покласти $k=0$.

Основний цикл. II. Покласти $x=x^k$.

III. Знайти $p(x)$ та $\beta(x)$ — розв'язок наступної задачі опуклого програмування: знайти
$$\arg\ \min_{\beta,p}(\beta+\frac{1}{2}\|p\|^2)$$
при обмеженнях
$$(\nabla f_i(x),p)+f_i(x)-\beta\le 0,\quad i\in\Im_\delta(x).$$

IV. Якщо $p(x)=0$, то покласти $x^*=x$ і припинити обчислення; інакше перейти на крок V.

V. Покласти $\tau=0$.

VI. Покласти $a_k=(1/2)^\tau$.

VII. Якщо виконується нерівність
$$f_o(x+\alpha_r p(x))\le f_o(x)-\alpha_r\varepsilon\|p(x)\|^2,$$
то перейти на крок VIII; інакше покласти $\tau=\tau+1$ і перейти на крок VI.

VIII. Покласти $x^{r+1}=x+\alpha_r p(x)$, покласти $k=k+1$ і перейти на крок II.

Теорема 1. *Нехай $f_i(x)$, $i=1,...,m$, неперервно диференційовані функції; область $X_o\underline{\Delta}\{x\,|\,f_o(x)\le f_o(x^0)\}$ обмежена і $\nabla f_i(x), i=1,...,m$, задовольняють в X_o умові Ліпшиця з константою $\gamma_i<\infty$. Тоді будь-яка гранична точка x^* нескінченної послідовності $\{x^k\}_{k=0}^\infty$, породженої алгоритмом 1, задовольняє необхідним умовам мінімуму $f_o(x)$ при*

$x \in R^n$. *Якщо, крім того,* $f_i(x)$, $i \in \overline{1,m}$ *— опуклі, то* x^* *— розв'язок задачі 1.*

Необхідною умовою мінімуму $f_o(x)$ *в точці* x^* *є існування чисел* $\overline{u}_i$, $i = 1,...,m$, *таких, що*

$$\sum_{i=1}^{m} \overline{u}_i \nabla f_i(x^*) = 0;$$

$$\overline{u}_i(f_i(x^*) - f_o(x^*)) = 0, \quad i \in \overline{1,m};$$

$$\sum_{i=1}^{m} \overline{u}_i = 1, \quad \overline{u}_i \geq 0, \quad i = 1,...,m.$$

Наступна теорема дає локальну оцінку збіжності алгоритму 1.

Теорема 1□. *Нехай* x^* *— точка мінімуму* $f_0(x)$, *функції* $f_i(x)$, $i \in \Im_\delta(x^*)$ *— двічі неперервно диференційовані. Крім того, нехай градієнти* $\nabla f_i(x^*)$, $i \in \Im_0(x^*)$, *де*

$$\Im_0(x^*) \underline{\underline{\Delta}} \{i \mid i \in \overline{1,m},\ f_i(x^*) = f_0(x^*)\},$$

такі, що різниці

$$\nabla f_i(x^*) - \nabla f_{i_0}(x^*), \quad i \neq i_0, \ i_0 \in \Im_0(x^*),$$

лінійно-незалежні й множники $\overline{u}_i$ *строго більше нуля для* $i \in \Im_0(x^*)$, *а* $(y, \nabla^2_{xx} \varphi(x^*, \overline{u}) y) > 0$ *для всіх* $y \neq 0$,

тут

$$\varphi(x,u) = \sum_{i=1}^{m} u_i f_i(x),$$

а $\nabla^2_{xx} \varphi(x,u)$ *– матриця других похідних відносно* x.

Тоді при досить малому $\delta > 0$ *і* $\alpha > 0$ *існує такий окіл точки* x^*, *що алгоритм 1 збігається з будь–якого початкового наближення* x^0 *з цього околу і*

$$\| x^* - x^k \| \leq c_1 q^k, \quad 0 < q < 1.$$

Теорема 1□□. *Нехай виконані всі умови теореми 1□, і, крім того, число індексів у множині* $\Im_0(x^*)$ *дорівнює* $n+1$.

У цьому випадку при досить малому $\delta > 0$ *алгоритм 1 в околі* x^* *збігається при постійному* $\alpha_k \equiv 1$ *із квадратичною швидкістю до точки* x^*.

Тема 3. Задачі оптимізації з обмеженнями

Основні питання, які необхідно опрацювати і засвоїти

1. Задачі лінійного програмування
2. Градієнтні методи для задач лінійного програмування.
3. Методи множників Лагранжа для задач нелінійного програмування
4. Градієнтні методи для задач нелінійного програмування.
5. Методи узагальнених градієнтів для задач випуклого програмування

Студент повинен знати:

- формуліровку задач лінійного програмування, двоїстих задач та нелінійних задач багатомірної оптимізації з обмеженнями.
- аналітичні методи множників Лагранжа для задач оптимізації з обмеженнями для функцій з багатьма змінними.
- градієнтні методи мінімізації умовної оптимізації,

Студент повинен вміти:

- будувати алгоритми і розв'язувати задачі лінійного програмування.
- розв'язувати задачі нелінійної оптимізації методами множників Лагранжа
- будувати алгоритми оптимізації з використанням узагальнених градієнтів
- розв'язувати задачі оптимізації методами розтягування простору

Індивідуальне завдання

Тип завдання: розробка алгоритмів та програм для розв'язування задач лінійного та нелінійного програмування, проведення числових експериментів для оптимізації параметрів алгоритмів; ознайомлення та опрацювання тематичної літератури.

Мета завдання: перевірка знань студентів, набутих у процесі вивчення методів та алгоритмів для розв'язування задач лінійного та нелінійного програмування.

Самостійна робота: проаналізувати дані результатів отриманих в індивідуально проведених обчислювальних експериментах

Ключові терміни: *задачі лінійного програмування, градієнтні методи, методи Лагранжа, множники Лагранжа, алгоритми прискореної оптимізації.*

Література [I, тема 1; 4; 5, гл. 4; 6, тема 1; 10,с. 4–15; 15, гл. 1–2]

ЛІНІЙНІ ЗАДАЧІ ОПТИМІЗАЦІЇ З ОБМЕЖЕННЯМИ

Задача лінійного програмування.

Знайти $\arg\max\limits_{x\in X}(c,x)$ для заданого вектора $c \square (c_1,..., c_n)$ на множині X,

$$X \underline{\underline{\Delta}} \left\{ x \middle| Ax = a^0, \; x \ge 0, \; x \in R^n \right\},$$

де A — задана матриця розміром $m \times n$, а a^0 – заданий вектор:

$$A = \begin{pmatrix} \alpha_{11}\alpha_{12}...\alpha_{1n} \\ \alpha_{21}\alpha_{22}...\alpha_{2n} \\ .... \\ \alpha_{m1}\alpha_{m2}...\alpha_{mn} \end{pmatrix}, \; a^0 = \left(a_1^0, a_2^0, ..., a_m^0\right)^T.$$

Приклади задач лінійного програмування

Приклад 1. Фірма виготовляє лак для паркету і для меблів із сировини двох типів C_1 і C_2. В таблиці 1 наведені дані, які характеризують виробничий процес.

	Витрати сировини (в тоннах)		Максимально можливі щоденні витрати сировини
	паркету	меблів	
Сировина C_1 Сировина C_2	4 2	3 2,5	20 12,5
Прибуток (в тис. грн) на тону лаку	6	5	

На щоденне виробництво лаку для меблів витрачалося не більше, ніж півтори тонни від щоденного виробництва лаку для паркету. Комерційний директор поставив задачу: знайти такі оптимальні об'єми щоденного виготовлення обох видів, які дають найбільший прибуток фірмі.

Для розв'язування цієї задачі введемо такі змінні:

x_1 — щоденний об'єм (в тоннах) випуску лаку для паркету;

x_2 — щоденний об'єм (в тоннах) випуску лаку для меблів. Побудуємо цільову функцію (функцію цілі) — щоденний прибуток фірми:

$$L(x_1, x_2) = 6x_1 + 5x_2.$$

Запишемо обмеження задачі:

а) щоденні витрати сировини C_1

$$4x_1 + 3x_2 \le 20;$$

б) щоденні витрати сировини C_2

$$2x_1 + 2{,}5x_2 \le 12{,}5;$$

в) щоденне виробництво лаку для меблів не більше 2-х тонн

$$x_2 \le 3;$$

г) випуск продукції невід'ємний

$$x_1 \ge 0;\ x_2 \ge 0.$$

Тепер сформулюємо задачу лінійного програмування:

Максимізувати $L(x_1, x_2) = 6x_1 + 5x_2$ (1)

при обмеженнях

$$\begin{aligned} 4x_1 + 3x_2 &\le 20; \\ 2x_1 + 2{,}5x_2 &\le 12{,}5; \\ -x_1 + x_2 &\le 1{,}5; \\ x_2 &\le 3; \\ x_1 \ge 0;\ x_2 &\ge 0. \end{aligned} \qquad (2)$$

Допустимим розв'язком ЛП називається будь-яка пара $(\overline{x_1}; \overline{x_2})$, яка задовольняє всі нерівності (2); наприклад, точка (1; 2) є допустимим розв'язком, причому прибуток 4 (1;2) = 6 · 1 + 5 · 2 = 16 тис. грн; точка (3; 2) також є допустимим розв'язком, а прибуток 4 (3; 2) = = 6 · 3 + 5 · 2 = 28 тис. грн. Зрозуміло, що таких допустимих розв'язків існує безліч. Тому для пошуку найкращого (оптимального розв'язку) потрібні ефективні алгоритми.

Вправи 2.1

1. Серед заданих точок знайти допустимі розв'язки:

а) $x_1 = 1{,}5$; $x_2 = 3{,}5$; б) $x_1 = 1{,}5$; $x_2 = 3{,}5$;

в) $x_1 = 2{,}5$; $x_2 = 2{,}5$; г) $x_1 = 2{,}5$; $x_2 = 3{,}5$;

д) $x_1 = 2$; $x_2 = 3{,}5$; е) $x_1 = 4$; $x_2 = -0{,}5$.

2. Побудувати нову область обмежень, враховуючи зміни в постановці задачі:

а) максимально можливі щоденні витрати сировини C_1 дорівнюють 21 тонні, а мінімально можливі щоденні витрати сировини C_1 — 16 т;

б) мінімальне щоденне виробництво лаків обох типів складає 5 т;

в) щоденне виробництво лаку для меблів не менше щоденного виробництва лаку для паркету;

г) відношення щоденного виробництва лаку для меблів до загального об'єму виробництва лаків обох типів не повинно перевищувати 2/3.

3. Серед точок із заданої множини допустимих розв'язків $\overline{x}$ = {(0,5; 0,5), (1; 2,5), (2;2); (0,5; 4); (1,5; 3,5); (2,5; 2,5); (3; 2,25), (3,25;2) }

Знайти "найкращу" точку, тобто точку, в якій цільова функція 4 (x_1, x_2) приймає максимальне значення.

4. Для допустимого розв'язку (4;1) визначити необхідні об'єми сировини C_1 і C_2.

2.2. Приклад графічного способу розв'язування задач лінійного програмування від двох змінних

Графічним способом практично можна розв'язувати тільки задачі лінійного програмування розмірності два, хоча відповідні ідеї покладені в основу побудови загальних методів розв'язування задач ЛП (симплекс—методів).

Графічний спосіб розв'язування задач ЛП складається з двох етапів.

Етап 1. Будується область допустимих розв'язків, які задовольняють усім обмеженням ЛП;

Етап ІІ. В області допустимих розв'язків знаходиться оптимальний розв'язок (оптимальні розв'язки, чи встановлюється, що ЛП оптимального розв'язку не має).

2.2.1. Задача ЛП з максимізацією цільової функції.

Розв'яжемо графічним способом задачу ЛП із пункту 2.1.

Максимізувати 4 $(x_1, x_2) = 6x_1 + 5x_2$ (2.1)

При обмеженнях

$4x_1 + 3x_2 \le 20;$ (а) (2.2)

$2x_1 + 2{,}5x_2 \le 12{,}5;$ (б)

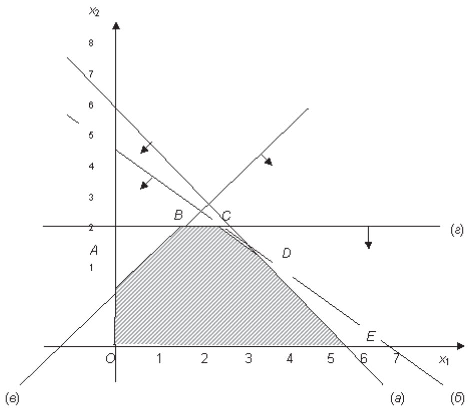
$-x_1 + x_2 \le 1{,}5;$ (в)

$x_2 \le 3;$ (г)

$x_1 \ge 0; x_2 \ge 0.$ (д)

Етап 1. Побудова області допустимих розв'язків.

Спочатку будуємо систему координат (x_1 0 x_2).



Далі проводимо пряму 4 x_1 + 3 x_2 = 20, яка отримується із нерівності (а) із нерівності (а) замінного знака “≤” на знак “□”). Для цього достатньо скласти таблицю

x_1	0	5
x_2	20/3	0

І через дві точки (0; 20), (5;0) провести пряму (а). Пряма (а) ділить площину (x_1 x_2) на дві півплощини. Підставляємо “тестову” точку (0;0) в нерівність (а) і пересвідчуємося, що вона задовільняє цю нерівність, а тому нерівність(а) визначає півплощину, яка містить точку (0;0), (на малюнку 2.1 ця півплощина вказана стрілочкою від прямої (а)). Аналогічним чином будуються півплощини, які визначаються нерівностями (б), (в), (г). Нерівності (д) вказують на те, що область допустимих розв’язків лежить в першому квадранті (вище осі $0x_1$ правіше осі $0x_2$). Таким чином шестикутник ОАВСДЕ визначає область допустимих розв’язків задачі ЛП (2.1), (2.2) мал. 2.1.

Етап II. Знаходження оптимального розв’язку.

Побудуємо спочатку пряму 6 x_1 + 5 x_2 = 15 (ця пряма отримується із (2.1) підстановкою 4 (x_1 , x_2) числа 15) склавши таблицю .

Знайдемо координати вершин шестикутника OABCDE, розв’язавши відповідні системи рівнянь:

$$A:\begin{cases}-x_1+x_2=1,5\\ x_1=0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x_2=1,5\\ x_1=0\end{cases}\Leftrightarrow A(0;1,5);$$

$$B:\begin{cases}-x_1+x_2=1,5\\ x_1=3\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x_1=x_2-1,5\\ x_2=3\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x_1=1,5\\ x_2=3\end{cases}\Leftrightarrow B(1,5;3);$$

$$C:\begin{cases}x_2=3\\ 2x_1+2,5x_2=12,5\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x_2=3\\ x_1=\dfrac{12,5-2,5\cdot x_2}{2}\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x_2=3\\ x_1=\dfrac{5}{2}\end{cases}\Leftrightarrow C(2,5;3);$$

$$D:\begin{cases}4x_1+3x_2=20\\ 2x_1+2,5x_2=12,5\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}4x_1+3x_2=20\\ -2x_2=-5\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x_1=\dfrac{20-3x_2}{4}\\ x_2=2,5\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x_1=\dfrac{20-7,5}{4}\\ x_2=2,5\end{cases}\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow\begin{cases}x_1=3,125\\ x_2=2,5\end{cases}\Leftrightarrow D(3,125;2,5);$$

$$E:\begin{cases}4x_1+3x_2=20\\ x_2=2,5\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x_1=5\\ x_2=0\end{cases}\Leftrightarrow E(5;0).$$

x_1	0	2,5
x_2	3	0

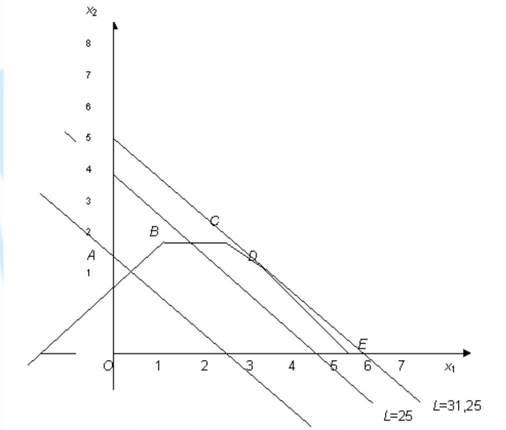
Тепер побудуємо пряму 6 x_1 + 5 x_2 = 25 (ця пряма отримується із (2.1) підстановкою замість 4 (x_1 x_2) числа 25) склавши таблицю

$x1$	0	25/6
$x2$	6	0

Очевидно, що прямі 6 x_1 + 5 x_2 = 15 і 6 x_1 + 5 x_2 = 25 є паралельними , причому подвійна стрілка вказує напрям зростання цільової функції 4 (x_1, x_2) (мал. 2.2). Із малюнку 2.2 бачимо, що максимального значення цільова функція 4 (x_1, x_2) набуває в точці D (бо при подальшому паралельному перенесенні прямої 6 x_1 + 5 x_2 = const в напрямі ⇒ перетину цієї прямої з областю допустимих розв'язків не буде). Отже оптимальний розв'язок задачі ЛП (2.1), (2.2), (2.2) x^*_1 = 3,125; x^*_2 = 2,5, при цьому значення цільової функції 4(x^*_1, x^*_2) = 6 · 3,125 + 5 · 2,5 = 31,25. Звідси можна зробити висновок, що для компанії найвигідніше щоденно випускати 3, 125 т лаку для паркету та 2,5 т лаку для меблів і отримувати щоденний прибуток 31, 25 тис грн.

Із малюнка 2.2 випливає, що якщо змінювати коефіцієнти цільової функції

4 (x_1, x_2) (тобто змінювати кут нахилу прямих 4 $(x_1, x_2) = a\, x_1 + bx_2$), то оптимальний розв'язок буде розміщений або у вершинах шестикутника *OABCDE*, або оптимальними розв'язками будуть всі точки відрізків *AB*, чи *BC*, чи *CD* тощо. У цьому і полягає основна ідея побудови загального симплексного методу розв'язування задач ЛП, який буде розглянуто в наступному розділі.



Вправи 2.2.1.

1. Для кожної нерівності визначити допустиму півплощину:

Краще: Для кожної нерівності знайти геометричне відображення допустимого півпростору:

а) $1{,}5\, x_1 + 2\, x_2 \geq 15$;

б) $-\, 4\, x_1 + 3{,}5\, x_2 \ \geq 3$;

в) $3\, x_1 + 3{,}5\, x_2 \ \leq -\, 2$.

2. Визначити напрям зростання цільової функції 4 (x_1, x_2):

а) максимізувати 4 $(x_1, x_2) = \ 2x_1 + \ 1{,}5\, x_2$;

б) максимізувати 4 $(x_1, x_2) = \ -5\, x_1 - 0{,}5\, x_2$;

в) максимізувати 4 $(x_1, x_2) = \ 1{,}5\, x_1 - 0{,}3\, x_2$.

3. Для моделі (2.1), (2.2) побудувати область допустимих розв'язків і знайти оптимальний розв'язок при наступних незалежних змінах умов задачі:

а) щоденний об'єм виробництва лаку для меблів не повинен перевищувати 2,7 т і бути не меншим 1,2 т;

б) щоденний об'єм виробництва лаку для паркету повинен бути не меншим 1 т і не перевищувати 4,5 т;

в) щоденні витрати сировини C_2 повинні бути не менші 8 т.

4. Для області допустимих розв'язків (2.2) знайти оптимальний розв'язок для наступних цільових функцій:

а) $4\,(x_1, x_2) = x_1 + 2{,}5\,x_2$;

б) $4\,(x_1, x_2) = 10\,x_1 +{,}5\,x_2$;

в) $4\,(x_1, x_2) = 4\,x_1 + x_2$.

2.2.2 Задача ЛП з мінімізацією цільової функції.

Приклад 2. Комбікормовий завод щоденно виготовляє не менше 1200 т комбікормів, які складаються із суміші вівса і пшениці, склад якої задається в таблиці.

	Білок клітковина (в тоннах на тонну суміші)		Вартість (тис грн. за тонну)
овес	0,08	0,01	0,5
пшениця	0,5	0,7	0,8

Замовники продукції вимагають, щоб у комбікормах було не менше 2% білків і не більше 6% клітковини. Головний технолог заводу хоче визначити склад суміші з урахуванням вимог замовників і виробництва, мінімізуючи вартість комбікормів.

Вводимо змінні задачі, які необхідно визначити

x_1 — кількість (в тоннах) вівса, який використовують у щоденному виробництві комбікормів;

x_2 — кількість (у тоннах) пшениці, яка використовується в щоденному виробництві комбікормів.

Отже, цільова функція, яку потрібно мінімізувати має вигляд

$4\,(x_1, x_2) = 0{,}5x_1 + 0{,}8\,x_2$

Вимога щоденного виробництва — не менше 1200 т записується таким чином

$x_1 + x_2 \geq 1200.$

Кількість білка в x_1 тоннах вівса дорівнює 0,08 x_1 (тонн). Сумарна кількість білка повинна бути не менша 2% від маси суміші $x_1 + x_2$. Таким чином отримуємо нерівність

$$0{,}07x_1 + 0{,}5\,x_2 \geq 0{,}2\,(x_1 + x_2)$$

Аналогічно міркуючи отримуємо нерівність для клітковини

$$0{,}01x_1 + 0{,}07x_2 \geq 0{,}06\,(x_1 + x_2)$$

Після зведення подібних чинів у двох останніх нерівностях можемо сформулювати задачу ЛП з мінімізацією цільової функції:

Мінімізувати 4 $(x_1, x_2) = 0{,}5x_1 + 0{,}8\,x_2$

При обмеженнях

а) $x_1 + x_2 \geq 1200$,

б) $0{,}13\,x_1 - 0{,}3\,x_2 \leq 0$,

$0{,}05\,x_1 - 0{,}01\,x_2 \geq 0$,

в) $x_1 \geq 0$, $x_2 \geq 0$.

На малюнку 2.3 зображень допустима область розв'язків (до речі, ця область є необмеженою). Зауважимо, що прямі) $0{,}13\,x_1 - 0{,}3\,x_2 = 0$ і $0{,}05\,x_1 - 0{,}01\,x_2 = 0$ проходять через початок координат (0;0) , тому для визначення півплощин, які визначаються нерівностями (б) і (в) , в якості тестової точки потрібно брати не (0;0), а якусь іншу точку , наприклад (0; 500). Мал. 2.3 . Побудуємо також дві прямі , які відповідають цільовій функції при $L\,(x_1, x_2) = 200$ і 4 $(x_1, x_2) = 1000$, і таким чином отримаємо напрям спадання цільової функції, який позначаємо стрілкою $\Rightarrow$. Найменше значення цільова функція 4 (x_1, x_2) приймає в точці B, яка є точкою перетину прямих (а) і (б) .

Розв'язавши систему рівнянь

$$\begin{cases} x_1 + x_2 = 1200, \\ 0{,}13x_1 - 0{,}3x_2 = 0 \end{cases}$$

Знайдемо координати точки B: B $\left(\frac{36000}{43};\frac{15600}{43}\right)$. Отже, оптимальна кількість вівса, яка використовується в щоденному виробництві комбікормів складає $\frac{36000}{43} \approx 837{,}21$ (тонн); а пшениці — $\frac{15600}{43} \approx 362{,}79(\textit{тонн})$, при цьому мінімальна вартість комбікормів складає $0{,}5 \cdot \frac{36000}{43} + 0{,}8 \cdot \frac{15600}{43} \approx 708{,}837$ тис. грн.

Вправи 2.2.2.

1. Необхідно побудувати нову допустиму область розв'язків і знайти оптимальний розв'язок при наступних змінних;

а) кількість вівса, що використовується в щоденному виробництві комбікормів не перевищує 500 т;

б) кількість вівса, що використовується в щоденному виробництві комбікормів не перевищує 900 т, а пшениці – не перевищує 1100 т;

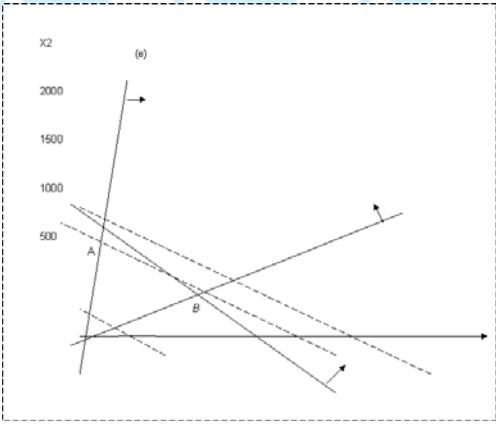
в) щоденне виробництво комбікормів не більше 1200 т;

2. Визначити напрям спадання таких цільових функцій:

а) мінімізувати 4 $(x_1, x_2) = 1{,}7x_1 + 1{,}5x_2$;

б) мінімізувати 4 $(x_1, x_2) = -4x_1 - 5x_2$;

в) мінімізувати 4 $(x_1, x_2) = 0{,}6x_1 - 2{,}2x_2$.



2.1.3. Додаткові змінні в задачах лінійного програмування.

У даному пункті вводяться додаткові невід'ємні змінні: залишкова та надлишкова, які, відповідно, зв'язані з нерівностями "≤" "≥"; і вільна змінна, яка може приймати будь-яке значення і R.

А. Залишкова змінна. Нерівності "≤" в обмеженнях задачі ЛП в основному інтерпретують , як обмеження на використання ресурсів, а залишкова змінна показує кількість невикористаного ресурсу. Для прикладу 1 із пункту 2.1 розглянемо перше обмеження зв'язане із щоденними витратами сировини C_1

$$4x_1 + 3x_2 \le 20.$$

Ця нерівність еквівалентна рівності

$4x_1 + 3x_2 + S_1 = 20$,

де залишкова змінна S_1 ($S_1 \ge 0$) дорівнює невикористаній кількості сировини C_1

$$S_1 = 20 - (4x_1 + 3x_2).$$

Б. Надлишкова змінна.

Методи і алгоритми для розв'язування задачі лінійного програмування великої розмірності

Задача 1. Знайти $\arg\max\limits_{x \in X}(c,x)$ для заданого вектора c □ $(c_1,\ldots,c_n)$ та заданої множини

$$X \underline{\underline{\Delta}} \left\{ x \,\middle|\, Ax = a^0,\ x \ge 0,\ x \in R^n \right\},$$

де A — матриця розміром $m \times n$:

$$A = \begin{pmatrix} \alpha_{11}\alpha_{12}\ldots\alpha_{1n} \\ \alpha_{21}\alpha_{22}\ldots\alpha_{2n} \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ \alpha_{m1}\alpha_{m2}\ldots\alpha_{mn} \end{pmatrix},\ a^0 = \left(a_1^0, a_2^0, \ldots, a_m^0\right)^T.$$

Стовпці матриці A позначаються через $a^1, a^2, \ldots, a^n$.

Двоїста задача (двоїста до задачі 1):

знайти $\arg\max\limits_{(\mu_1,\ldots,\mu_m)} \sum\limits_{i=1}^{m} a_i^0 \mu_i$ при обмеженнях

$$\sum_{i=1}^{m} \alpha_{ij}\mu_i \le 0 \text{ при } j \in \Im;$$

$$\mu_i \le 1,\ i = 1, 2, \ldots, m.$$

1. Метод послідовного скорочення нев'язок.

Припущення 1. $(\boldsymbol{i}) - a_i^0 \ge 0,\ i = 1, 2, \ldots, m$, $(\boldsymbol{ii}) -$ ранг матриці A дорівнює m;

(iii) – $n > m$; $(\boldsymbol{iv}) -$ двоїста задача 2.0 має допустимі розв'язки.

Метод послідовного скорочення нев'язок використовує пряму і двоїсту задачі лінійного програмування. Правила переходу від однієї ітерації до іншої забезпечує скорочення нев'язок (різниць між лівими і правими частинами умов—рівностей задачі 1.0). Через кінцеве число ітерації або нев'язки зводяться до нуля (тобто знаходиться оптимальний розв'язок задачі 1.0), або встановлюється нерозв'язність задачі 1.0. На кожній ітерації алгоритму необхідно обчислювати оптимальні розв'язки деякої допоміжної задачі і двоїстої до неї. В методі необхідно попередньо обчислювати допустимий розв'язок двоїстої задачі 2.0.

Алгоритм 1

Початок. I. Знайти довільний допустимий розв'язок $y=(y_1, y_2, \ldots, y_m)$ двоїстої задачі 2.0.

Основний цикл. II. Знайти всі індекси $j \in [1:n]$, для яких

$$\sum_{i=1}^{m} \alpha_{ij} y_i = c_j \,,$$

і позначити множину таких індексів через

$$J \underline{\underline{\Delta}} \{j_1, j_2, \ldots, j_l\}.$$

III. Використовуючи модифікований симплекс—метод, знайти оптимальний розв'язок ($\bar{x}^*_{j_1}, \bar{x}^*_{j_2}, \ldots, \bar{x}^*_{j_l}, \varepsilon^*_1, \varepsilon^*_2, \ldots, \varepsilon^*_m$) допоміжної задачі 1 лінійного програмування в просторі R^{l+m} :

Задача 1. Знайти $\arg \min\limits_{(\bar{x}_{j_1}, \ldots, \bar{x}_{j_l}, \varepsilon_1, \ldots, \varepsilon_m)} \sum\limits_{i=1}^{m} \varepsilon_i$ при обмеженнях

$$\sum_{j \in \mathfrak{I}} \alpha_{ij} \bar{x}_j + \varepsilon_i = a_i^0, \;\; i = 1, \ldots, m;$$

$$\bar{x}_j \geq 0 \;\text{ при }\; j \in \mathfrak{I};$$

$$\varepsilon_i \geq 0, \;\; i = 1, 2, \ldots, m.$$

IV. Знайти оптимальний розв'язок $\mu^* = (\mu^*_1, \mu^*_2, \ldots, \mu^*_m)$ задачі, двоїстої до приведеної вище допоміжної задачі 1, який можна обчислити за формулою

$$\mu^* = (\bar{c}_{i_1}, \bar{c}_{i_2}, \ldots, \bar{c}_{i_m}) B_{\mathfrak{I}}^{-1}$$

де $B_{\mathfrak{I}}^{-1}$ — матриця, обернена до оптимальної базисної матриці задачі 1; $(\bar{c}_{i_1}, \bar{c}_{i_2}, \ldots, \bar{c}_{i_m})$ — координати вектора $(\underbrace{0, \ldots, 0,}_{l} \; \underbrace{1, 1, \ldots, 1}_{m})$, які відповідають оптимальному базису задачі 1. При розв'язуванні задачі 1 модифікованим симплекс—методом матриця $B_{\Im}^{-1}$ і вектор $(\bar{c}_{i_1}, \bar{c}_{i_2}, ..., \bar{c}_{i_m})$ відомі.

V. Якщо нев'язки ε_i^*, $i = 1, 2, \dots, m$, задовольняють рівності

$$\varepsilon_i^* = 0, \ i = 1, 2, \dots, m,$$

то обчислити вектор $x^* = (x_1^*, x_2^*, ..., x_n^*)$ за правилом

$$\left.\begin{array}{lll} x_j^* = \bar{x}_j^* & \text{при} & j \in \Im \\ x_j^* = 0 & \text{при} & j \notin \Im \end{array}\right\}, \quad j = 1, \dots, n,$$

і зупинити обчислення (в цьому випадку знаходиться оптимальний розв'язок x^* задачі 1.0);

якщо при деякому $i \in [1:m]$ $\varepsilon_i^* > 0$, то перейти до кроку VI.

VI. Обчислити величини

$$\delta_j^* = \sum_{i=1}^{m} \alpha_{ij} \mu_i^*, \ j = 1, \dots, n.$$

VII. Якщо при всіх $j \in [1:n]$ виконується нерівність $\delta_j^* \le 0$, то припинити обчислення (в цьому випадку задача 1.0 не має допустимих розв'язків); інакше перейти до кроку VIII.

VIII. Обчислити величини Δ_j для тих j, для яких $\delta_j^* > 0$:

$$\Delta_j = \sum_{i=1}^{m} \alpha_{ij} y_i - c_j \, .$$

IX. Обчислити відношення Δ_j / δ_j^* для тих j, для яких $\delta_j^* > 0$, і мінімальне з цих відношень позначити через θ_0.

X. Покласти $\bar{y} = y$.

XI. Перейти до нового допустимого розв'язку $y = (y_1, \dots, y_m)$ двоїстої задачі 2.0 за правилом

$$y_i = \bar{y}_i - \theta_0 \mu_i^*, \ \ i = 1, \dots, m.$$

XII. Перейти до кроку II.

Теорема 1. *Якщо задача 1 невироджена, то алгоритм 1 завершиться або на кроці V (з відшуканням розв'язку), або на кроці VII (у випадку відсутності допустимих розв'язків).*

Алгоритм розв'язання прямої і двоїстої задач лінійного програмування.

Пряма задача. Знайти $\arg\max\limits_{x\in X}(c,x)$ для заданого вектора c □□R^n і заданої множини

$$X \underline{\underline{\Delta}} \left\{x \mid Ax \le b,\, x \ge 0,\, b \in R^m,\, x \in R^n\right\}.$$

Двоїста задача. Знайти $\arg\min\limits_{y\in Y}(y,b)$ для заданого вектора $b \in R^m$ і заданої множини

$$Y \underline{\underline{\Delta}} \left\{y \mid yA \ge c,\ y \ge 0,\ c \in R^n,\ y \in R^m\right\}.$$

Припущення 4. Задача 4 і 4□ мають розв'язок.

Розв'язок пари двоїстої задачі 4 і 4□ зводяться до розв'язку наступної додаткової задачі нелінійного програмування:

знайти $\arg\min\limits_{(x,y,\xi,\eta)} g(x,y,\xi,\eta)$ при обмеженнях

$$x \ge 0, \quad \xi \ge ox, \quad \xi \ge \tau e^n;$$

$$y \ge 0, \quad \eta \ge \delta y, \quad \eta \ge \tau e^m,$$

де

$$g(x,y,\xi,\eta) = (y,b) + (q(y),\xi) - (c,x) - (p(x),\eta);$$

$$q(y) = \max\{-yA + c, 0\};$$

$$p(x) = \max\{Ax - b, 0\};$$

$e^n \in R^n$, $e^m \in R^m$ — вектори з одиничними компонентами; σ, τ – константи, що задовольняють умовам $1 < \sigma < 3,\ \tau > 0$.

Якщо вектор $(x^*, y^*, \xi^*, \eta^*)$ – розв'язок допоміжної задачі 4, а y^* — розв'язок задачі 4□.

Алгоритм 2

Початок. I. Вибрати довільне початкове наближення $x^0 \in R_+^n, y^0 \in R_+^m$.

II. Вибрати константи σ, τ з умов

$$1 < \sigma < 3,\ \ \tau > 0$$

III. Вибрати вектори $\xi^0 = \left(\xi_1^0, \ldots, \xi_n^0\right)$, $\eta^0 = \left(\eta_1^0, \ldots, \eta_m^0\right)$, що задовольняють обмеженням (4.43) при $x = x^0$, $y = y^0$.

IV. Вибрати константи l і $\hat{\rho} < \frac{1}{2}$ $(l > \hat{\rho})$, що визначають крокові множники алгоритму.

V. Вибрати константу $\varepsilon > 0$, що визначає точність обчислення оптимального значення задач 4 і 4'.

VI. Покласти $x = x^0$, $y = y^0$, $\xi = \xi^0$, $\eta = \eta^0$, $\varphi_1 = -\infty$, $\psi_1 = +\infty$, $\overline{y} = y^0$, $d = 0$, $k = 1$, $\rho = 1/2$.

Основний цикл. VII. Обчислити вектори $\hat{x}(y) = (\hat{x}_1(y), ..., \hat{x}_n(y))$, $\hat{y}(x) = (\hat{y}_1(x), ..., \hat{y}_m(x))$ за формулами

$$\hat{x}_j(y) = \begin{cases} 0, & \text{якщо } q_j = 0, \\ \xi_j, & \text{якщо } q_j > 0, \end{cases} \qquad j = 1, ..., n \quad ;$$

$$\hat{y}_v(x) = \begin{cases} 0, & \text{якщо } p_v = 0, \\ \eta_v, & \text{якщо } p_v > 0, \end{cases} \qquad v = 1, ..., m \quad ,$$

де

$$p = \max\{Ax - b, 0\};\ q = \max\{c - yA, 0\}.$$

VIII. Обчислити наступні наближення x^{k+1} і y^{k+1}

$$x^{k+1} = (1 - \rho)x^k + \rho\hat{x}(y);$$

$$y^{k+1} = (1 - \rho)y^k + \rho\hat{y}(x)$$

і покласти $x = x^{k+1}$, $y = y^{k+1}$.

IX. Якщо $\rho \geq \hat{\rho}$, то перейти на крок X, якщо $\rho < \hat{\rho}$, то перейти на крок XII.

X. Покласти $k = k + 1$, $d = d + \rho$ і перейти на крок XI.

XI. Якщо $d \geq l$, то покласти $d = 0$, $\rho = \dfrac{\rho}{2}$ і перейти на крок VII, якщо $d < l$, то перейти на крок VII.

XII. Обчислити значення $\varphi(x, \eta)$, де функція $\varphi(x, \eta)$ задається правилом

$$\varphi(x, \eta) = (c, x) - (\eta, p), p = \max\{Ax - b, 0\}$$

і покласти $\varphi = \varphi(x, \eta)$.

XIII. Якщо $\varphi > \varphi_1$, то перейти на крок XIV, інакше перейти до XVII.

XIV. Покласти $\varphi_1 = \varphi$, $\overline{x} = x$.

XV. Обчислити вектор

$$\xi(x) = \max\{\sigma x, \tau e^n\}$$

і покласти $\xi = \xi(x)$.

XVI. Обчислити значення $\psi(\overline{y}, \xi)$, де функція $\psi(y, \xi)$ задається правилом

$\psi(y,\xi)=(y,b)-(q,\xi)$, $q=\max\{c-yA,0\}$

і покласти $\psi_1=\psi(\bar{y},\xi)$.

XVII. Обчислити значення $\psi(y,\xi)$, де функція $\psi(y,\xi)$ задається правилом (4.45), і покласти $\psi=\psi(y,\xi)$.

XVIII. Якщо $\psi<\psi_1$, то перейти до XIX, інакше на крок XXII.

XIX. Покласти $\psi_1=\psi, \bar{y}=y$.

XX. Обчислити вектор

$\eta(y)=\max\{\sigma y,\tau e^m\}$

і покласти $\eta=\eta(y)$.

XXI. Обчислити значення $\varphi(\bar{x},\eta)$, де функція $\varphi(x,\eta)$ задається правилом (4.44) і покласти $\varphi_1=\varphi(\bar{x},\eta)$.

XXII. Обчислити

$f_k=(\varphi_1+\psi_1)/2$.

XXIII. Обчислити

$\delta=(\psi_1-\varphi_1)/(|f_k|+1)$.

XXIV. Якщо $\delta\le\varepsilon$, то покласти $\bar{x}^k=\bar{x}$, $\bar{y}^k=\bar{y}$ і зупинити обчислення, інакше перейти на крок X.

Теорема 2. *Якщо виконується припущення 4, то точки $\bar{x}^k$, $\bar{y}^k$ і значення f_k, породжені алгоритмом 4, задовольняють співвідношення*

$$\lim_{\varepsilon\to 0}\bar{x}^k=x^*;\ \lim_{\varepsilon\to 0}\bar{y}^k=y^*;\ \lim_{\varepsilon\to 0}f_k=(c,x^*)=(b,y^*).$$

АЛГОРИТМИ ПОСЛІДОВНИХ НАБЛИЖЕНЬ ДЛЯ РОЗВ'ЯЗУВАННЯ НЕЛІНІЙНИХ ЗАДАЧ ОПТИМІЗАЦІЇ

Методи покоординатного спуску

Задача. Знайти $\arg\min_{x\in X} f_0(x)$ на множині X,

$X=\{x\,|\,\alpha_i\le x_i\le\beta_i,\ i=1,...,n,\ x\in R^n\}$,

де α_i, β_i, $i=1,...,n$ – задані дійсні числа.

Алгоритм включає “великі” ітерації по індексу k і “малі” — по індексу j.

Алгоритм 1

Початок. I. Вибрати довільне початкове наближення $(x^0,y^0)\in R^n\times R^m$.

II. Вибрати довільні константи ρ_0, δ_0, ω, які задовольняють нерівності

$\rho_0 > 0;\ \delta_0 > 0;\ \omega > 1.$

III. Задати вектори $e^1, ..., e^n$ (тут e^i, $i = 1, ..., n$ – вектор, i-а координата якого дорівнює одиниці, а інші дорівнюють нулю).

IV. Покласти $k = 0$.

Основний цикл. V. Покласти $j = 0$.

VI. Обчислити індекс $i_k (i_k \in [1:n])$ за правилом

$$i_k = k - n\operatorname{Ent}(k/n) + 1,$$

де $\operatorname{Ent}(t)$ – ціла частина числа t.

VII. Покласти $h^k = e^{i_k}$.

VIII. Обчислити вектори

$x^{k(+)} = x^k + (\rho_k / 2^j) h^k$; $x^{k(-)} = x^k - (\rho_k / 2^j) h^k$.

IX. Якщо $x^{k(+)} \in X$ і $x^{k(-)} \in X$, то перейти на крок X; якщо $x^{k(+)} \in X$ і $x^{k(-)} \notin X$, то обчислити $f_0(x^{k(+)})$ і перейти на крок XV; якщо $x^{k(+)} \notin X$ і $x^{k(-)} \in X$, то обчислити $f_0(x^{k(-)})$ і перейти на крок XVI; якщо $x^{k(+)} \notin X$ і $x^{k(-)} \notin X$, то покласти $j = j + 1$ і перейти на крок VIII.

X. Обчислити $f_0(x^{k(+)})$.

XI. Якщо виконується нерівність

$$f_0(x^{k(+)}) - f_0(x^k) \le -\rho_k \delta_k / 2^j,$$

то покласти

$$x^{k+1} = x^{k(+)};\ \rho_{k+1} = \rho_k;\ \delta_{k+1} = \delta_k;\ f_0(x^{k+1}) = f_0(x^{k(+)})$$

і перейти на крок XVIII; інакше перейти на крок XII.

XII. Обчислити $f_0(x^{k(-)})$.

XIII. Якщо виконується нерівність

$$f_0(x^{k(-)}) - f_0(x^k) \le -\rho_k \delta_k / 2^j,$$

то покласти

$$x^{k+1} = x^{k(-)};\ \rho_{k+1} = \rho_k;\ \delta_{k+1} = \delta_k;\ f_0(x^{k+1}) = f_0(x^{k(-)})$$

і перейти на крок XVIII; інакше перейти на крок XIV.

XIV. Якщо виконується нерівність

$$| f_0(x^{k(+)}) - f_0(x^{k(-)}) | \le 2\rho_k \omega \delta_k / 2^j,$$

то перейти на крок XVII; інакше покласти $j = j+1$ і перейти на крок VIII.

XV. Якщо виконується нерівність (5.85), то покласти

$$x^{k+1} = x^{k(+)};\ f_0(x^{k+1}) = f_0(x^{k(+)});\ \rho_{k+1} = \rho_k;\ \delta_{k+1} \le \delta_k;$$

і перейти на крок XVIII; інакше перейти на крок XVII.

XVI. Якщо виконується нерівність (5.86), то покласти

$$x^{k+1} = x^{k(-)};\ f_0(x^{k+1}) = f_0(x^{k(-)});\ \rho_{k+1} = \rho_k;\ \delta_{k+1} \le \delta_k;$$

і перейти на крок XVIII; інакше перейти на крок XVII.

XVII. Якщо виконуються рівності

$$i_k = n;\ x^k = x^{k-n+1},$$

то покласти

$$x^{k+1} = x^k;\ f_0(x^{k+1}) = f_0(x^k);\ \rho_{k+1} = \rho_k/2;\ \delta_{k+1} = \delta_k/2;$$

і перейти на крок XVIII; якщо $i_k \ne n$ або $x^k \ne x^{k-n+1}$, то покласти

$$x^{k+1} = x^k;\ f_0(x^{k+1}) = f_0(x^k);\ \rho_{k+1} = \rho_k;\ \delta_{k+1} = \delta_k;$$

і перейти на крок XVIII.

XVIII. Покласти $k = k+1$ і перейти на крок V.

Теорема 1. *Якщо випукла функція* $f_0(x)$ *має ліпшецеві градієнти, тобто, існує таке число* γ, *що для будь-яких* $x, y \in X$ *виконується нерівність*

$$\|\nabla f_0 - \nabla f_0(y)\| \le \gamma \|x-y\|,\ 0<\gamma<\infty.$$

і множина $X_0 = \{x \mid f_0(x) \le f_0(x^0),\ x \in X\}$ є обмеженою, то границя послідовності $\{x^k\}_{k=0}^{\infty}$ є оптимальним розв'язком, тобто $\lim\limits_{k\to\infty} \inf\limits_{x^*\in X^*} \|x^k - x^*\| = 0$, де $X^* = \{x^* \mid f_0(x^*) = \min\limits_{x\in X} f_0(x),\ x^* \in X\}$.

Методи допустимих напрямків

Задача 1. Знайти $\arg\min\limits_{x\in X} f_0(x)$ для заданої неперервно диференцьованої функції $f_0 : R^n \to R^1$ і множини $X \underline{\Delta} \left\{x \middle| f_j(x) \le 0,\ j \in [1:m],\ x \in R^n\right\}$, визначеної за заданими функціями $f_j : R^n \to R^1$, $j \in [1:m]$.

Вектор h^k називають допустимим напрямком у точці x^k, якщо існує таке число $\rho > 0,$ що для всіх $\lambda \in (0, \rho)$ точка $x^k + \lambda h^k$ є допустимою, тобто $x^k + \lambda h^k \in X$ і, крім того, задовольняє нерівності $f_0\left(x^k + \lambda h^k\right) < f_0\left(x^k\right)$.

У методах допустимих напрямків покращене $(k+1)$-ше наближення x^k до $\arg\min\limits_{x \in X} f_0(x)$ обчислюють за формулою

$$x^{k+1} = x^k + \rho_k h^k.$$

Різні варіанти алгоритмів відрізняються способами вибору кроків ρ_k та допустимих напрямків h^k.

Алгоритм 1

Початок. I. Обчислити початкове наближення $x^0 \in X$, що задовольняє умовам теореми 1.

II. Покласти $k = 0$.

Основний цикл. III. Покласти $x = x_k$.

IV. Знайти розв'язок $\alpha = \alpha_k(x)$, $h = h^k(x)$ задачі лінійного програмування в $(n+1)$-му просторі векторів (α, h): $\min\limits_{(\alpha, h)} \alpha$ при обмеженнях

$\left(\nabla f_0(x), h\right) \le \alpha$;

$f_j(x) + \left(\nabla f_j(x), h\right) \le \alpha$, $j = 1, \ldots, m$;

$|h_i| \le 1$, $i = 1, \ldots, n$.

V. Якщо $\alpha_k(x) = 0$, то покласти $x^* = x^k$ й припинити обчислення; інакше перейти на крок VI.

VI. Обчислити найменше додатне число ρ_k, що задовольняє умові

$$f_0\left(x + \rho_k h^k(x)\right) = \min_{\substack{\rho \ge 0 \\ x + \rho h^k(x) \in X}} f_0\left(x + \rho_k h^k(x)\right).$$

VII. Обчислити наступне наближення

$$x^{k+1} = x + \rho_k h^k(x)$$

VIII. Покласти $k=k+1$ і перейти на крок III.

Теорема 1. *Якщо для початкового наближення x^0 множина*

$$X^0 \underline{\underline{\Delta}} \left\{ x \middle| f_0(x) - f_0\left(x^0\right) \le 0, \quad f_j(x) \le 0, \quad j=1,\ldots m, \quad x \in R^n \right\}$$

є компактна і має внутрішню точку, функції f_j, $j=0,1,\ldots,m$, є неперервно диференційовані, то кожна гранична точка $\overline{x}$ послідовності $x^0, x^1, \ldots,$ задовольняє умові $\alpha_k(\overline{x})=0$.

Якщо x^*- оптимальний розв'язок задачі 1, то $\alpha(x^*)=0$.

Методи проектування узагальненого градієнта

Задача. Знайти $\arg\min\limits_{x\in X} f_0(x)$ для опуклої вниз функції $f_0 : R^n \to R^1$ на опуклій множині $X \subset R^n$.

Алгоритм 1

Початок. I. Вибрати довільне початкове наближення $x^0 \in R^n$ і покласти $k=0$.

Основний цикл. II. Обчислити узагальнений градієнт $\hat{\nabla} f_0(x^k)$ функції f_0 в точці x^k.

III. Обчислити значення крокового множника ρ_k і нормувального множника γ_k, що задовольняють умовам теореми 1.

IV. Обчислити наступне наближення

$$x^{k+1} = \pi_X(x^k - \rho_k \gamma_k \hat{\nabla} f_0(x^k)) .$$

V. Покласти $k=k+1$ і перейти до кроку II.

Теорема 1. *Якщо функція f_0 опукла вниз, множина X опукла, замкнута і містить оптимальний розв'язок x^*,* $\|x^*\| \le \text{const}$, для будь-якого числа $\alpha < \infty$ знайдеться таке число $\beta(\alpha) < \infty$, що $\left\|\hat{\nabla} f_0(x)\right\| \le \beta(\alpha)$ *при* $\|x\| \le \alpha$, нормувальні множники γ_k, $k=0,1,\ldots$, такі, що $\gamma_k > 0$ і $\gamma_k \left\|\hat{\nabla} f_0(x^k)\right\| \le const$, $k=0,1,\ldots$, на породженій алгоритмом послідовності $\{x^k\}_{k=0}^{\infty}$, кроки ρ_k, $k=0,1,\ldots$, задовольняють умовам $\rho_k \ge 0$, $\rho_k \to 0$, $\sum\limits_{k=0}^{\infty} \rho_k = \infty$, то на послідовності $\{f_0(x^k)\}_{k=0}^{\infty}$ існує така підпослідовність $\{f_0(x^{k_s})\}_{s=0}^{\infty}$ що $\lim\limits_{s\to\infty} f_0(x^{k_s}) = f_0(x^k)$.

Якщо ж виконуються умови $\rho_k \geq 0$, $\sum_{k=0}^{\infty} \rho_k = \infty$, $\sum_{k=0}^{\infty} \rho_k^2 < \infty$, то послідовність $\{x^k\}_{k=0}^{\infty}$ збігається до розв'язку $x^* \in X^*$ без припущення про обмеженість множини X^*.

СПИСОК ЛІТЕРАТУРИ

Основна

1. *Бейко И. В., Бублик Б. Н., Зінько П. Н.* Методи і алгоритми розв'язування задач оптимізації. — К.: Вища шк., 1993. — 512 с.
2. *Ермольев Ю. М., Ляшко И. И., Михалевич В. С., Тюптя В. И.* Математические методы исследования операцій. — К.: Вища шк., 1979. — 312 с.
3. *Жук М. В., Щербина Ю. М.* Збірник задач з методів оптимізації. Львів, ЛДУ, 1997.
4. *Шор Н. З.* Методы минимизации недифференцируемых функцій и их приложения. — К.: Наукова думка, 1979.
5. *Задоя О.* Методи оптимізації і дослідження операцій. — Дніпропетровськ, 2001.
6. *Кириленко В.* Методи оптимізації і дослідження операцій: Навч. посіб. — К.: Таксон, 1998. — 334 с.
7. *Методи* оптимізації і дослідження операцій: Навч. посіб. для студ. вищ. навч. закл. / Н. О. Гончарова, А. І. Ігнатюк, Н. А. Малиш та ін. — К.: МАУП, 2005. — 304 с.

Додаткова

8. *Базилевич В., Лук'янов В., Писаренко Н., Квіцинська Н.* Методи оптимізації і дослідження операцій: Опорний конспект лекцій. — К.: Четверта хвиля, 1997. — 248 с.
9. *Поляк Б. Т.* Введение в оптимизацию. — М.: Наука, 1983.
10. *Пшеничный Б. Н., Данилин Ю. М.* Численные методы в экстремальных задачах. — М.: Наука, 1975.
11. Б*удаговська С. та ін.* Методи оптимізації і дослідження операцій та макроекономіка. — К.: Основи, 1998.—518 с.
12. *Макконнелл К. Р., Брю С. Л.* Аналітична економія. Принципи, проблеми і політика / Пер. з англ.; Наук. ред. перекладу Т. Панчиши—на. — Л.: Просвіта, 1999. — Ч. 2. Методи оптимізації і дослідження операцій.

13. Нуреев Р. Сборник задач по микроэкономике. — М.: ИНФРА-М, 2002.—432 с.
14. *Шндайк Р. С, Рубінфельд Д. Л.* Методи оптимізації і дослідження операцій / Пер. з англ. еА. Олійника, Р. Скільського. — К.: Основи, 1996. — 646 с.
15. *Самуельсон П. А., Нордгауз В.Д.* Методи оптимізації і дослідження операцій: Пер. з англ. / За ред. С. Панчишина. — К.: Основи, 1998. — 676 с.
16. *Ястремеъкий О., Гриценко О.* Основи мікроекономіки. — К.: Знання, 1998. — 674 с.

ЗМІСТ

Відповідальний за випуск *А. Д. Вегеренко*
Редактор
Комп'ютерне верстання *О. Л. Тищенко*

Зам. № ВКЦ-3505
Міжрегіональна Академія управління персоналом (МАУП)
03039 Київ-39, вул. Фрометівська, 2, МАУП