

МІЖРЕГІОНАЛЬНА  
АКАДЕМІЯ УПРАВЛІННЯ ПЕРСОНАЛОМ



МАУП

**Методичні рекомендації  
щодо забезпечення самостійної роботи студентів  
з дисципліни**

**“ДИСКРЕТНА МАТЕМАТИКА”  
(для бакалаврів)**

Київ  
ДП «Видавничий дім «Персонал»  
2010

Підготовлено доцентом кафедри прикладної математики та програмування  
*М. П. Дяченко*

Затверджено на засіданні кафедри прикладної математики та програмування  
(протокол № 10 від 19.06. 08)

*Схвалено Вченою радою Міжрегіональної Академії управління персоналом*

**Дяченко М. П.** Методичні рекомендації щодо забезпечення самостійної роботи студентів з дисципліни “Дискретна математика” (для бакалаврів). – К.: ДП “Вид. дім “Персонал”, 2010. – 29 с.

Методичні рекомендації містять пояснювальну записку, зміст дисципліни “Дискретна математика”, питання для самоконтролю та список літератури.

- © Міжрегіональна Академія управління персоналом (МАУП), 2010
- © ДП «Видавничий дім «Персонал», 2010

## ПОЯСНЮВАЛЬНА ЗАПИСКА

Дискретна математика – це розділ сучасної теоретичної кібернетики, в якому закладено основи теорії і практики проектування, використання електронних обчислювальних машин та програмування.

Мета курсу – засвоєння знань з дискретного аналізу і набуття навичок їх практичного застосування, що є необхідним для подальшої спеціалізації студентів у таких галузях, як прикладна математика, математична кібернетика та інформатика, при вивченні розділів системного та прикладного програмування, автоматизованого керування, системного аналізу і проектування вузлів обчислювальної техніки та інших пристроїв дискретної дії, систем обробки і передавання інформації, аналізу даних, оптимізації обчислень, штучного інтелекту, комп'ютерної графіки, розпізнавання образів, тощо.

В результаті вивчення дисципліни студент отримує знання з основ теорії множин і відношень на множинах, комбінаторики, теорії графів, алгебри логіки та теорії скінченних автоматів. Одночасно він повинен навчитись використовувати спеціальну математичну символіку для відображення кількісних та якісних відношень між об'єктами, зводити задачі програмування, моделювання і автоматизованого проектування до задач дискретної математики та здійснювати аналіз і оптимізацію формалізованих дискретних систем довільної природи з застосуванням прийомів і методів дискретної математики.

Дискретна математика належать до основ математики і базується на знаннях та навичках, здобутих при вивченні, насамперед, шкільного курсу математики. Вивчення дисципліни здійснюється під час аудиторних занять, де студент отримує знання основ теорії та практичні навички її застосування, а також самостійній роботі з інформаційними матеріалами, де навички удосконалюються та закріплюються, а знання збагачуються та розширюються. Методична розробка має за мету, насамперед, допомогти студентам в організації і здійсненні самостійної роботи.

**ЗМІСТ**  
**дисципліни**  
**“ДИСКРЕТНА МАТЕМАТИКА”**

**Змістовий модуль I. Множини і відношення**

Необхідно опрацювати і засвоїти.

1.1. Поняття множини. Способи задання множин. Поняття порожньої й універсальної множин. Відношення належності і включення, відмінність між ними. Підмножини. Операції над множинами. Основні тотожності теоретико-множинних операцій і способи їх доведення. Діаграми Венна і логічні таблиці. Доведення теоретико-множинних співвідношень. Булеан

1.2. Декартів добуток множин, ступінь множини. Поняття кортежу, його довжини, координати та проєкції. Відношення рівності кортежів.

1.3. Відповідність. Способи задавання відповідностей. Поняття образу і прообразу, області визначення і області значень. Обернена відповідність, композиція відповідностей. Властивості відповідностей: визначеність відповідності всюди, функціональність, сюр'єктивність, ін'єктивність та взаємно однозначна (бієктивна) відповідність.

1.4. Поняття потужності множини. Способи порівнювання кількостей елементів скінченних та нескінченних множин. Обчислення кількості всіх підмножин заданої скінченної множини. Рівнопотужність множин. Властивості відношення рівнопотужності та їх доведення. Приклади порівняння нескінченних множин. Злічені та незлічені (континуальні) множини. Кардинальне число множин.

1.5. Відношення, способи задання відношень. Одномісні, бінарні,  $n$ -арні відношення. Рефлексивність та антирефлексивність, симетричність та антисиметричність, транзитивність бінарних відношень. Відношення еквівалентності. Розбиття множини на класи. Фактор-множина. Зв'язок між еквівалентностями і розбиттями. Канонічне відображення. Відношення часткового порядку. Лінійний порядок. Лексикографічний порядок. Верхня і нижня грані. Максимальний та мінімальний елементи. Найбільший та найменший елементи. Співвідношення між наведеними поняттями.

*Література* [1–3; 5; 7; 9; 12; 13; 16; 20; 21]

Студент повинен *знати*:

основні положення теорії множин, способи задання, властивості множин та операції над ними, відношення між множинами та елементами множин, які передбачені переліком питань на опрацювання.

Студент повинен *вміти*:

вільно користуватись теоретико-множинними означеннями і поняттями при формулюванні та розв'язуванні задач, чітко розрізняти правильні і неправильні співвідношення між множинами та елементами множин, будувати множини з використанням визначених операцій, порівнювати множини (скінченні і нескінченні), доводити справедливості теоретико-множинних співвідношень.

Контрольні питання до змісту модуля I:

1. Навести основні способи задання множин. Дати означення рівних множин.
2. Охарактеризувати відношення належності та включення, сформулювати їх властивості. Вказати відмінність між цими відношеннями.
3. Дати визначення власної підмножина та булеану. Пояснити на прикладах.
4. Як обчислити кількість елементів у булеані заданої скінченної множини?
5. Дати означення основних теоретико-множинних операцій: об'єднання, перетину, різниці, симетричної різниці, доповнення. Пояснити поняття універсальної множини?
6. Проілюструвати теоретико-множинні операції на діаграмах Венна.
7. Викласти метод доведення теоретико-множинних співвідношень за допомогою логічних таблиць.
8. Навести означення і на конкретних прикладах проілюструвати поняття вектора, координат і проєкцій вектора, рівності векторів.
9. Дати геометричну інтерпретацію декартового добутку двох множин.
10. На конкретних прикладах показати, що операція декартового добутку множин не є некомутативною.
11. Дати означення відповідності між множинами. Описати способи та навести приклади задання відповідностей (множина, графік, діаграма).

12. На конкретних прикладах пояснити поняття області визначення та області значень відповідності.
13. Які операції можна виконувати над відповідностями?
14. На конкретних прикладах продемонструвати результати операції оберненої відповідності та операції композиції відповідностей.
15. Дати означення властивостей, за якими класифікують відповідності (всюди визначеність, функціональність, ін'єктивність, сюр'єктивність).
16. Що таке відображення? Навести приклади відображень на множині дійсних чисел.
17. Навести приклад відповідності, яка є функціональною, але не є всюди визначеною.
18. Навести приклад відповідності, яка є всюди визначеною, але не є функціональною.
19. Навести приклад відповідності, водночас ін'єктивної і сюр'єктивної.
20. Навести приклад сюр'єктивної, не всюди визначеної відповідності.
21. Дати означення та навести приклад бієктивної відповідності.
22. Дати означення та навести приклади рівнопотужних (скінченних і нескінченних) множин.
23. Встановити взаємно однозначну відповідність між множинами цілих і натуральних чисел.
24. Встановити взаємно однозначну відповідність між множинами точок двох різних відрізків.
25. Встановити взаємно однозначну відповідність між множинами точок квадрата і площини.
26. Дати визначення та навести приклади злічених множин.
27. Перерахувати операції над множинами, які зберігають властивість зліченності.
28. Довести зліченність множини раціональних чисел. Навести приклади незлічених множин.
29. Які множини називають континуальними? Сформулювати та довести теорему Кантора. Навести приклади континуальних множин.
30. Пояснити зміст кардинального числа множини.
31. Якою є потужність множини ірраціональних чисел?
32. За яким правилом порівнюють кардинальні числа множин?

33. В чому полягає результат теореми Кантора–Бернштейна?
34. Дати означення бінарного відношення на множині. Яким чином поняття відношення можна узагальнити?
35. Описати основні способи та навести приклади задання відношень (множина, графік, граф, матриця).
36. Порівняти між собою поняття відповідності та відношення. Виділити спільні і відмінні характеристики цих понять.
37. Навести означення властивостей, за якими класифікують відношення: рефлексивність, антирефлексивність, симетричність, антисиметричність, транзитивність.
38. Навести приклад відношення, не рефлексивного і антирефлексивного водночас.
39. Навести приклад відношення, не симетричного і антисиметричного водночас.
40. Навести приклад антисиметричного і транзитивного відношення водночас.
41. Побудувати відношення, яке є симетричним, транзитивним, але не є рефлексивним.
42. Дати означення та навести приклади відношення еквівалентності.
43. Чи є еквівалентними відношення перпендикулярності і паралельності прямих на площині?
44. Чи є еквівалентністю відношення бути підмножиною, що розглядається на булеані деякої скінченної множини?
45. Дати приклад відношення еквівалентності на множині натуральних чисел і побудувати відповідну фактор-множину.
46. Яке відношення еквівалентності має найбільшу і найменшу кількість класів на скінченній множині?
47. Як пов'язані між собою відношення еквівалентності на множині та розбиття цієї множини?
48. Довести, що фактор-множина є розбиттям та пояснити зміст поняття “індекс розбиття”.
49. Що таке канонічне (природне) відображення множини на відповідну фактор-множину?
50. Дати означення відношення часткового порядку. Навести приклади відношень часткового порядку на числових і нечислових множинах.
51. Що таке є лінійний порядок на множині? Навести приклади лінійно впорядкованих множин.

52. Навести означення мінімального та максимального, найменшого та найбільшого елементів частково впорядкованої множини.
53. Охарактеризувати можливі співвідношення між поняттями п.51 та навести відповідні приклади.
54. Навести приклад частково впорядкованої множини з 2 мінімальними елементами.
55. Обґрунтувати, що відношення включення є відношенням часткового порядку на множині всіх підмножин (булеані) довільної множини.
56. Що таке лексикографічний порядок? Приклади його застосування.
57. Дати визначення монотонного та ізоморфного відображень

### **Змістовий модуль II. Основи математичної логіки**

Необхідно опрацювати і засвоїти.

- 2.1. Поняття висловлення. Основні логічні операції та їх інтерпретація. Алгебра висловлень. Формула алгебри висловлень і функція істинності. Побудова таблиці істинності. Поняття формули. Рівносильність формул. Проблема розв'язуваності. Зв'язок цієї проблеми з проблемою перевірки рівносильності формул.
- 2.2. Числення висловлень. Способи побудови числень висловлень та алгебра висловлень. Основні проблеми числення висловлень.
- 2.3. Поняття предиката. Логіка предикатів. Операції над предикатами. Застосування логіки предикатів. Квантори. Вузке числення предикатів.

*Література* [1; 2; 7; 9; 12; 18–20]

Студент повинен *знати*:

основні поняття та символіку математичної логіки, операції над її об'єктами, способи задавання та перетворення формул у відповідності зі змістом питань, передбачених переліком на опрацювання.

Студент повинен *вміти*:

вільно користуватись поняттями та символікою математичної логіки для формулювання та розв'язування практичних завдань, способами запису співвідношень між її об'єктами у вигляді формул, законами перетворень формул для їх спрощення.



## Контрольні питання до змісту модуля II:

1. Що таке висловлення? Навести приклади таких речень, які є висловленнями, і таких, які не є висловленнями.
2. Навести означення і можливу інтерпретацію основних операцій алгебри висловлень (кон'юнкція, диз'юнкція, заперечення, імплікація, еквіваленція).
3. Як визначити істинність чи хибність складеного висловлення, вважаючи відомими значення істинності простих висловлень, з яких воно складається?
4. Сформулювати правила побудови формули алгебри висловлень і відповідної функції істинності.
5. Яка формула називається тавтологією? Як перевірити, чи є задана формула тавтологією?
6. Рівносильні формули. Проблема розв'язності, її зв'язок з проблемою перевірки рівносильності формул.
7. Чи правильним є таке твердження: якщо диз'юнкція двох формул є тавтологією, то кожна з цих формул є тавтологією?
8. Чи правильним є таке твердження: якщо кон'юнкція двох формул — тавтологія, то кожна з цих формул є тавтологією?
9. Чи є логічно еквівалентними (рівносильними) такі твердження: “Якщо  $a$ , то  $b$ ” і “Якщо неправильно, що  $a$ , то неправильно, що  $b$ ”. Відповідь обґрунтувати.
10. Чи є логічно еквівалентними такі твердження: “Неправильно, що  $a$  тоді і тільки тоді, коли  $b$ ” і “Неправильно, що  $a$  тоді, коли  $b$ , і неправильно, що  $a$  тільки тоді, коли  $b$ ”.
11. Чи виконується для імплікації переставна та сполучна властивості?
12. Чи виконується розподільна властивість імплікації відносно операції кон'юнкції?
13. Яка формула називається суперечністю? Приклади суперечностей.
14. Яка множина висловлень називається несуперечною (сумісною)? Як перевірити несуперечність певної множини висловлень?
15. Що таке числення (формальна теорія)? Принципи побудови числень (аксіоматичний метод). Загальна схема побудови.
16. Поняття формули, аксіоми, правила виведення, виведення, доведення, теореми і метатеореми.

17. Числення висловлень. Алфавіт, формула, список аксіом, правила виведення.
18. Два способи побудови числення, характеристика та порівняльний аналіз.
19. Теореми числення висловлень. Приклади виведення простих теорем і формул.
20. Що таке похідне правило виведення?
21. Основні проблеми числення висловлень.
22. Поняття предиката. Навести приклади предикатів.
23. Квантори. Зв'язані та вільні змінні. Зв'язок між висловленнями та предикатами.
24. Записати символікою логіки предикатів таке твердження: “кожне число, кратне 10, кратне 5 і кратне 2”.
25. Записати символікою логіки предикатів таке твердження: “кожний квадрат є ромбом, але неправильно, що кожен ромб є квадратом”.
26. Застосовуючи символіку логіки предикатів, записати твердження, що дії додавання і множення мають місце на множині натуральних чисел.
27. Застосовуючи символіку логіки предикатів, записати означення об'єднання двох множин.
28. Застосовуючи символіку логіки предикатів, записати означення границі числової послідовності.
29. Застосовуючи символіку логіки предикатів, записати критерій Коші збіжності числової послідовності.
30. Проаналізувати відмінність між означеннями функцій, неперервної та рівномірно неперервної на множині, записавши їх означення засобами логіко-математичної символіки.
31. Навести приклади тверджень математичного та нематематичного змісту, в яких є кванторні вирази: “для кожного” й “існує”, і значення істинності яких змінюється при зміні порядку слідування цих виразів.

### **Змістовий модуль III. Комбінаторика**

Необхідно опрацювати і засвоїти.

- 3.1. Комбінаторні обчислення для основних теоретико-множинних операцій. Принцип Дирихле (принцип шухляд). Формула включення-виключення. Розв'язування простих комбінатор-

них задач. Основне правило комбінаторики (правило множення). Приклади застосування правила множення.

- 3.2. Поняття сполуки, перестановки і розміщення та зв'язок між ними. Перестановки і сполуки з повтореннями та без повторень. Застосування зазначених об'єктів комбінаторики на прикладах.
- 3.3. Біном Ньютона і поліномна теорема. Трикутник Паскаля. Біномні тотожності та їх доведення. Метод траєкторій і його застосування для доведення біномних тотожностей.
- 3.4. Рекурентні співвідношення. Однорідні та неоднорідні рекурентні співвідношення. Поняття розв'язку рекурентного співвідношення. Характеристичне рівняння та його корені. Розв'язування однорідних та неоднорідних лінійних рекурентних співвідношень зі сталими коефіцієнтами за наявності простих та кратних коренів.
- 3.5. Поняття генератриси (твірної функції). Зв'язок між генератрисами та рекурентними співвідношеннями. Застосування генератрис і методу невизначених коефіцієнтів у розв'язуванні рекурентних співвідношень.

*Література* [1–3; 6–9; 11; 12; 16; 18–20]

Студент повинен *знати*:

основні об'єкти комбінаторики та типи комбінаторних задач, зв'язок з теорією множин, їх властивості та сфери практичного застосування;

поняття рекурсії та рекурентного співвідношення, постановку задачі розв'язування рекурентних співвідношень; Поняття генератриси (твірної функції), її внутрішній зв'язок з рекурентними співвідношеннями та способи використання для розв'язування рекурентних співвідношень.

Студент повинен *вміти*:

розпізнавати об'єкти комбінаторики та рекурентні співвідношення в практичних задачах незалежно від їх природи, вміти користуватись властивостями і методами комбінаторики для розв'язування цих задач.

### Контрольні питання до змісту модуля III:

1. Написати формули виконання комбінаторних обчислень для основних теоретико-множинних операцій.
2. Написати формулу включення-виключення, пояснити зміст формули та проілюструвати її за допомогою діаграм Венна.
3. Навести приклад застосування формули включення-виключення.
4. Сформулювати комбінаторні правила суми і добутку, навести ситуації, коли слід застосовувати кожне з них.
5. Дати приклади застосування комбінаторного правила суми та добутку (основного правила комбінаторики).
6. Сформулювати означення понять сполуки, перестановки і розміщення.
7. Пояснити, чим відрізняється сполука від розміщення, а розміщення від перестановки.
8. Написати формули, що визначають числа перестановок, сполук та розміщень і показати зв'язок між ними.
9. Записати й обґрунтувати формулу для визначення числа перестановок з повтореннями.
10. Записати й обґрунтувати формулу для визначення числа комбінацій (сполук) з повтореннями.
11. Сформулювати принцип Дирихле та навести приклади застосування.
12. Записати й обґрунтувати формулу бінома Ньютона.
13. Записати біномні тотожності та викласти їх доведення.
14. Трикутник Паскаля, його властивості та правила побудови.
15. Поліномна теорема та приклади застосування поліномної теореми.
16. Навести приклади рекурентних співвідношень для різних числових послідовностей.
17. Пояснити, що таке порядок (глибина) рекурентного співвідношення?
18. А що таке розв'язок рекурентного співвідношення?
19. Записати загальний вигляд лінійного рекурентного співвідношення зі сталими коефіцієнтами.
20. Навести приклад лінійного однорідного рекурентного співвідношення зі сталими коефіцієнтами.

21. Навести приклад лінійного неоднорідного рекурентного співвідношення зі сталими коефіцієнтами.
22. Сформулювати основні властивості розв'язків лінійного рекурентного співвідношення зі сталими коефіцієнтами.
23. Дати означення характеристичного рівняння лінійного рекурентного співвідношення зі сталими коефіцієнтами.
24. Навести алгоритм розв'язання лінійного однорідного рекурентного співвідношення зі сталими коефіцієнтами.
25. Чим відрізняються розв'язки лінійного рекурентного співвідношення зі сталими коефіцієнтами у випадках простих і кратних коренів характеристичного рівняння?
26. Сформулювати особливості розв'язування лінійного неоднорідного рекурентного співвідношення зі сталими коефіцієнтами.
27. Дати означення генератриси (твірної функції) числової послідовності. Навести приклади визначення генератрис для певних послідовностей.
28. Дати приклади застосування генератрис в розв'язанні комбінаторних задач.
29. Пояснити зв'язок між операціями над рекурентними послідовностями та відповідними їм генератрисами, навести приклади.
30. Навести приклади застосування генератрис для розв'язування рекурентних співвідношень.

#### **Змістовий модуль IV. Теорія графів**

Необхідно опрацювати і засвоїти.

- 4.1. Поняття графа та способи його задавання. Ступені вершин графа. Ізоморфізм графів. Підграфи. Операції над графами. Графи та їх зв'язок з бінарними відношеннями.
- 4.2. Шлях у графі. Ланцюги та цикли. Зв'язність графів. Метричні характеристики графа: відстань, ексцентриситет, радіус, діаметр.
- 4.3. Дерево та ліс. Властивості дерев. Кістякові дерева та кістякові ліси графів. Двочасткові графи.
- 4.4. Обходи графів. Ейлерові цикли та ейлерові графи. Теорема Ейлера. Гамільтонові цикли.
- 4.5. Планарність графів, критерії планарності. Розфарбування графів.
- 4.6. Орієнтовані графи. Застосування теорії графів. Граф як модель.

Студент повинен *знати*:

основні поняття теорії графів, відношення між ними, способи задавання і перетворення графів, сфери та методи практичного використання графів. Зв'язок графів з бінарними відношеннями.

Студент повинен *вміти*:

вільно користуватись поняттями з теорії графів, відношеннями між цими поняттями, законами перетворень графів та методами теорії графів для формулювання і розв'язування практичних завдань, абстрагуючись від їх конкретного змісту.

#### **Контрольні питання до змісту модуля IV:**

1. Навести означення неорієнтованого графа. Описати основні способи задавання графів (теоретико-множинний, графічний, матричний) та їх взаємозв'язок.
2. Дати означення поняття підграфа.
3. Що таке ребро графа? Якою є максимальна кількість ребер у графі, що має  $n$  вершин?
4. Описати основні операції над графами: вилучення ребра та вилучення вершини.
5. Означити відношення суміжності вершин та відношення інцидентності вершин і ребер.
6. Що таке ступінь вершини?
7. Побудувати граф із п'ятьма вершинами, в якому тільки дві вершини мають однакові ступені. Чи можуть обидві ці вершини мати ступінь 0 або ступінь 4? Відповідь обґрунтувати.
8. Який граф називають повним?
9. Скільки ребер має повний граф, у якому  $n$  вершин?
10. Що таке доповнення графа? Співвідношення між кількостями ребер у графі та його доповненнями.
11. Охарактеризувати зв'язок між графами та бінарними відношеннями.
12. Які графи називають ізоморфними? Навести приклади ізоморфних графів. Чим вони відрізняються? Які умови обов'язкові для ізоморфних графів?
12. Обґрунтувати твердження: ізоморфні графи мають однакову кількість вершин і однакову кількість ребер.

13. Побудувати всі попарно неізоморфні графи з трьома вершинами.
14. Продемонструвати на прикладах різницю між поняттями: маршрут, ланцюг, простий ланцюг.
15. Як обчислюється довжина маршруту? Який маршрут має довжину 0?
16. Продемонструвати на прикладах різницю між поняттями: замкнений маршрут, цикл, простий цикл.
17. Дати визначення зв'язного графа. Навести приклади графів зв'язних і незв'язних.
18. Що таке компонента зв'язності графа?
19. Якими співвідношеннями пов'язані між собою такі параметри графа: кількість вершин, кількість ребер і кількість компонент зв'язності?
20. Сформулювати алгоритм, за допомогою якого можна перевірити зв'язність графа.
21. Навести означення і інтерпретацію метричних характеристик графа: відстань, ексцентриситет, діаметр, радіус, центр. Проілюструвати ці поняття на прикладах.
22. Навести приклад графа, діаметр якого збігається з його радіусом.
23. Навести приклад графа, центр якого містить більше однієї вершини.
24. Який граф називають ациклічним? Який граф називають деревом? Навести приклади.
25. Основні властивості дерев. Навести рівносильні означення поняття "дерево".
26. Побудувати всі попарно неізоморфні дерева з п'ятьма вершинами.
27. Означити кістякове дерево (ліс) та цикломатичне число графа.
28. Який граф називають двочастковим? Навести приклади.
29. Чи може двочастковий граф містити цикл довжини 3?
30. Сформулювати критерій двочастковості графа.
31. Що таке повний двочастковий граф? Навести приклади.
32. Які графи називають плоскими та планарними? Навести приклади.
33. Навести означення грані та ступеня грані в плоскому графі. Теорема і формула Ейлера та її наслідки.
34. Чи є планарним повний граф з п'ятьма вершинами?

35. Чи є планарним повний двочастковий граф, кожна частка якого складається з трьох вершин?
36. Побудувати всі попарно неізоморфні планарні зв'язні графи з п'ятьма вершинами.
37. Що таке максимальний плоский граф? Що таке триангуляція? Охарактеризувати зв'язок між цими поняттями.
38. Побудувати дві неізоморфні триангуляції з шістьма вершинами.
39. Які графи називають гомеоморфними? Навести приклади.
40. Сформулювати критерій Куратовського планарності графа.
41. Навести означення розфарбування, правильного розфарбування і хроматичного числа графа.
42. Чому дорівнює хроматичне число довільного двочасткового графа?
43. Чому дорівнює хроматичне число будь-якого дерева?
44. Які графи можна правильно розфарбувати з використанням лише двох кольорів?
45. Який зв'язок існує між хроматичним числом графа та ступенями його вершин?
46. Сформулювати гіпотезу чотирьох фарб.
47. Який граф називають ейлеровим? Навести приклади.
48. Сформулювати критерій ейлеровості графа.
49. Які з повних графів є ейлеровими?
50. Які з повних двочасткових графів є ейлеровими?
51. Який граф називають гамільтоновим? Навести приклади.
52. Чи можна твердити, що будь-який повний граф є гамільтоновим?
53. Чи можна твердити, що будь-який повний двочастковий граф є гамільтоновим?
54. Навести приклад графа, який є ейлеровим, але не є гамільтоновим.
55. Навести приклад графа, який є гамільтоновим, але не є ейлеровим.
56. Навести приклад графа, який є водночас ейлеровим і гамільтоновим.
57. Що таке орієнтований граф (орграф)? Навести приклади.
58. Способи задання орієнтованих графів. Які орграфи називають ізоморфними?



59. Побудувати всі попарно неізоморфні орграфи, які містять 3 вершини і 4 дуги. Визначити серед них сильно зв'язні, слабо зв'язні та однобічно зв'язні орграфи.
60. Побудувати оргграф із п'ятьма вершинами, який має два стоки й одне джерело.
61. Який оргграф називають повним (турніром)? Навести приклади.
62. Побудувати всі попарно неізоморфні повні оргграфи з трьома й чотирма вершинами. Визначити серед них сильно зв'язні, слабо зв'язні та однобічно зв'язні оргграфи.
63. Як за допомогою матриці суміжності оргграфа визначити такі його параметри: (а) півступеня виходу та півступеня заходу кожної вершини; (б) недосяжні вершини; (в) тупикові вершини; (г) чи є оргграф повним?
64. Сформулювати і обґрунтувати основні твердження про оргграфи.
65. Який граф називають мультиграфом?
66. Граф як модель. Навести приклади застосування теорії графів.
67. Навести приклади задач (математичних і нематематичних), при розв'язанні яких доцільно застосовувати теорію графів і її результати.

### **Змістовий модуль V. Булеві функції**

Необхідно опрацювати і засвоїти.

- 5.1. Булів алфавіт. Двійкові вектори та їх властивості. Булева функція. Задавання булевої функції. Таблиця істинності. Елементарні булеві функції.
- 5.2. Булеві функції і формули. Рівносильність (еквівалентність) формул. Основні тотожності алгебри логіки. Поняття двоїстої булевої функції. Перетворення таблиці істинності булевої функції в таблицю істинності функції, їй двоїстої.
- 5.3. Теорема про розклад булевої функції за змінними. Канонічні форми булевих функцій: досконала диз'юнктивна нормальна форма (ДДФ) та досконала кон'юнктивна нормальна форма (ДКНФ) булевих функцій.
- 5.4. Алгебра Жегалкіна. Методи побудови полінома Жегалкіна до заданої булевої функції.
- 5.5. Поняття замикання та замкнені класи булевих функцій: функції, які зберігають константи, лінійні, самодвоїсті, монотонні

функції. Проблема повноти систем булевих функцій. Функціонально повні системи булевих функцій. Доведення повноти системи булевих функцій, метод зведення.

5.6. Теорема про функціональну повноту (теорема Поста). Критеріальна таблиця.

5.7. Проблема мінімізації формул алгебри логіки. Критерії оптимізації. Методи побудови мінімальних диз'юнктивних нормальних форм (ДНФ). Імпліканта булевої функції. Властивості імплікант, проста імпліканта. Метод Квайна, карти Карно.

*Література* [1–5; 7–9; 15; 16]

Студент повинен *знати*:

основні положення і поняття теорії булевих функцій, способи і методи задавання та еквівалентних перетворень булевих функцій з метою їх стандартизації, мінімізації та спрощення реалізації.

Студент повинен *вміти*:

відно користуватись положеннями, поняттями, відношеннями між поняттями та методами теорії булевих функцій для формулювання і розв'язування практичних завдань.

### **Контрольні питання до змісту модуля V:**

1. Що таке двійковий (булевий) алфавіт і двійковий (булевий) вектор?
2. Навести означення понять довжини, номера і ваги двійкового вектора.
3. Як обчислюється відстань між двійковими векторами?
4. Які двійкові вектори називають сусідніми і які протилежними?
5. Яким чином означають порядок для двійкових векторів? Чи є цей порядок лінійним? Чи збігається він з лексикографічним порядком для двійкових векторів?
6. Чому дорівнює число двійкових векторів довжини  $n$ ?
7. Навести означення булевої функції. Що таке таблиця істинності та вектор значень булевої функції?
8. Якою є кількість булевих функцій від  $n$  змінних?
9. Побудувати таблицю істинності булевої функції від трьох змінних, яка набуває таке саме значення, як і більшість її змінних (*функція голосування*).

10. Побудувати таблицю істинності булевої функції від чотирьох змінних, яка на протилежних наборах набуває однакові значення.
11. Побудувати таблиці істинності для елементарних булевих функцій.
12. Навести означення формули над множиною операцій. Як визначити булеву функцію, яку реалізує (задає) певна формула?
13. Які формули називають рівносильними?
14. Чи можна твердити, що відношення рівносильності формул є відношенням еквівалентності на множині формул над певною множиною операцій?
15. Сформулювати стандартний метод перевірки рівносильності формул.
16. Записати і обґрунтувати основні тотожності алгебри логіки.
17. На конкретних прикладах проілюструвати різні способи задання булевої функції.
18. Охарактеризувати відповідність між множинами формул і булевих функцій.
19. Сформулювати теорему про розклад булевої функції за змінними. Записати окремі випадки розкладу.
20. Що називають диз'юнктивною нормальною формою (ДНФ) булевої функції? Навести приклади.
21. Яку диз'юнктивну нормальну форму булевої функції називають досконалою (ДДНФ)? Навести приклад.
22. Сформулювати властивості і правила побудови ДДНФ. Обґрунтувати єдиність ДДНФ.
23. Що називають кон'юнктивною нормальною формою (КНФ) булевої функції? Навести приклад.
24. Яку кон'юнктивну нормальну форму булевої функції називають досконалою (ДКНФ)? Навести приклад.
25. Сформулювати правила побудови досконалої кон'юнктивної нормальної форми булевої функції, яка задана таблицею.
26. Обґрунтувати твердження, що для будь-якої формули існує рівносильна їй диз'юнктивна нормальна форма.
27. Побудувати ДНФ булевої функції від трьох змінних, яка набуває таке саме значення, як більшість її змінних.
28. Довести, що коли у ДДНФ функції  $f$  замінити скрізь операцію диз'юнкції на операцію додавання за модулем 2, то отримаємо формулу, що задає функцію  $f$ , тобто рівносильну формулу. Чи

правильне аналогічне твердження для довільної ДНФ функції  $f$ ?

29. Що таке алгебра Жегалкіна? Записати основні тотожності алгебри Жегалкіна.
30. Що таке поліном Жегалкіна булевої функції? Як означають поняття довжини і ступеня полінома Жегалкіна?
31. Скільки різних поліномів Жегалкіна може існувати для певної булевої функції?
32. Сформулювати способи побудови полінома Жегалкіна для заданої булевої функції (за допомогою ДДНФ і методом невизначених коефіцієнтів).
33. Поняття і роль канонічної (нормальної) форми в алгебрі. Канонічні форми булевих функцій.
34. Що таке замикання множини булевих функцій?
35. Який клас (множину) булевих функцій називають замкненим (функціонально замкненим)?
36. Навести приклади відомих замкнених класів.
37. Навести приклади булевих функцій, що зберігають константу 0, і таких, що не зберігають константу 0.
38. Навести приклади булевих функцій, що зберігають константу 1, і таких, що не зберігають константу 1.
39. Сформулювати метод перевірки належності заданої булевої функції до класів, що зберігають константи 0 чи 1.
40. Обґрунтувати твердження про замкненість класу булевих функцій, що зберігають константу 0 (константу 1).
41. Скільки існує булевих функцій від  $n$  змінних, що зберігають константу 0 (константу 1)?
42. Сформулювати означення лінійної булевої функції. Навести приклади лінійних і нелінійних булевих функцій.
43. Обґрунтувати твердження про замкненість класу лінійних булевих функцій.
44. Сформулювати алгоритм перевірки належності заданої булевої функції до класу лінійних функцій.
45. Скільки існує лінійних булевих функцій від  $n$  змінних?
46. Яку функцію називають двоїстою до заданої? Яку булеву функцію називають самодвоїстою?
47. Навести приклади функцій самодвоїстих і несамодвоїстих.
48. Сформулювати метод перевірки належності заданої булевої функції до класу самодвоїстих функцій.

49. Скільки існує самодвоїстих функцій від  $n$  змінних?
50. Сформулювати означення монотонної булевої функції. Навести приклади монотонних і немонотонних булевих функцій.
51. Обґрунтувати твердження про замкненість класу монотонних булевих функцій.
52. Сформулювати способи перевірки належності заданої булевої функції до класу монотонних функцій.
53. Що таке функціонально повна система булевих функцій? Навести приклади функціонально повних систем булевих функцій.
54. Яку функціонально повну систему булевих функцій називають базисом? Навести приклади базисів.
55. Сформулювати критерій повноти системи булевих функцій (теорему Поста).
56. Сформулювати правила побудови і принципи застосування критеріальної таблиці для розв'язання проблеми повноти певної системи булевих функцій.
57. Навести приклади функціонально повних систем, що складаються з однієї функції.
58. Якою є максимальна кількість функцій у базисі?
59. Навести приклад базису, що складається з чотирьох функцій.
60. Навести приклади базисів, які містять одну, дві, три і чотири булеві функції.
61. Сформулювати і обґрунтувати актуальність проблеми визначення мінімальної формули для заданої булевої функції.
62. Навести означення мінімальної ДНФ (МДНФ) булевої функції.
63. Яку диз'юнктивну нормальну форму булевої функції називають найкоротшою (НДНФ)?
64. Що називають імплікантою і простою імплікантою булевої функції? Навести приклади.
65. Яку диз'юнктивну нормальну форму булевої функції називають скороченою (СДНФ)?
66. Що таке тупикова диз'юнктивна нормальна форма булевої функції?
67. Сформулювати загальну схему визначення всіх тупикових ДНФ заданої булевої функції. Описати взаємозв'язок усіх трьох типів ДНФ (скороченої, тупикової і мінімальної).
68. Сформулювати метод Квайна побудови скороченої ДНФ.

69. Сформулювати правила побудови і принципи застосування імплікантної таблиці для визначення тупикових ДНФ заданої булевої функції.
70. Сформулювати і обґрунтувати метод Петріка визначення всіх тупикових ДНФ заданої булевої функції.
71. В чому полягає метод мінімізації Блейка? Записати і обґрунтувати відповідні тотожності.
72. Описати загальну схему отримання зі скороченої ДНФ булевої функції її мінімальної ДНФ.
73. Що таке карта Карно булевої функції? Описати і продемонструвати на прикладах застосування карт Карно для визначення мінімальної ДНФ заданої булевої функції.

### **Змістовий модуль VI. Теорія автоматів**

Необхідно опрацювати і засвоїти.

- 6.1. Поняття скінченного автомата. Методи задавання автоматів: табличний, графічний і матричний. Автоматне відображення та властивості автоматних відображень.
- 6.2. Гомоморфізм, ізоморфізм і невідрізнюваність (еквівалентність) автоматів.
- 6.3. Мінімальний (зведений) автомат. Відношення  $k$ -невідрізнюваності. Індуктивний алгоритм мінімізації скінченного автомата.
- 6.4. Дві моделі скінченних автоматів: модель Мілі й модель Мура.
- 6.5. Типи автоматів: автомати-перетворювачі й автомати-розпізнавачі.
- 6.6. Автомат без виходів. Подія, зображувана в скінченному автоматі. Події і джерела.
- 6.7. Регулярні події і регулярні вирази. Алгоритми синтезу й аналізу скінченних автоматів-розпізнавачів. Теорема Кліні про регулярні події.

*Література* [4; 5; 7; 8; 16]

Студент повинен *знати*:

загальну концепцію, основні моделі, способи побудови і еквівалентних перетворень формальних автоматів, їх класифікацію за призначенням та області практичного застосування.

Студент повинен *вміти*:

вільно користуватись основними поняттями та положеннями теорії дискретних автоматів для моделювання подійних систем керування та алгоритмізації і програмування прикладних задач.

### **Контрольні питання до змісту модуля VI:**

1. Означити поняття скінченного автомата. Описати методи задання автоматів: табличний, графічний, матричний. Приклади.
2. Навести можливу інтерпретацію моделі скінченного автомата. Що таке абстрактний дискретний автоматний час?
3. Який автомат називають ініціальним?
4. Побудувати автомат, що описує алгоритм функціонування послідовного двійкового суматора.
5. Побудувати автомат затримки, тобто автомат, який функціонує у двійковому алфавіті і вихідний сигнал якого в певний момент дискретного часу збігається з вхідним сигналом у попередній момент часу.
6. Пояснити, що означає фраза “на вхід автомата подано певне вхідне слово”.
7. Навести означення автоматного відображення, що індукується заданим автоматом. Проілюструвати поняття автоматного відображення на прикладі.
8. Чому автоматне відображення часто називають поведінкою або зовнішньою поведінкою автомата?
9. Сформулювати властивості, які задовольняє довільне автоматне відображення (умови автоматності).
10. Навести означення гомоморфного відображення для автоматів.
11. Які автомати називають ізоморфними?
12. Сформулювати означення невідрізнюваності станів автоматів.
13. Які автомати називають невідрізнюваними? Навести змістовну інтерпретацію невідрізнюваності автоматів.
14. Обґрунтувати твердження, що відношення невідрізнюваності є еквівалентністю.
15. Чи правильним є твердження, що ізоморфні автомати є невідрізнюваними?
16. Побудувати приклад невідрізнюваних автоматів, які не є ізоморфними.

17. Описати зв'язок між гомоморфізмом, ізоморфізмом і невідрізнюваністю автоматів.
18. Що таке мінімальний, або зведений автомат? У чому полягає задача мінімізації скінченного автомата?
19. Дати означення відношення  $k$ -невідрізнюваності.
20. Сформулювати і обґрунтувати індуктивний алгоритм мінімізації скінченного автомата. Навести приклад.
21. Довести, що мінімальний автомат має найменшу можливу кількість станів серед автоматів класу, що містить всі невідрізнювані між собою скінченні автомати.
22. Дві моделі скінченних автоматів. Модель Мура: означення, способи завдання, автоматне відображення, гомоморфізм, ізоморфізм і невідрізнюваність для автоматів Мура. Зв'язок між автоматами Мілі та автоматами Мура. Навести приклад.
23. Що таке відмічена таблиця переходів автомата Мура?
24. Пояснити різницю між моделями Мілі та Мура.
25. Два типи поведінки, або два типи автоматів: автомати-перетворювачі й автомати-розпізнавачі. Описати зв'язок між обома типами та їхні інтерпретації.
26. Сформулювати основні проблеми теорії автоматів (аналіз, синтез, оптимізація).
27. Навести означення моделі, яку називають автоматом без виходів.
28. Пояснити термін “подія” (або “мова”) в певному алфавіті.
29. Сформулювати означення події, зображуваної в скінченному автоматі.
30. Обґрунтувати твердження про зображуваність в автоматах скінченних подій.
31. Сформулювати алгоритм, що дозволяє перевірити, чи є подія, зображувана в заданому скінченному автоматі, непорожною.
32. Сформулювати алгоритм, що з'ясує, чи зображують задані скінченні автомати ту саму подію.
33. Довести, що множина подій у певному скінченному алфавіті, зображуваних у скінченних автоматах, злічenna.
34. Довести, що множина всіх подій у певному скінченному алфавіті континуальна.
35. Із двох останніх тверджень вивести, що існують події, незображувані в скінченних автоматах.



36. Якою є потужність множини подій у певному скінченному алфавіті, незображуваних у жодному скінченному автоматі?
37. Навести приклад події, незображуваної у жодному скінченному автоматі.
38. Побудувати скінченний автомат для розпізнавання ідентифікатора мови програмування.
39. Сформулювати означення регулярних операцій над подіями.
40. Обґрунтувати, що операція множення подій, взагалі кажучи, некомутативна.
41. Записати й обґрунтувати основні тотожності алгебри подій.
42. Які події називають елементарними?
43. Що таке регулярна подія і регулярний вираз?
44. Які регулярні вирази називають рівносильними?
45. Сформулювати проблему рівносильності регулярних виразів і метод її розв'язання.
46. Написати регулярний вираз у двійковому алфавіті, який задає подію, що складається з усіх слів таких і тільки таких, довжини яких кратні.
47. Довести, що будь-яка скінченна подія є регулярною.
48. Що таке джерело і подія, зображувана джерелом? Які джерела називають рівносильними?
49. Сформулювати рівносильні перетворення для джерел.
50. Довести, що для довільного джерела існує рівносильне йому двополюсне джерело, тобто джерело, яке має тільки одну початкову і одну заключну вершини.
51. Чи можна твердити, що граф ініціального скінченного автомата без виходів є джерелом?
52. Яке джерело називають детермінованим?
53. Описати процедуру, яка для довільного джерела будує рівносильне йому детерміноване джерело (процедуру детермінізації джерела).
54. Описати загальну схему процедури, яка для будь-якої регулярної події будує скінченним автоматом, що зображує цю подію (алгоритм синтезу). Навести приклад реалізації.
55. Описати індуктивну процедуру (алгоритм Мак-Нотона–Ямади) побудови регулярного виразу для події, яку зображує заданий скінченний автомат (алгоритм аналізу).
56. Обґрунтувати твердження, що подія є зображуваною в скінченному автоматі тоді й тільки тоді, коли вона регулярна.

57. Побудувати два скінченні автомати такі, що кожне слово в двійковому алфавіті  $B = \{0, 1\}$  розпізнається в одному з цих автоматів, однак жодне слово в алфавіті  $B$  не розпізнається одночасно обома автоматами.
58. Довести, що множина регулярних подій в певному алфавіті є замкненою відносно таких теоретико-множинних операцій: доповнення, перетин, різниця і симетрична різниця.
59. Навести приклад регулярної події в певному алфавіті та нерегулярної події у тому самому алфавіті таких, що об'єднання цих подій буде регулярною подією.
60. Навести приклад регулярної події в певному алфавіті та нерегулярної події у тому самому алфавіті таких, що об'єднання цих подій буде нерегулярною подією.
61. Довести, що об'єднання регулярної і скінченної подій у певному алфавіті є регулярною подією.
62. Довести, що різниця регулярної і скінченної подій у певному алфавіті є регулярною подією.
63. Обґрунтувати, що об'єднання нерегулярної і скінченної подій у певному алфавіті є нерегулярною подією.
64. Довести, що різниця нерегулярної і скінченної подій у певному алфавіті є нерегулярною подією.
65. Охарактеризувати проблеми рівносильності та мінімізації для регулярних виразів.

## **СПИСОК ЛІТЕРАТУРИ**

### *Основна*

1. *Андерсон Д. А.* Дискретная математика и комбинаторика.– М.: Вильямс, 2003.
2. *Бардачов Ю. М., Соколова Н. А., Ходаков В. Є.* Дискретна математика.– К.: Вища шк., 2002.
3. *Гаврилов Г. П., Сапоженко А. А.* Задачи и упражнения по курсу дискретной математики.– М.: Наука, 1992.
4. *Глушков В. М.* Введение в кибернетику.– К.: Изд-во АН УССР, 1964.
5. *Глушков В. М., Цейтлин Г. Е., Ющенко Е. Л.* Алгебра, языки, программирование.– 3-е изд., перераб. и доп.– К.: Наук. думка, 1989.

6. *Ежов И. И., Скороход А. В., Ядренко М. Й.* Элементы комбинаторики. – К.: Вища шк., 1972.
7. *Кузнецов О. П., Адельсон-Вельский Г. М.* Дискретная математика для инженера. – 2-е изд., перераб. и доп. – М.: Энергоатомиздат, 1988.
8. *Кук Д., Бейз Д.* Компьютерная математика. – М.: Наука, 1990.
9. *Лавров И. А., Максимова Л. Л.* Задачи по теории множеств, математической логике и теории алгоритмов. – М.: Наука, 1975.
10. *Лекции по теории графов / В. А. Емеличев, О. И. Мельников, В. И. Сарванов.* – М.: Наука, 1990.
11. *Рейнгольд Э., Нивергельт Ю., Део Н.* Комбинаторные алгоритмы. – М.: Мир, 1980.
12. *Столл Р.* Множества. Логика. Аксиоматические теории. – М.: Просвещение, 1968.
13. *Трохимчук Р. М.* Множини і відношення: Навч. посіб. – К., 1994.
14. *Трохимчук Р. М.* Теорія графів: Навч. посіб. – К., 1998.
15. *Трохимчук Р. М.* Булеві функції: Навч. посіб. – К., 2001.
16. *Трохимчук Р. М.* Основы дискретной математики: Практикум. – К.: МАУП, 2004.
17. *Харари Ф.* Теория графов. – М.: Мир, 1973.
18. *Хромой Я. В.* Математична логіка. – К.: Вища шк., 1983.
19. *Хромой Я. В.* Збірник задач і вправ з математичної логіки. – К.: Вища шк., 1978.
20. *Шиханович Ю. А.* Введение в современную математику. – М.: Наука, 1965.
21. *Шрейдер Ю. А.* Равенство, сходство, порядок. – М.: Наука, 1971.

*Додаткова*

22. *Александров П. С.* Введение в теорию множеств и общую топологию. – М.: Наука, 1977.
23. *Виленкин Н. Я.* Комбинаторика. – М.: Наука, 1969.
24. *Гаврилов Г. П., Сапоженко А. А.* Сборник задач по дискретной математике. – М.: Наука, 1977.
25. *Глушков В. М.* Синтез цифровых автоматов. – М.: Физматгиз, 1962.
26. *Дискретная математика и математические вопросы кибернетики.* – Т.1/ Под общ. ред. С. В. Яблонского и О. Б. Лупанова. – М.: Наука, 1974.
27. *Зыков А. А.* Основы теории графов. – М.: Наука, 1987.

28. *Калужнин Л. А.* Введение в общую алгебру. – М.: Наука, 1973.
29. *Калужнин Л. А., Королюк В. С.* Алгоритми і математичні машини. – К.: Вища шк., 1964.
30. *Клини С.* Математическая логика. – М.: Мир, 1973.
31. *Кристофидес Н.* Теория графов: Алгоритмический подход. – М., 1978.
32. *Куратовский К., Мостовский А.* Теория множеств. – М.: Мир, 1970.
33. *Мендельсон Э.* Введение в математическую логику. – М.: Мир, 1976.
34. *Новиков Ф. А.* Дискретная математика для программистов. – СПб.: Питер, 2000.
35. *Оре О.* Теория графов. – М.: Наука, 1980.
36. *Свами М., Тхуласираман К.* Графы, сети, алгоритмы. – М.: Мир, 1984.
37. *Татт У.* Теория графов. – М.: Мир, 1988.
38. *Трохимчук Р. М.* Збірник задач з дискретної математики (розділ “Множини і відношення”). – К., 1997.
39. *Трохимчук Р. М.* Збірник задач із теорії графів: Навч. посіб. – К., 1998.
40. *Трохимчук Р. М.* Збірник задач з теорії булевих функцій. Навч. посіб. – К., 2002.
41. *Уилсон Р.* Введение в теорию графов. – М.: Мир, 1977.
42. *Френкель А., Бар-Хиллел И.* Основания теории множеств. – М.: Мир, 1966.
43. *Яблонский С. В.* Введение в дискретную математику. – М.: Наука, 1979.



## **ЗМІСТ**

Пояснювальна записка .....	3
Зміст дисципліни “Дискретна математика” .....	4
Список літератури .....	26

Відповідальний за випуск *А. Д. Вегеренко*  
Редактор *О. М. Коваленко*  
Комп'ютерне верстання *І. О. Музика*

Зам. № ВКЦ-4249

Формат 60×84/<sub>16</sub>. Папір офсетний.

Друк ратоційний трафаретний. Тираж 30 пр.

Міжрегіональна Академія управління персоналом (МАУП)  
03039 Київ-39, вул. Фрометівська, 2, МАУП

ДП «Видавничий дім «Персонал»  
03039 Київ-39, просп. Червонозоряний, 119, літ. XX

*Свідоцтво про внесення до Державного реєстру  
суб'єктів видавничої справи ДК № 3262 від 26.08.2008 р.*