

МІЖРЕГІОНАЛЬНА  
АКАДЕМІЯ УПРАВЛІННЯ ПЕРСОНАЛОМ



МАУП

**НАВЧАЛЬНА ПРОГРАМА**  
дисципліни  
**“МЕТОДИ ОПТИМІЗАЦІЇ І ДОСЛІДЖЕННЯ**  
**ОПЕРАЦІЙ”**  
**(для бакалаврів)**

**МАУП**

Київ  
ДП «Видавничий дім «Персонал»  
2013

## ПОЯСНЮВАЛЬНА ЗАПИСКА

Підготовлено професором кафедри прикладної математики та програмування *І. В. Бейком*

Затверджено на засіданні кафедри прикладної математики та програмування (протокол № 8 від 03.04.08)

*Схвалено Вченою радою Міжрегіональної Академії управління персоналом*

Перезатверджено на засіданні кафедри прикладної математики та інформаційних технологій (протокол № 38 від 13.07.11)

**Бейко І. В.** Навчальна програма дисципліни “Методи оптимізації і дослідження операцій” (для бакалаврів). — К.: ДП «Вид. дім «Персонал», 2013. — 14 с.

Навчальна програма містить пояснювальну записку, тематичний план, зміст дисципліни “Методи оптимізації і дослідження операцій”, перелік тем практичних занять, питання для самоконтролю, а також список літератури.

Програма курсу “Методи оптимізації і дослідження операцій” охоплює теорію і практичні заняття, що дасть змогу студентам засвоїти знання, уміння і навички формулювати і розв’язувати завдання з оптимізації і дослідження операцій, використовувати сучасний математично-комп’ютерний інструментарій для вирішення практичних задач лінійного та нелінійного програмування без обмежень та з обмеженнями на множину допустимих розв’язків, задач випуклої оптимізації та задач дослідження операцій за умов неповних даних. Дисципліна охоплює дослідження міждисциплінарні на стиках математичного аналізу, диференціальних рівнянь, теорії ймовірностей і математичної статистики, що орієнтовані на розв’язування лінійних та нелінійних задач оптимізації і дослідження операцій, і ввійшла до переліку основних дисциплін у навчальному плані підготовки бакалаврів напрямку “Прикладна математика”.

Мета курсу — опанувати знаннями і навичками розв’язувати задачі оптимізації і прийняття рішень з використанням комп’ютерної техніки. В результаті вивчення дисципліни студенти отримають:

*знання:*

- про основні методи розв’язування задач лінійного програмування;
- про основні методи розв’язування задач нелінійного програмування;
- про основні методи розв’язування задач оптимізації з обмеженнями;
- про основні методи дослідження операцій;

*уміння:*

- формулювати математичні задачі лінійного і нелінійного програмування;
- розв’язувати задачі лінійного програмування;
- розв’язувати задачі нелінійного програмування;
- розв’язувати задачі оптимізації з обмеженнями;
- розв’язувати задачі дослідження операцій.

Види контролю поточних знань — перевірка індивідуальних завдань та завдань для самостійної роботи.

Вид контролю знань — тестові завдання.

- © Міжрегіональна Академія управління персоналом (МАУП), 2013
- © ДП «Видавничий дім «Персонал», 2013

Для вивчення дисципліни необхідні знання з дисциплін “Математичний аналіз”, “Лінійна алгебра і аналітична геометрія”, “Диференційні рівняння”, “Теорія ймовірностей і математична статистика”.

Курс є необхідним для опанування та закріплення бакалаврами прикладної математики інтегрованих знань споріднених дисциплін:

- Теорія систем та математичне моделювання;
- Моделювання економічних, екологічних та соціальних процесів;
- Теорія керування;
- Математична економіка;
- Математична екологія;
- Статистичне моделювання;
- Моделі та методи прийняття рішень.

**ТЕМАТИЧНИЙ ПЛАН**  
**дисципліни**

**“МЕТОДИ ОПТИМІЗАЦІЇ І ДОСЛІДЖЕННЯ ОПЕРАЦІЙ”**

№ пор.	Назва змістового модуля і теми
1	2
	<b>Змістовий модуль I. Задачі лінійної та нелінійної оптимізації</b>
1	Математичні моделі лінійних і нелінійних залежностей та дослідження операцій
2	Методи і алгоритми мінімізації лінійних, квадратичних, випуклих, унімодальних і ліпшицевих функцій
3	Методи і алгоритми для розв’язування задач лінійного та квадратичного програмування
4	Методи і алгоритми для розв’язування задач нелінійного програмування
	<b>Змістовий модуль II. Методи і алгоритми для розв’язування спеціальних класів задач оптимізації та їх застосування до дослідження операцій</b>
5	Методи і алгоритми для розв’язування випуклих задач оптимізації

1	2
6	Задачі оптимізації з неповними даними
7	Задачі оптимізації великої розмірності
8	Задачі багатокритеріальної оптимізації і ігрові задачі оптимізації
Разом годин: 216	

**ЗМІСТ**  
**дисципліни**

**“МЕТОДИ ОПТИМІЗАЦІЇ І ДОСЛІДЖЕННЯ ОПЕРАЦІЙ”**

**Змістовий модуль I. Задачі лінійної та нелінійної оптимізації**

**Тема 1. Математичні моделі лінійних і нелінійних залежностей та дослідження операцій**

Математичні моделі лінійних і нелінійних залежностей.  
Класифікація математичних моделей причинно-наслідкових залежностей.

Прямі та обернені задачі у дослідженні причинно-наслідкових залежностей.

Прямі та обернені задачі дослідження операцій.  
Класифікація оптимізаційних задач дослідження операцій.  
Ефективні та оптимальні стратегії в задачах дослідження операцій.

Дослідження операцій та задачі з неповними даними.  
Практичні труднощі, пов’язані з проблемою математичного моделювання.

Практичні труднощі, пов’язані з проблемою побудови глобально оптимальних розв’язків.

Приклади практичних задач на дослідження операцій.  
Практичні застосування методів оптимізації до розв’язання основних задач дослідження операцій.

*Література* [1; 2; 4; 5; 9; 14]

**Тема 2. Методи і алгоритми мінімізації лінійних, квадратичних, випуклих, унімодальних і ліпшицевих функцій**

Задачі локальної і глобальної оптимізації.

Екстремальні розв'язки і необхідні умови оптимальності.  
Достатні умови локальної оптимальності і достатні умови глобальної оптимальності.

Методи і алгоритми для розв'язування задач одновимірної оптимізації.

Лінійна апроксимація і метод градієнтів для чисельного відшукування екстремальних розв'язків задач оптимізації.

Метод золотого перетину.

Оптимальні методи для лінійних і квадратичних функцій.

Оптимальні методи і алгоритми для унімодалних функцій.

Методи одновимірної глобальної оптимізації

Методи Монте-Карло для наближеної глобальної оптимізації.

Методи і алгоритми для глобальної мінімізації ліпшицевих функцій.

Методи для уточнення розв'язку задач локальної оптимізації.

Квадратична апроксимація і методи Ньютона для уточнення розв'язку задач локальної оптимізації.

*Література* [1; 3; 4; 6–9]

### **Тема 3. Методи і алгоритми для розв'язування задач лінійного та квадратичного програмування**

Задачі лінійного програмування.

Геометрична та економічна інтерпретація задач лінійного програмування.

Числові методи для розв'язування задач лінійного програмування.

Методи проєкцій для розв'язування задач лінійного програмування.

Задачі квадратичного програмування.

Методи оптимізації квадратичних функцій.

Методи спряжених градієнтів для мінімізації квадратичної функції.

Градієнти лінійних і квадратичних функцій і числові методи для розв'язання задач квадратичного програмування.

Приклади практичних задач оптимізації, які зводяться до задач лінійного програмування.

Двоїсті задачі лінійного програмування.

Транспортні задачі і двоїсті транспортні задачі.

Задачі оптимізації в мережах.

Задачі про найкоротший шлях.

Додаткові приклади лінійних задач дослідження операцій.

*Література* [1–4; 6; 9]

### **Тема 4. Методи і алгоритми для розв'язування задач нелінійного програмування**

Задачі нелінійного програмування.

Методи штрафних функцій для задач з обмеженнями.

Комп'ютерні методи розв'язання задач оптимізації для складних функцій.

Методи Монте-Карло. Методи стохастичного пошуку.

Методи локальних варіацій.

Стохастичні методи локальних варіацій.

Методи лінеаризації і градієнтні методи.

Методи умовного градієнта і методи проєкції градієнта для задач оптимізації з додатковими обмеженнями.

Методи Ньютона для уточнення наближеного розв'язку.

Методи множників Лагранжа.

Теорема Лагранжа для задач оптимізації з обмеженнями у вигляді рівностей. Теорема Куна-Таккера-Куроша для задач з обмеженнями у вигляді нерівностей.

Числові алгоритми, засновані на теоремі Куна-Таккера-Куроша.

*Література* [1; 3; 6]

### **Змістовий модуль II. Методи і алгоритми для розв'язування спеціальних класів задач оптимізації та їх застосування до дослідження операцій**

#### **Тема 5. Методи і алгоритми для розв'язування випуклих задач оптимізації**

Опуклі функції та їх властивості.

Узагальнені градієнти та основна нерівність для визначення опуклих функцій.

Задачі випуклої оптимізації і гарантований інтервал для глобально оптимального розв'язку задач випуклої оптимізації.

Узагальнені градієнти і числові методи узагальнених градієнтів.

Методи відсікаючих гіперплощин.

Методи декомпозиції.  
Методи можливих напрямків.  
Методи градієнтного типу із розтягуванням простору.

*Література [1; 3; 5–9]*

### **Тема 6. Задачі оптимізації з неповними даними**

Задачі оптимізації з неповними даними.  
Геометрична та ймовірнісна неповнота даних.  
Задачі гарантованої оптимізації і метод мінімаксу.  
Оцінювання ризику за умов неповних даних.  
Задачі оптимізації за умов ризиків.  
Узагальнена задача оптимізації з неповними даними.  
Задачі мінімаксної оптимізації.  
Методи розв'язування задач мінімаксної оптимізації.  
Задачі стохастичної оптимізації.  
Стохастичні градієнти і методи стохастичних градієнтів.  
Методи стохастичних градієнтів з постійним кроком.  
Методи випадкового пошуку та локального випадкового пошуку.  
Екстремальні задачі математичної статистики.  
Задачі планування запасів.  
Задачі оптимізації системи обслуговування.

*Література [1; 4; 6–9]*

### **Тема 7. Задачі оптимізації великої розмірності**

Приклади задач оптимізації великої розмірності.  
Задачі оптимізації, до яких зводяться наближені методи побудови оптимального керування.  
Методи локальних варіацій для розв'язування задач оптимального керування. Метод динамічного програмування.  
Задача оптимального розподілення ресурсу.  
Задачі синтезу оптимального керування.

*Література [1; 3; 9]*

### **Тема 8. Задачі багатокритеріальної оптимізації і ігрові задачі оптимізації**

Задачі багатокритеріальної оптимізації.  
Зведення задач багатокритеріальної оптимізації до задач однокритеріальної оптимізації.

Множинні розв'язки задач багатокритеріальної оптимізації.  
Методи розв'язування задач багатокритеріальної оптимізації.  
Ієрархічно керовані системи і задачі оптимізації ієрархічно керованих систем.

Ігрові задачі багатокритеріальної оптимізації, які виникають в умовах конфліктів інтересів.

Оптимальні розв'язки для ігрових задач з несуперечними інтересами.

Матричні ігри.

Мінімаксні розв'язки у матричних іграх та основна нерівність.

Змішані стратегії в матричних іграх.

Теорема про існування оптимального розв'язку матричної ігри в змішаних стратегіях.

Методи і алгоритми розв'язування матричних ігор.

Приклади практичних ігрових задач, які зводяться до матричних ігор.

Диференційні ігри.

Приклади практичних задач, що зводяться до диференційних ігор.

Задачі мінімізації ризику та ігри з Природою.

*Література [1; 10–16]*

### **ПИТАННЯ ДЛЯ САМОКОНТРОЛЮ**

1. Локальні і глобальні розв'язки задач оптимізації.
2. Приклади задач дослідження операцій.
3. Оптимальні методи для лінійних і квадратичних функцій.
4. Оптимальні методи і алгоритми для унімодальних функцій.
5. Методи Монте-Карло для наближеної глобальної оптимізації.
6. Методи і алгоритми для глобальної мінімізації ліпшицевих функцій.
7. Методи для уточнення розв'язку задачі локальної оптимізації.
8. Екстремальні розв'язки і необхідні умови оптимальності.
9. Достатні умови локальної оптимальності і достатні умови глобальної оптимальності.
10. Лінійна апроксимація і метод градієнтів для чисельного відшукування екстремальних розв'язків задачі оптимізації.
11. Метод золотого перетину.
12. Методи одномірної глобальної оптимізації.

13. Квадратична апроксимація і методи Ньютона для уточнення розв'язку задач локальної оптимізації.
14. Прискорення методів оптимізації на основі апроксимації високого порядку.
15. Задачі лінійного програмування.
16. Числові методи для розв'язування задач лінійного програмування.
17. Задачі квадратичного програмування.
18. Методи оптимізації квадратичних функцій.
19. Градієнти лінійних і квадратичних функцій, числові методи для розв'язання задач квадратичного програмування.
20. Приклади практичних задач оптимізації, які зводяться до задач лінійного програмування.
21. Двоїста задача лінійного програмування.
22. Транспортні задачі і двоїсті транспортні задачі.
23. Задачі оптимізації в мережах.
24. Задачі про найкоротший шлях.
25. Дати економічну інтерпретацію задачі лінійного програмування.
26. Задачі нелінійного програмування.
27. Методи штрафних функцій для задач з обмеженнями.
28. Методи Монте-Карло. Методи стохастичного пошуку.
29. Методи локальних варіацій.
30. Стохастичні методи локальних варіацій.
31. Методи лінеаризації і градієнтні методи.
32. Методи умовного градієнта і методи проєкції градієнта для задач оптимізації з додатковими обмеженнями.
33. Методи Ньютона для уточнення наближеного розв'язку.
34. Методи множників Лагранжа.
35. Описати блок-схему алгоритму методу проєкції градієнта для розв'язування задачі оптимізації з додатковими (геометричними) обмеженнями.
36. Опуклі функції та їх властивості.
37. Узагальнені градієнти та основна нерівність для визначення опуклих функцій.
38. Задачі випуклої оптимізації і гарантований інтервал для глобально оптимального розв'язку задачі випуклої оптимізації.
39. Сформулювати основні властивості задачі випуклої оптимізації.
40. Узагальнені градієнти і числові методи узагальнених градієнтів.
41. Методи відсікаючих гіперплощин.
42. Методи декомпозиції.
43. Методи можливих напрямків.
44. Методи градієнтного типу із розтягуванням простору.
45. Задачі оптимізації з неповними даними.
46. Геометрична та ймовірнісна неповнота даних.
47. Оцінювання ризику за умов неповних даних.
48. Задачі мінімаксної оптимізації.
49. Методи розв'язування задач мінімаксної оптимізації.
50. Стохастичні градієнти і методи стохастичних градієнтів.
51. Методи стохастичних градієнтів з постійним кроком.
52. Методи випадкового пошуку та локального випадкового пошуку.
53. Екстремальні задачі математичної статистики.
54. Задачі планування запасів.
55. Задачі оптимізації системи обслуговування.
56. Приклади задач оптимізації великої розмірності.
57. Теорема Лагранжа для задач оптимізації з обмеженнями у вигляді рівностей.
58. Теорема Куна-Таккера-Куроша для задач з обмеженнями у вигляді нерівностей.
59. Задачі оптимізації, до яких зводяться наближені методи побудови оптимального керування.
60. Методи локальних варіацій для розв'язування задач оптимального керування.
61. Метод динамічного програмування.
62. Задача оптимального розподілення ресурсу.
63. Накрестити блок-схему алгоритму штрафних функцій.
64. Описати алгоритм методу спряжених напрямків.
65. Накрестити блок-схему алгоритму локальних варіацій.
66. Описати алгоритм методу стохастичного пошуку.
67. Накрестити блок-схему одного із алгоритмів нелінійної оптимізації з обмеженнями.
68. Описати алгоритм методу лінеаризації.
69. Накрестити блок-схему алгоритму Ньютона.
70. Як знайти розв'язок задачі оптимізації за допомогою методу множників Лагранжа?

71. Накрестити блок-схему алгоритму умовного градієнта.
72. Задачі багатокритеріальної оптимізації.
73. Зведення задач багатокритеріальної оптимізації до задач однокритеріальної оптимізації.
74. Множинні розв'язки задач багатокритеріальної оптимізації.
75. Методи розв'язування задач багатокритеріальної оптимізації.
76. Ієрархічно керовані системи і задачі оптимізації ієрархічно керованих систем.
77. Ігрові задачі багатокритеріальної оптимізації, які виникають в умовах конфліктів інтересів.
78. Оптимальні розв'язки для ігрових задач з несуперечними інтересами.
79. Матричні ігри.
80. Мінімаксні розв'язки матричних ігор.
81. Теорема про існування оптимального розв'язку матричної гри в змішаних стратегіях.
82. Як знайти розв'язок матричної гри у змішаних стратегіях.
83. Методи і алгоритми розв'язування матричних ігор.
84. Приклади практичних ігрових задач, які зводяться до матричних ігор.
85. Диференційні ігри.
86. Приклади практичних задач, які зводяться до диференційних ігор.
87. Задачі мінімізації ризику та ігри з Природою.

## СПИСОК ЛІТЕРАТУРИ

### Основна

1. *И. В. Бейко, Б. Н. Бублик, П. Н. Зинько.* Методы и алгоритмы решения задач оптимизации. — К.: Вища шк., 1993. — 512 с.
2. *Акоф. Р. Л., Сасиени М.* Основы исследования операций. — М., 2004
3. *М. В. Жук, Ю. М. Щербина.* Збірник задач з методів оптимізації. — Львів, 1997.
4. *М. Мину.* Математическое программирование. — М.: Наука, 1990.
5. *Шор Н. З.* Методы минимизации недифференцируемых функций и их приложения. — К.: Наук. думка, 1979.
6. *Моисеев Н. Н.* Математические задачи системного анализа. — М.: Наука, 1981.
7. *А. Г. Сухарев, А. В. Тимохов, В. В. Федоров.* Курс методов оптимизации. — М.: Наука, 1986.
8. *Вагнер Г.* Основы исследования операций. — Т. 1–3. — М., 1972–1973.
9. *Ю. М. Ермольев, И. И. Ляшко, В. С. Михалевич, В. И. Тюття.* Математические методы исследования операций. — К.: Вища шк., 1970.
10. *Крушевский Л. В.* Теория игр. — К., 1975.
11. *Габасов Р., Кириллова Ф. М.* Методы оптимизации. — М.: Наука, 1981.
12. *Ляшенко И. Н. и др.* Линейное и нелинейное программирование. — К.: Вища шк., 1975.
13. *Давыдов Э. Г.* Исследование операций. — М.: Высш. шк., 1990. — 383 с.

### Додаткова

14. *Бейко І. В., Бейко М. Ф.* Численные методы решения задач оптимального управления. — К.: Знання, 1975.
15. *Воробьев Н. Н.* Теория игр. — Л., 1974.
16. *Костевич Л. С., Лапко А. А.* Теория игр: Исследование операций. — Минск, 1982.

## **ЗМІСТ**

Пояснювальна записка .....	3
Тематичний план дисципліни “Методи оптимізації і дослідження операцій” .....	4
Зміст дисципліни “Методи оптимізації і дослідження операцій” .....	5
Питання для самоконтролю.....	9
Список літератури.....	13

Відповідальний за випуск *А. Д. Вегеренко*  
Редактор *О. М. Коваленко*  
Комп’ютерне верстання *О. А. Варваріна*

Зам. № ВКЦ-4189

Формат 60 84/16. Папір офсетний.  
Друк рогаційний трафаретний.  
Тираж 50 пр.

Міжрегіональна Академія управління персоналом (МАУП)  
03039 Київ-39, вул. Фрометівська, 2, МАУП

ДП «Видавничий дім «Персонал»  
03039 Київ-39, просп. Червонозоряний, 119, літ. XX

*Свідоцтво про внесення до Державного реєстру  
суб’єктів видавничої справи ДК № 3262 від 26.08.2008 р.*