

МІЖРЕГІОНАЛЬНА  
АКАДЕМІЯ УПРАВЛІННЯ ПЕРСОНАЛОМ



МАУП

**МЕТОДИЧНІ РЕКОМЕНДАЦІЇ  
ЩОДО ЗАБЕЗПЕЧЕННЯ  
САМОСТІЙНОЇ РОБОТИ СТУДЕНТІВ  
з дисципліни  
“ЕКОНОМІКО-МАТЕМАТИЧНЕ  
МОДЕЛЮВАННЯ”  
(для бакалаврів)**

Київ  
ДП «Видавничий дім «Персонал»  
2011

МАУП

Підготовлено професором кафедри прикладної математики та програмування *О. О. Юньковою*

Затверджена на засіданні кафедри прикладної математики та програмування МАУП (протокол № 2 від 30.10.08)

*Схвалено Вченою радою Міжрегіональної Академії управління персоналом*

**Юнькова О. О.** Методичні рекомендації щодо забезпечення самостійної роботи студентів з дисципліни “Економіко математичне моделювання” (для бакалаврів). – К.: ДП «Вид. дім «Персонал», 2011. – 26 с.

Методична розробка містить пояснювальну записку, тематичний план, зміст самостійної роботи з дисципліни “Економіко математичне моделювання”, питання для самоконтролю, список літератури.

© Міжрегіональна Академія управління персоналом (МАУП), 2011  
© ДП «Видавничий дім «Персонал», 2011

## **ПОЯСНЮВАЛЬНА ЗАПИСКА**

Приєднання України до Болонського процесу є незаперечним фактом міжнародного визнання вітчизняної системи вищої освіти, важливим кроком на шляху до реалізації стратегічного курсу України до Європейського Союзу.

Підвищення ефективності вищої школи неможливе без змін в організації навчального процесу. У перехідний період реформування вищої школи особливо актуальним є формування у студентів здатності до самостійного пошуку нових знань та вміння навчатися протягом життя.

Самостійна робота студентів є важливою складовою навчального процесу. Синтез узагальнюючої системної інформації та конкретизованих і деталізованих знань, здобутих у процесі самостійного наукового пошуку, дає змогу застосовувати знання, одержані під час вивчення дисципліни “Економіко-математичне моделювання” при розв’язанні реальних задач.

Сучасні випускники ВНЗ повинні мати мислення: з одного боку – алгоритмічне, яке забезпечує свідоме виконання діяльності за раніше розробленим планом, з іншого боку – творче, з опорою на інтуїцію, ініціативу. Випускник повинен вміти аналізувати нестандартні ситуації та приймати рішення за короткий проміжок часу. Формування цих якостей якраз і відбувається через організацію самостійної роботи студентів не тільки в аудиторний час, а й поза ним.

Пізнавальна діяльність студентів спрямована на виконання основного завдання: розширити та поглибити знання, набуті під час вивчення дисципліни “Економіко-математичне моделювання”, вміти застосувати їх у сфері своєї майбутньої професійної діяльності, при цьому розвивати навички роботи з організації науково-дослідницької діяльності, вміння користуватися підручниками, бібліотечними каталогами, довідниками, Internet тощо.

### **Предмет, мета і завдання дисципліни**

Більшість задач, що виникають у суспільстві, пов’язані з керованими явищами, тобто з явищами, що регулюються на підставі свідомо прийнятих рішень. Будь-яке економічне рішення потребує досконалого знання рушійних сил процесу і засобів для досягнення поставленої мети, а також наслідків, до яких воно приведе. Основним способом для вивчення складних процесів та явищ є моделювання – відображення найголовніших властивостей об’єкта спеціальни-

ми засобами. Найбільш досконалим та ефективним є математичне моделювання, який дає змогу застосовувати потужний математичний апарат. Природно, що результати дослідження математичної моделі матимуть практичний інтерес, якщо вона цілком відповідає (адекватна) явищу, що вивчається.

*Основна мета* вивчення дисципліни “Економіко-математичне моделювання” – формування системи теоретичних знань і практичних навичок побудови та аналізу математичних моделей економічних явищ та процесів.

*Головне завдання* навчальної дисципліни – оволодіння теоретичними знаннями та інструментарієм моделювання економічних явищ та процесів; набуття вмінь постановки і самостійного розв’язання задач аналізу, прогнозування, прийняття рішень та управління ризиком.

У результаті вивчення дисципліни студенти повинні

**знати:**

основні поняття і принципи моделювання економічних процесів, постановки основних завдань керування складними системами управління, якісні методи аналізу соціально-економічних систем;

**вміти:**

будувати моделі оптимізаційних задач, розв’язувати задачі графічними та аналітичними методами, проводити післяоптимізаційний аналіз задач, будувати лінійні і нелінійні економетричні моделі, досліджувати їх адекватність, проводити економічний аналіз явищ та процесів, прогнозувати їх розвиток.

Навчальна дисципліна є однією з основних дисциплін підготовки фахівців економічного профілю. Базується на знаннях таких навчальних дисциплін, як “Вища математика”, “Теорія ймовірностей та математична статистика”. В системі професійної підготовки фахівців ця дисципліна тісно пов’язана з такими навчальними дисциплінами як “Мікроекономіка”, “Економічний аналіз”, “Макроекономіка”.

**ТЕМАТИЧНИЙ ПЛАН**  
*дисципліни*  
**“ЕКОНОМІКО-МАТЕМАТИЧНЕ МОДЕЛЮВАННЯ”**

№ пор.	Назва змістового модуля і теми
	<b>Змістовий модуль I. Економіко-математичні моделі та методи оптимізації</b>
1	Концептуальні аспекти математичного моделювання економіки
2	Основні поняття теорії та методів оптимізації
3	Лінійні оптимізаційні економіко-математичні моделі
4	Геометрична інтерпретація ЗЛП. Графічний метод розв’язування ЗЛП
5	Теоретичні основи симплекс-методу
6	Симплекс-метод розв’язування ЗЛП.
7	Теорія двоїстості та двоїсті оцінки лінійних оптимізаційних задач
8	Економічна інтерпретація пари двоїстих задач
9	Транспортна задача
10	Моделі та методи цілочислової оптимізації
11	Дробово-лінійне програмування
12	Нелінійні оптимізаційні моделі та методи
	<b>Змістовий модуль II. Ризикологія та економетричні моделі та методи</b>
13	Аналіз та управління ризиком в економіці
14	Система показників кількісного оцінювання ступеня ризику
15	Принципи побудови економетричних моделей
16	Парна лінійна регресія
17	Множинна лінійна та нелінійна регресія
18	Мультиколінеарність
19	Узагальнені лінійні моделі
20	Економетричні моделі динаміки
21	Оцінювання параметрів систем одночасних рівнянь
Разом годин: 180	

**ЗМІСТ САМОСТІЙНОЇ РОБОТИ**  
**з дисципліни**  
**“ЕКОНОМІКО-МАТЕМАТИЧНЕ МОДЕЛЮВАННЯ”**

**Змістовий модуль I. Економіко-математичні моделі та методи оптимізації**

**Тема 1. Концептуальні аспекти математичного моделювання економіки**

**Питання для самостійного опрацювання**

Випадковість і невизначеність процесів економічних систем.  
Адаптація в економічних системах.  
Синергетичні підходи в моделюванні економічних процесів.  
Системи економіко-математичних моделей.

**Питання для самоконтролю**

1. Сутність економіко-математичної моделі.
2. Необхідність використання математичного моделювання економічних процесів.
3. Схема математичного моделювання економічних процесів.
4. Етапи математичного моделювання.
5. Випадковість і невизначеність процесів економічних систем.
6. Причини виникнення невизначеності.
7. Сутність адекватності економіко-математичних моделей.
8. Проблеми оцінювання адекватності моделі.
9. Способи перевірки адекватності економіко-математичних моделей.
10. Елементи класифікації економіко-математичних моделей.
11. Сутність аналітичного та комп'ютерного моделювання.
12. Системи економіко-математичних моделей.
13. Методологічні принципи побудови системи економіко-математичних моделей.

*Література* [2; 4; 6; 9; 10; 14; 15; 18]

**Тема 2. Основні поняття теорії та методів оптимізації**

**Завдання.** Побудувати математичні моделі оптимізаційних економічних задач.

1. На виготовлення двох видів продукції ( $P_1$  і  $P_2$ ) витрачаються три види ресурсів  $A_1, A_2, A_3$ . Наявність ресурсів дорівнює відповідно: 361, 520, 248. Витрати ресурсів на одиницю продукції  $P_1$  становлять відповідно: 13, 7, 17; на одиницю продукції  $P_2$  — 16, 4, 9. Ціна за одиницю продукції дорівнює відповідно: 11, 8. Побудувати модель лінійного програмування початкової й двоїстої задач. Знайти такий план виробництва, який би забезпечував найбільшу виручку. Дати економічне тлумачення розв'язку задачі.

2. Фірма спеціалізується на виробництві офісних меблів, зокрема випускає дві моделі збірних книжкових полиць:  $A$  та  $B$ . Полиці обох моделей обробляють на двох верстатах: шліфувальному та полірувальному. Тривалість обробки у хвиликах однієї полиці кожної моделі відома:

Тип верстату	Тривалість обробки однієї полиці, хв	
	$A$	$B$
Шліфувальний	15	40
Полірувальний	50	30

Час роботи обох верстатів обмежений і становить: для шліфувального 600 хв, для полірувального — 900 хв на тиждень.

Вивчення ринку збуту показало, що тижневий попит на книжкові полиці обох типів не перевищує 20 одиниць.

Прибуток фірми від реалізації однієї полиці моделі  $A$  становить 300 грн, а моделі  $B$  — 400 грн.

Визначити обсяги виробництва книжкових полиць різних моделей, що максимізують прибуток фірми.

**Питання для самоконтролю**

1. Предмет та об'єкт “Математичного програмування”.
2. Приклади економічних задач математичного програмування.
3. Поняття про математичну модель оптимізаційної задачі.
4. Цільова функція та множина допустимих розв'язків задачі оптимізації.
5. Загальна постановка задачі лінійного програмування. Приклади економічних задач лінійного програмування.

*Література* [2; 4; 6; 9; 10; 14; 15; 18]

### Тема 3–4. Лінійні оптимізаційні економіко-математичні моделі та методи

**Завдання.** Розв'язати задачі лінійного програмування графічним методом:

а)  $Z = x_1 - 2x_2$  (min)  
 $x_1 - x_2 \leq 1,$   
 $x_1 + x_2 \geq 2,$   
 $x_1 - 2x_2 \leq 0,$   
 $x_1 \geq 0; x_2 \geq 0;$

в)  $Z = 3x_1 + 2x_2$  (min)  
 $3x_1 + 2x_2 \geq 6,$   
 $x_1 + 4x_2 \geq 4,$   
 $x_1 \geq 0; x_2 \geq 0;$

д)  $Z = 2x_1 + 4x_2$  (max)  
 $3x_1 + 2x_2 \leq 11,$   
 $-2x_1 + x_2 \leq 2,$   
 $-x_1 + 3x_2 \geq 0,$   
 $x_1 \geq 0; x_2 \geq 0;$

б)  $Z = x_1 + 3x_2$  (max)  
 $x_1 - x_2 \leq 1,$   
 $2x_1 + x_2 \leq 2,$   
 $x_1 - x_2 \geq 0,$   
 $x_1 \geq 0; x_2 \geq 0;$

г)  $Z = x_1 + x_2$  (max)  
 $x_1 + 2x_2 \leq 10,$   
 $x_1 + 2x_2 \geq 2,$   
 $2x_1 + x_2 \leq 10,$   
 $x_1 \geq 0; x_2 \geq 0;$

є)  $Z = 2x_1 + 4x_2$  (min)  
 $3x_1 + 2x_2 \leq 11,$   
 $-2x_1 + x_2 \leq 2,$   
 $x_1 - 3x_2 \leq 0,$   
 $x_1 \geq 0; x_2 \geq 0.$

#### Питання для самоконтролю

1. Модель задачі лінійного програмування в розгорнутому і скороченому вигляді, а також в матричній і векторній формах.
2. Властивості розв'язків задачі лінійного програмування. Геометрична інтерпретація задач лінійного програмування.
3. Означення планів задачі лінійного програмування (допустимий, опорний, оптимальний).
4. Побудова опорного плану задачі лінійного програмування, перехід до іншого опорного плану.

*Література* [2; 4; 6; 9; 10; 14; 15; 18]

### Тема 5–6. Теоретичні основи симплекс-методу

**Завдання.** Розв'язати наведені у попередній темі задачі лінійного програмування симплексним методом.

#### Питання для самоконтролю

1. Теорема про оптимальність розв'язку задачі лінійного програмування симплекс-методом.
2. Пошук оптимального розв'язку задачі лінійного програмування.
3. Алгоритм симплексного методу.
4. Критерії завершення розрахунків за симплекс-методом.
5. Симплексний метод зі штучним базисом. Ознака оптимальності плану зі штучним базисом.

*Література* [2; 4; 6; 9; 10; 14; 15; 18]

### Тема 7. Теорія двоїстості та двоїсті оцінки лінійних оптимізаційних задач

**Завдання 1.** Знайти розв'язок наступних задач лінійного програмування шляхом графічного розв'язування двоїстої задачі й застосування теорем двоїстості:

а)  $Z = 5x_1 + x_2 + x_3 + x_4 - 16$  (max)  
$$\begin{cases} 4x_1 + x_3 + x_4 = 16, \\ 6x_1 - 4x_2 - x_3 + x_4 = 4, \end{cases}$$
 $x_j \geq 0, j = \overline{1,4};$

б)  $Z = 3x_1 + x_2 + x_3$  (max).  
$$\begin{cases} 2x_1 - x_2 + x_3 = 6 \\ x_1 + 2x_2 - x_3 = 4, \end{cases}$$
 $x_j \geq 0, j = \overline{1,3}.$

**Завдання 2.** Для плану  $\bar{X} = (3, 0, 1, 3)$  визначити, чи він є оптимальним для наступних задач (застосовуючи теорему двоїстості й не розв'язуючи задачі симплексним методом):

а)  $Z = -2x_1 - x_2 + x_3 + x_4$  (max)  
$$\begin{cases} x_1 - x_2 + 2x_3 - x_4 = 2, \\ 2x_1 + x_2 - 3x_3 + x_4 = 6, \\ -x_1 + 3x_2 + 2x_3 + x_4 = 2, \end{cases}$$
 $x_j \geq 0, j = \overline{1,4};$

$$б) Z = 2x_1 - x_2 + 4x_3 - 6x_4 (\max)$$

$$\begin{cases} 3x_1 - x_2 + 2x_4 \leq 15, \\ x_1 + 2x_2 - x_3 - 2x_4 \geq -4, \\ x_2 + 3x_3 - x_4 \geq 0, \\ x_j \geq 0, j = 1, 4 \end{cases}$$

### Питання для самоконтролю

1. Двоїста задача. Правила побудови двоїстої задачі. Симетричні й несиметричні двоїсті задачі.
2. Економічний зміст двоїстої задачі й двоїстих оцінок.
3. Теорема двоїстості, їх економічна інтерпретація.

*Література* [2; 4; 6; 9; 10; 14; 15; 18]

### Тема 8. Економічна інтерпретація пари двоїстих задач

**Завдання.** У наведених далі задачах:

- а) побудуйте економіко-математичні моделі початкової та двоїстої задач;
- б) приведіть задачі до канонічного виду й дайте економічне тлумачення основних і допоміжних змінних двох задач;
- в) з наведеної останньої симплексної таблиці початкової задачі запишіть оптимальні плани  $\bar{X}_0$  і  $\bar{Y}_0$ ;
- г) визначте дефіцитні й недефіцитні ресурси, рентабельну та збиткову продукцію;
- д) знайдіть межі зміни обсягів дефіцитних ресурсів, в яких оцінка ресурсу залишається сталою (аналіз двоїстих оцінок на стійкість);
- е) знайдіть межі зміни обсягів недефіцитних ресурсів;
- є) знайдіть межі зміни цін на рентабельну і нерентабельну продукцію, в яких структура оптимального плану початкової задачі не змінюється;
- ж) в якому випадку розширення асортименту випуску за рахунок введення нової продукції буде доцільним, чи недоцільним?

**Задача 1.** Підприємство виготовляє три види продукції  $A$ ,  $B$  і  $C$ , використовуючи для цього три види ресурсів I, II, III. Норми витрат усіх ресурсів на одиницю продукції та запаси ресурсів наведено в табл. 1

Таблиця 1

Вид ресурсу	Норма витрат на одиницю продукції за видами			Запас ресурсу
	$H$	$B$	$C$	
I	18	15	12	360
II	6	4	8	192
III	5	3	3	180

Відома ціна одиниці продукції кожного виду:  $A - 9$ ;  $B - 10$  і  $C - 16$  ум. од. Визначити план виробництва продукції, що забезпечує підприємству найбільший дохід.

Остання симплекс-таблиця даної задачі має такий вигляд (табл. 2)

Таблиця 2

Базис	$C_6$	$A_0$	9	10	16	0	0	0
			$X_1$	$X_2$	$X_3$	$X_4$	$X_5$	$X_6$
$X_2$	10	8	1	1	0	1/9	-1/6	0
$X_3$	16	20	1/4	0	1	-1/18	5/24	0
$X_6$	0	96	5/4	0	0	-1/6	-1/8	1
$Z_j - C_j \geq 0$		400	5	0	0	2/9	5/3	0

**Задача 2.** Підприємство виготовляє продукцію видів  $A$ ,  $B$  і  $C$ , для чого використовує три види ресурсів I, II, III. Норми витрат усіх ресурсів на одиницю продукції та обсяги ресурсів на підприємстві наведено в табл. 1.

Таблиця 1

Вид ресурсу	Норма витрат на одиницю продукції за видами			Запас ресурсу
	$A$	$B$	$C$	
I	4	2	1	180
II	3	1	3	210
III	1	2	5	244

Відома ціна одиниці продукції кожного виду:  $A - 10$ ;  $B - 14$  і  $C - 12$  ум. од. Визначити план виробництва продукції, що забезпечує підприємству найбільший дохід.

Остання симплекс-таблиця, що містить оптимальний план задачі, має такий вигляд (табл. 2)

Таблиця 2

Базис	C	A <sub>0</sub>	9	10	16	0	0	0
			X <sub>1</sub>	X <sub>2</sub>	X <sub>3</sub>	X <sub>4</sub>	X <sub>5</sub>	X <sub>6</sub>
X <sub>2</sub>	14	82	19/8	1	0	5/8	0	-1/8
X <sub>5</sub>	0	80	23/8	0	0	1/8	1	-5/8
X <sub>3</sub>	12	16	-3/4	0	1	-1/4	0	-1/4
Z <sub>j</sub> - C <sub>j</sub> ≥ 0		134	57/4	0	0	23/4	0	5/4

### Питання для самоконтролю

1. Застосування теорем двоїстості у розв'язуванні задач лінійного програмування.
2. Аналіз розв'язків лінійних економіко-математичних моделей.
3. Оцінка рентабельності продукції.
4. Доцільність введення нової продукції.
5. Аналіз обмежень дефіцитних і недефіцитних ресурсів.
6. Аналіз коефіцієнтів цільової функції задач лінійного програмування.

*Література* [2; 4; 6; 9; 10; 14; 15; 18]

### Тема 9. Транспорта задача

**Завдання.** Розв'язати наступну задачу: компанія контролює три фабрики A<sub>1</sub>, A<sub>2</sub>, A<sub>3</sub>, здатні виготовляти щотижня відповідно 150, 60 та 80 тис. од. продукції. Компанія уклала договір з чотирма замовниками B<sub>1</sub>, B<sub>2</sub>, B<sub>3</sub>, B<sub>4</sub>, яким потрібно щотижня відповідно 110, 40, 60 та 80 тис. од. продукції. Вартість виробництва та транспортування 1000 од. продукції замовниками з кожної фабрики наведено в таблиці.

Фабрика	Вартість виробництва і транспортування 1000 од. продукції за замовниками			
	B <sub>1</sub>	B <sub>2</sub>	B <sub>3</sub>	B <sub>4</sub>
A <sub>1</sub>	4	4	2	5
A <sub>2</sub>	5	3	1	2
A <sub>3</sub>	2	1	4	2

Визначити для кожної фабрики оптимальний план перевезення продукції до замовників, що мінімізує загальну вартість виробництва і транспортних послуг.

### Питання для самоконтролю

1. Математична модель транспортної задачі.
2. Зведення відкритої транспортної задачі до закритого типу.
3. Методи побудови початкових опорних розв'язків транспортної задачі.
4. Метод потенціалів розв'язання транспортної задачі.

*Література* [2; 4; 6; 9; 10; 14; 15; 18]

### Тема 10. Моделі та методи цілочислової оптимізації

**Завдання.** На основі умовно-оптимального плану цілочисельної задачі побудувати допоміжне обмеження Гоморі, приєднати його до умовно-оптимального плану, показаного у наведеній нижче таблиці, і знайти цілі значення змінних задачі лінійного програмування.

А)

Базис	C <sub>6</sub>	A <sub>0</sub>	-4	1	2	0	3
			A <sub>1</sub>	A <sub>2</sub>	A <sub>3</sub>	A <sub>4</sub>	A <sub>5</sub>
X <sub>1</sub>	-4	7/2	1	-5/2	0	5/2	-3/2
X <sub>3</sub>	2	5/2	0	1/2	1	31/2	11/2
Z <sub>j</sub> - C <sub>j</sub> ≥ 0		-9	0	10	0	21	14

Б)

Базис	C <sub>6</sub>	A <sub>0</sub>	1	-1	3	4	2
			A <sub>1</sub>	A <sub>2</sub>	A <sub>3</sub>	A <sub>4</sub>	A <sub>5</sub>
X <sub>1</sub>	1	14/3	1	-2/3	0	5/3	1/3
X <sub>3</sub>	3	11/3	0	1/3	1	7/3	1
Z <sub>j</sub> - C <sub>j</sub> ≥ 0		47/3	0	4/3	0	14/3	11/3

### Питання для самоконтролю

1. Область застосування цілочислових задач у плануванні й управлінні виробництвом.

2. Геометрична інтерпретація задачі цілочислового програмування.
3. Метод Гоморі.
4. Метод гілок та меж розв'язання задач цілочислового програмування.

*Література* [2; 4; 6; 9; 10; 14; 15; 18]

### Тема 11. Дробово-лінійне програмування

**Завдання.** Розв'язати графічним методом задачу дробово-лінійного програмування:

$$Z = \frac{3x_1 - 2x_2}{x_1 + 2x_2} \rightarrow \max(\min)$$

за умов

$$\begin{cases} 2x_1 + 4x_2 \leq 16, \\ -4x_1 + 2x_2 \leq 8, \\ x_1 + 3x_2 \geq 9, \\ x_j \geq 0, \quad j = \overline{1,2}. \end{cases}$$

#### Питання для самоконтролю

1. Область застосування дробово-лінійних задач у плануванні й управлінні виробництвом.
2. Графічний розв'язок дробово-лінійних задач.
3. Зведення дробово-лінійних задач до задач лінійного програмування.

*Література* [10]

### Тема 12. Нелінійні оптимізаційні моделі та методи

**Завдання 1.** Розв'язати графічним методом задачу нелінійного програмування; знайти глобальні екстремуми:

$$\begin{aligned} \text{а) } Z &= (x_1 - 4)^2 + (x_2 - 8)^2 \\ \begin{cases} 2x_1 + 5x_2 \leq 30, \\ 2x_1 + 2x_2 \leq 14, \\ x_{1,2} \geq 0. \end{cases} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{б) } Z &= 2x_1 + x_2, \\ x_1^2 + x_2^2 &\leq 36, \\ x_{1,2} &\geq 0. \end{aligned}$$

**Завдання 2.** Використовуючи метод множників Лагранжа, знайти точки умовного екстремуму задачі нелінійного програмування:

$$\begin{aligned} Z &= x_1x_2 + x_2x_3 \\ \begin{cases} x_1 + x_2 = 4 \\ x_2 + x_3 = 4. \end{cases} \end{aligned}$$

**Завдання 3.** Користуючись теоремою Куна-Таккера, скласти функцію Лагранжа та записати необхідні і достатні умови існування сідлової точки наступної задачі нелінійного програмування:

$$\begin{aligned} Z &= 2x_1 + 4x_2 - x_1^2 - 2x_2^2 \\ \begin{cases} x_1 + 2x_2 \leq 8, \\ 2x_1 - x_2 \leq 12, \\ x_{1,2} \geq 0. \end{cases} \end{aligned}$$

**Завдання 4.** Розв'язати градієнтним методом задачу нелінійного програмування, почавши процес з точки  $x^0(2,3)$ :

$$\begin{aligned} Z &= 10 - 2x_1 + x_2 - x_1^2 - x_2^2 + x_3^2 (\max) \\ \begin{cases} 2x_1 + x_2 + 3x_3 \leq 18, \\ x_1 + 2x_2 + x_3 \leq 12, \\ x_{1,2} \geq 0. \end{cases} \end{aligned}$$

#### Питання для самоконтролю

1. Постановка задачі нелінійного програмування, математична модель. Геометрична інтерпретація.
2. Графічний метод розв'язування задач нелінійного програмування.
3. Метод множників Лагранжа. Теорема Лагранжа. Алгоритм розв'язування задачі на безумовний екстремум.
4. Поняття про опуклі функції. Геометрична інтерпретація задачі опуклого програмування на площині.
5. Сідлова точка та необхідні і достатні умови її існування. Теорема Куна-Таккера.

*Література* [2; 4; 6; 9; 10; 14; 15; 18]



## Змістовий модуль II. Ризикологія та економетричні моделі та методи

### Тема 13. Аналіз та управління ризиком в економіці

#### Питання для самостійного опрацювання

Концептуальні засади ризикології.

Загальні підходи до зниження ступеня економічного ризику.

Зовнішні та внутрішні способи зниження ступеня ризику.

Таблиця рішень.

**Задача.** Вважаючи, що функція щільності розподілу ймовірності збитків задається аналітичною формулою

$$f(x) = \begin{cases} ax^a e^{-\frac{(x-c)^2}{b^2}}, & x \geq 0 \\ 0, & x < 0 \end{cases},$$

оцінити межі допустимої, критичної та катастрофічної зон збитків (відносних) для фірми. Значення критеріїв допустимого, критичного та катастрофічного ризиків задайте самостійно.

#### Питання для самоконтролю

1. Дайте означення економічного ризику. Поясніть його сутність.
2. Наведіть приклади економічних рішень, обтяжених ризиком. Ідентифікуйте ризики, здійсніть їх якісний аналіз.
3. Поясніть основні причини виникнення економічного ризику.
4. Пояснити сутність таких понять, як: джерело, об'єкт, суб'єкт економічного ризику.
5. Назвіть основні види джерел ризику, в певному виді економічної діяльності, й самих ризиків.

*Література* [1]

### Тема 14. Система показників кількісного оцінювання ступеня ризику

**Задача.** Розглядаються два проекти *A* і *B* щодо інвестування. Відомі оцінки прогнозованих значень доходу від кожного з цих проектів та відповідні значення ймовірностей. Цифрові дані наведено в таблиці.

Потрібно оцінити міру ризику кожного з цих проектів та обрати один із них для інвестування (той, що забезпечує меншу величину

ризиком), якщо за величину ризику приймається: а) величина дисперсії; б) величина коефіцієнта варіації; в) величина семіваріації; г) величина коефіцієнта семіваріації.

Оцінка можливого результату	Проект А		Проект В	
	Прогнозований прибуток, млн. дол.	Значення ймовірностей	Прогнозований прибуток, млн. дол.	Значення ймовірностей
Песимістична	300	0,20	240	0,25
Стримана	1000	0,60	900	0,50
Оптимістична	1500	0,20	1800	0,25

#### Питання для самоконтролю

1. Сутність кількісного аналізу ризику. Навести відповідні приклади.
2. Сутність кількісного аналізу ризику за допомогою методів імітаційного моделювання.
3. Основні засади кількісного аналізу ризику методом аналогій.
4. Сутність та основні кроки здійснення аналізу ризику за допомогою методу аналізу чутливості. Навести відповідний приклад.
5. Чому для кількісного вимірювання величини ризику використовують кілька показників? Навести окремі з них, та подати відповідні приклади.
6. Які Ви знаєте показники кількісної оцінки ризику в абсолютному вираженні? Навести приклади.
7. Чому та в якому випадку для оцінювання переваг одного з кількох варіантів проектів використовують коефіцієнт варіації, узагальнений коефіцієнт варіації?
8. Навести приклади показників ступеня ризику у відносному вираженні.
9. В яких ситуаціях доцільніше оцінювати ризик за допомогою семіваріації? За допомогою коефіцієнта семіваріації? Навести приклади.
10. Пояснити, що означають терміни: “допустимий”, “критичний”, “катастрофічний” ризик, навести приклади кількісного визначення цих величин.
11. Розкрити зміст основних етапів процесу управління ризиком. Навести приклади.

12. Наведіть приклади ситуацій, коли доцільно використовувати зовнішні способи зниження ступеня ризику. Дайте відповідні пояснення.
13. В яких випадках доцільно й можливо застосовувати страхування як спосіб зниження ризику? Наведіть приклади.
14. Для розв'язання яких проблем та в яких сферах економіки можна застосовувати теорію портфеля? Наведіть приклади та дайте відповідні пояснення.
15. Суть поняття “систематичний ризик” та “специфічний ризик” цінного паперу. Навести приклади та дати відповідні пояснення.

*Література* [1]

### Тема 15. Принципи побудови економетричних моделей

**Завдання.** Дані, наведені в таблиці, характеризують витрати на рекламу продукції —  $X$ , та обсяг її реалізації —  $Y$ .

*млн. грн.*

$x_i$	2	3	5	7	10
$y_i$	14	16	20	25	32

*Потрібно:*

- а) побудувати кореляційне поле точок;
- б) обчислити числові характеристики  $\bar{x}$ ,  $\bar{y}$ ,  $\sigma_x$ ,  $\sigma_y$ ,  $r_{xy}$ .

#### Питання для самоконтролю

1. Поняття про кореляційний зв'язок між економічними показниками.
2. Економетрична модель та її складові елементи.
3. Статистична база економетрії.

*Література* [3; 5; 7; 8; 11–13; 16; 17]

### Тема 16. Парна лінійна регресія

**Завдання 1.** Модель  $\hat{y}_i^* = 62,9 - 1,4x_i$  характеризує залежність обсягу наданих кредитів від рівня процентної ставки. Рівняння побудоване на основі емпіричних даних, наведених в таблиці:

*млн. грн.*

$x_i$	18	20	24	25	27
$y_i$	40	34	32	28	27

*Потрібно:*

1. Здійснити економетричний аналіз моделі:
  - перевірити статистичну значущість коефіцієнта кореляції  $r$  та параметра  $\beta_1$  при рівні значущості  $\alpha = 0,04$ ;
  - побудувати довірчі інтервали для теоретичних параметрів моделі при рівні надійності  $\gamma = 0,95$ ;
  - визначити коефіцієнт детермінації, пояснити що він означає.
2. Побудувати точковий та інтервальний прогноз для залежної змінної при рівні надійності  $\gamma = 0,95$  ( $x_{np}$  задати самостійно).

**Завдання 2.** Відомі дані щодо середньомісячного рівня зайнятості ( $X$ ) та рівня інфляції ( $Y$ ):

*%*

$x_i$	32	35	36	34	38	36	37	40
$y_i$	5,4	6,1	6,2	5,8	6,3	6,0	5,9	6,3

Побудувати гіперболічну модель, визначити коефіцієнт детермінації та коефіцієнт еластичності.

#### Питання для самоконтролю

1. Загальний вигляд теоретичного та емпіричного рівнянь парної лінійної регресії, їх складові.
2. Причини, які спонукають появу випадкової складової  $\epsilon$  в регресійних моделях.
3. Етапи побудови економетричної моделі.
4. Параметри моделі парної лінійної регресії, їх сутність та оцінювання.
5. Закони розподілу ймовірностей емпіричних параметрів парної регресії, їх числові характеристики та статистичні властивості.
6. Що є точковою незміщеною статистичною оцінкою для дисперсії залишків в моделі парної лінійної регресії?
7. Описати алгоритм побудови довірчих інтервалів із заданою надійністю для параметрів і функції парної регресії.

*Література* [3; 5; 7; 8; 11–13; 16; 17]

### Тема 17. Множинна лінійна та нелінійна регресія

**Завдання 1.** В результаті дослідження чинників економічного зростання побудовано таку модель (обсяг вибірки — 73 країни):

$$G = 1,4 - 0,52P + 0,17S + 11,16I - 0,38D - 4,75In + e,$$

(5,9) (4,34) (3,91) (0,79) (2,7)

тут  $G$  – темп росту середньодушевого ВВП у % до базового періоду;  $P$  – реальний середньодушевий ВВП, %;  $S$  – бюджетний дефіцит, % до ВВП;  $I$  – обсяг інвестицій, % до ВВП;  $D$  – зовнішній борг, % до ВВП;  $In$  – рівень інфляції, %.

У дужках вказані спостережувані значення  $t$ -критерія. Відомий також коефіцієнт детермінації  $R^2 = 0,78$ .

Потрібно:

1. Перевірити загальну якість даної моделі.
2. Перевірити значущість параметрів моделі при рівні значущості  $\gamma = 0,02$  та записати, враховуючи зроблені висновки, теоретичну модель.
3. Побудувати довірчі інтервали для параметрів теоретичної моделі при рівні надійності  $\gamma = 0,95$ .
4. Визначити часткові коефіцієнти еластичності.

**Завдання 2.** Побудовано модель залежності середньомісячної ринкової ціни акцій підприємства ( $Y$ , грн./акція) від обсягу сплачених дивідендів на акцію ( $X_1$ , грн./місяць) та обсягу коштів, спрямованих підприємством на розширення виробництва ( $X_2$ , сотні тис. грн./місяць):

$$y_i = 2,4 + 1,6x_{i1} + 0,9x_{i2} + e_i.$$

Відомо також, що  $S_{\varepsilon}^2 = 10,5$ ,  $(X^T X)^{-1} = \begin{pmatrix} 1,22 & -0,22 & -0,11 \\ -0,22 & 0,14 & -0,07 \\ -0,11 & -0,07 & 0,101 \end{pmatrix}$ ,  $n = 20$ .

Побудувати точковий та інтервальний прогноз для залежної змінної, якщо  $x_{np,1} = 10$ ,  $x_{np,2} = 2$ , а рівень надійності  $\gamma = 0,99$ .

**Завдання 3.** У наведеній таблиці  $Y$  – місячний обсяг попиту на товари першої необхідності сім'ї з трьох чоловік,  $X$  – місячний рівень доходу сім'ї:

*ум. гр. од.*

$X$	2,5	1,4	0,9	2,7	1,8	2,2	2,4	1,9	1,6	1,2
$Y$	0,8	1,1	0,7	0,9	1,0	1,2	0,9	0,6	0,7	0,5

Перевірити, яка з моделей краще наближає емпіричні дані: 1) лінійна; 2) степенева; 3) гіперболічна.

*Перевірити статистичну значущість зв'язку в кожній з цих моделей.*

### Питання для самоконтролю

1. Теоретична та статистична лінійна множинна модель та їх запис у векторно-матричній формі.
2. Умови Гаусса-Маркова для парної та множинної лінійної регресії.
3. Чому дорівнює вектор параметрів в моделі множинної лінійної регресії?
4. Як визначається точкова незміщена статистична оцінка для дисперсії залишків в моделі множинної лінійної регресії?
5. Як побудувати довірчий інтервал із заданною надійністю для параметрів теоретичної множинної лінійної регресії?
6. Перевірка статистичної значущості параметрів та перевірка загальної якості множинної регресії.
7. Виробнича функція Кобба-Дугласа. Визначення оцінок її параметрів.
8. Поліноміальна та гіперболічна моделі, визначення для них оцінок параметрів.

*Література* [3; 5; 7; 8; 11–13; 16; 17]

### Тема 18. Мультиколінеарність

**Завдання 1.** На основі даних, наведених в таблиці, визначити коефіцієнти кореляції для кожної пари регресорів та записати матрицю  $r$ . Чи буде присутня в моделі, побудованій на основі цих змінних, ознака мультиколінеарності?

Визначити коефіцієнти кореляції між регресорами та залежною змінною, записати вектор  $r$ .

Яким чином можна усунути мультиколінеарність з моделі?

$X_1$	$X_2$	$X_3$
4	10	16
2	13	18
3	14	14
8	15	10
7	18	12
10	20	9
15	23	12
14	25	8
10	27	5

**Завдання 2.** Відомі статистичні дані щодо ціни на товар даного підприємства —  $X_1$ , та ціни на товар-аналог конкуруючого підприємства —  $X_2$ :

грн.

$X_1$	10	8	12	15	14	16	18
$X_2$	9	7,2	10,8	13,5	12,6	14,4	16,2

Знайти  $\det(X^T X)$  і зробити висновок — чи можна ці змінні використовувати в якості регресорів моделі множинної лінійної регресії.

#### Питання для самоконтролю

1. Суть та наслідки мультиколінеарності.
2. Як виявити ознаку мультиколінеарності в лінійних моделях?
3. Методи усунення з моделі ознаки мультиколінеарності.

*Література* [3; 5; 7; 8; 11–13; 16; 17]

#### Тема 19. Узагальнені лінійні моделі

**Завдання.** Відомі дані щодо місячного обсягу прибутку 15 підприємств галузі —  $X$ , та обсягу дивідендів, сплачених цими підприємствами за місяць —  $Y$ :

млн. грн.

$X$	3	5	8	10	12	14	7	6	9	10	5	7	4	12	15	18
$Y$	0,2	1,2	4,0	1,5	2,0	3,5	0,8	2,2	1,4	5,0	2,1	1,8	2,3	8	1,6	10

Побудувати модель парної лінійної регресії. Перевірити за тестом Гельдфельда-Квандта, чи виконується умова гомоскедастичності залишків.

#### Питання для самоконтролю

1. Суть гетероскедастичності. Які негативні наслідки викликає ознака гетероскедастичності в лінійних моделях?
2. У чому полягає суть тесту Гельдфельда-Квандта? Послідовність його виконання.
3. Узагальнений метод найменших квадратів. Визначення вектора параметрів і їх коваріації.
4. Зважений метод найменших квадратів. Визначення вектора параметрів і їх коваріації за умов а)  $\sigma_{\epsilon_i}^2 = \sigma^2 x_i$  та б)  $\sigma_{\epsilon_i}^2 = \sigma^2 x_i^2$ .

*Література* [3; 5; 7; 8; 11–13; 16; 17]

#### Тема 20. Економетричні моделі динаміки

В таблиці наведені дані, які характеризують динаміку щотижневого обсягу реалізації продукції підприємства ( $y_t$ , сотні тис. грн.):

№ тижня	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
$y_t$	16	10	18	25	17	14	20	22	27	13

*Потрібно:*

1. Обчислити ковзні середні для значень  $m = 3, 5$  і визначити загальну тенденцію зміни часового ряду графічно.
2. Визначити аналітичний вираз тренду (підібрати функцію  $\hat{y}_t^*$ ).

#### Питання для самоконтролю

1. Часовий ряд в загальному вигляді. Поняття тренду, сезонної, циклічної та випадкової компоненти. Основні етапи аналізу числових рядів.
2. У чому полягає суть ковзної середньої?
3. Автокореляція часового ряду, коефіцієнт автокореляції, автокореляційна функція.
4. Поняття “аналітичне вирівнювання рядів”. Описати етапи аналітичного вирівнювання.
5. Що називається стаціонарним часовим рядом, його основні характеристики?

*Література* [3; 5; 7; 8; 11–13; 16; 17]

#### Тема 21. Системи одночасних рівнянь

*Питання для самостійного опрацювання*

1. Приклади систем одночасних рівнянь.
2. Структурна і зведена форми системи.
3. Перевірка ідентифікованості системи одночасних рівнянь.
4. Метод інструментальних змінних та метод головних компонентів оцінювання параметрів системи одночасних рівнянь.

#### Питання для самоконтролю

1. Який зміст мають структурна та зведена форми рівнянь?
2. Яким чином перевіряється умова ідентифікованості рівнянь системи?
3. Умови застосування непрямого МНК.
4. Умови застосування двокрокового МНК.

*Література* [3; 5; 7; 8; 11–13; 16; 17]

## СПИСОК ЛІТЕРАТУРИ

### Основна

1. Вітлінський В. В., Верченко П. І. Аналіз, моделювання та управління економічним ризиком: Навч.-метод. посіб. для самост. вивч. дисц. — К.: Вид-во КНЕУ, 2000. — 292 с.
2. Гетманцев В. Д. Лінійна алгебра і лінійне програмування. — К.: Либідь, 2001. — 256 с.
3. Грубер Й. Економетрія: Вступ до множинної регресії та економетрії: У 2 т. — К.: Нічлава, 1998. — Т. 1. — 386 с.
4. Жильцов О. Б., Кулян В. Р., Юнькова О. О. Математичне програмування (з елементами інформаційних технологій): Навч. посіб. для студ. вищ. навч. закл. — К.: МАУП, 2006. — 184 с.
5. Корольов О. А. Економетрія. Навч. посіб. — К.: Вид-во КНТЕУ, 2000. — 660 с.
6. Зайченко Ю. П. Дослідження операцій. — К.: ЗАТ “ВІТОЛ”, 2000. — 668 с.
7. Лецинський О. Л., Рязанцева В. В., Юнькова О. О. Економетрія: Навч. посіб. для студ. вищ. навч. закл. — К.: МАУП, 2003. — 208 с.
8. Лук'яненко І. Г., Краснікова Л. І. Економетрика: Підручник. — К.: Знання, КОО, 1998. — 494 с.
9. Мазаракі А. А., Толбатов Ю. А. Математичне програмування в Excel: Навч. посіб. — К.: Четверта хвиля, 1998. — 208 с.
10. Наконечний С. І., Савіна С. С. Математичне програмування: Навч. посіб. — К.: Вид-во КНЕУ, 2003. — 452 с.
11. Наконечний С. І., Терещенко Т. О., Романюк Т. П. Економетрія: Підручник. — К.: Вид-во КНЕУ, 2004. — 520 с.

### Додаткова

12. Бородич С. А. Эконометрика: Учеб. пособие. — Мн.: Новое знание, 2001. — 408 с.
13. Доугерти К. Введение в эконометрику. — Москва: ИНФРА-М, 1997.
14. Зайченко Ю. П. Дослідження операцій: Учеб. для вузов. — К.: Вища шк., 1989. — 320 с.
15. Замков О. О., Толстопятенко А. В., Черемных Ю. Н. Математические методы в экономике. — М.: ДИС, 1997. — 365 с.
16. Слейко В. І. Основи економетрії: У 2 ч. — Львів: Тов. “Марка ЛТД”, 1995.

17. Назаренко О. М. Основи економетрики. — 2-ге вид., перероб.: Підручник. — К.: Центр навч. літ-ри, 2005. — 392 с.
18. Таха, Хәмди А. Введение в исследование операций: Пер. с англ. 6-е изд. — М.: Изд. дом “Вильямс”, 2001. — 912 с.

## ***ЗМІСТ***

Пояснювальна записка.....	3
Тематичний план дисципліни “Економіко-математичне моделювання” .....	5
Зміст самостійної роботи з дисципліни “Економіка-математичне моделювання” .....	6
Список літератури.....	24

Відповідальний за випуск *А. Д. Вегеренко*  
Редактор *А. А. Тютюнник*  
Комп'ютерне верстання *А. П. Нечипорук*

Зам. № ВКЦ-4524

Формат 60×84/<sub>16</sub>. Папір офсетний.

Друк ротатійний трафаретний.

Ум. друк. арк. 1,86. Обл.-вид. арк. 1,45. Наклад 30 пр.

Міжрегіональна Академія управління персоналом (МАУП)

03039 Київ-39, вул. Фрометівська, 2, МАУП

ДП «Видавничий дім «Персонал»

03039 Київ-39, просп. Червонозоряний, 119, літ. ХХ

*Свідоцтво про внесення до Державного реєстру  
суб'єктів видавничої справи ДК № 3262 від 26.08.2008*